

# 饱和度对波在土层交界面的 反射、透射系数的影响

李伟华

(北方交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)

**摘要:**把均匀流体概念引入 Biot 两相多孔介质动力理论中,用 Biot 的两相多孔介质模型模拟不完全饱和土层,给出 SV 波、P 波从不完全饱和土层入射到弹性土层时,在土层交界面上反射、透射系数的表达式.结果表明与完全饱和相比,饱和度发生很小的变化就会对交界面上反射、透射系数产生很大的影响,今后应该重视饱和度变化对地震动力响应的影响.

**关键词:**均匀流体; Biot 两相多孔介质动力理论; 饱和度; 界面效应

**中图分类号:** TU435    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1000-0844(2002)04-0303-07

## 0 引言

土介质中波的传播问题是岩土工程、地震工程和地球物理学科领域的一个重要课题.但目前对土中波的传播问题的研究还仅限于弹性土体、饱和土体内部以及二者交界的情况,对于非饱和土体中波动问题的研究还很少<sup>[1]</sup>,也很少考虑到饱和度对于波的传播特性的影响.

非饱和土中有这样一种特殊的情况,就是当饱和度  $S_r$  很高时(一般当  $S_r > 90\%$  时,很多时候人们也把这种状态下的土作为饱和土)孔隙气体以分散的小气泡形式存在于孔隙水中.随着孔隙压力的增高,孔隙气泡逐渐变小;达到一定值以后,孔隙气体全部溶于水中,土体就变成完全饱和土<sup>[2]</sup>.本文的目的就是研究在不排水条件下,这种饱和度的变化( $90\% \leq S_r \leq 100\%$ )对波从不完全饱和土层入射到弹性土层时反射、透射系数的影响.本文把均匀流体概念<sup>[3,4]</sup>引入 Biot 两相多孔介质动力理论<sup>[5]</sup>中,仍用 Biot 两相多孔介质模型模拟饱和度在 0.9~1 之间的不完全饱和土层;对于覆盖在其上面的饱和度小于 90% 的不饱和土,近似地按单相介质处理.通过数值计算给出 P 波、SV 波从不完全饱和土层入射到弹性土层时,在交界面上的反射、透射系数,分析基本饱和土的饱和度在 0.9~1.0 之间变化时对上述界面效应的影响.

## 1 场地波动方程及其一般解

对于非饱和土,是由土颗粒、空气和水三相介质组成,三者的比例关系常用孔隙率  $n$  和饱和度  $S_r$  表示为

$$n = \frac{V_v}{V_t}, \quad S_r = \frac{V_w}{V_v} \quad (1)$$

其中  $V_v$ 、 $V_w$  分别表示孔隙和孔隙水的体积;  $V_t$  表示土的总体积. 对于前述的不完全饱和土 ( $S_r > 90\%$ ), 根据均匀流体概念和 Biot 两相多孔介质动力理论, 仍用 Biot 两相饱和和多孔介质模型模拟基本饱水土层. 此时孔隙水的体积模量可以由下式确定:

$$\frac{1}{K_1} = \frac{1}{K_w} + \frac{1-S_r}{P_0} \quad (2)$$

式中  $K_w$  是水的体积模量;  $P_0$  是绝对孔隙压力. 从式(2)中可见, 土中气体含量即使发生极其微小的变化, 孔隙水的体积模量改变都是非常大的.

把式(2)引入 Biot 的关于两相多孔介质的传播理论中, 其波动方程为

$$\begin{aligned} N \nabla^2 u + \nabla (A + N)e + Q\epsilon] &= (\rho_{11}\ddot{u} + \rho_{12}\dot{U}) + b(u - U), \\ \nabla Qe + R\epsilon] &= (\rho_{11}\ddot{u} + \rho_{22}\dot{U}) - b(u - U) \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $u$  和  $U$  分别为固相和液相位移;  $e = \nabla \cdot u$ ;  $\epsilon = \nabla \cdot U$ ;  $\rho_{11} = \rho_1 + \rho_a$ ;  $\rho_{22} = \rho_2 + \rho_a$ ;  $\rho_{12} = -\rho_a$ . 而  $\rho_1 = (1-n)\rho_s$ ;  $\rho_2 = n\rho_l$ ;  $\rho_s$  为固相质量密度;  $\rho_l$  为液相质量密度;  $\rho_a$  为液固两相耦合质量密度.  $b$  是与渗流有关的系数,  $b = \zeta n^2/k$ ;  $\zeta$  为流体滞变系数;  $n$  为孔隙率;  $k$  为渗透系数. 系数  $N$ 、 $A$  类似于一般弹性理论中的 Lamé 常数.  $R$ 、 $Q$  反映了流体的弹性及流体和固体骨架间的弹性相互作用. 可以表示为

$$\begin{aligned} N &= \mu, \quad A = \lambda + M(\alpha - n)^2 = (K_b - \frac{2}{3}\mu) + (\frac{K_s^2}{K_d - K_b})[(1 - \frac{K_b}{K_s}) - n]^2, \\ R &= n^2 M = \frac{n^2 K_s^2}{K_d - K_b}, \quad Q = n(a - n)M = n(1 - \frac{K_b}{K_s} - n) \frac{K_s^2}{K_d - K_b}, \\ K_d &= K_s[1 + n(\frac{K_s}{K_f} - 1)] \end{aligned} \quad (4)$$

其中:  $K_s$ 、 $K_b$  分别土颗粒和土骨架(干土状态)的体积模量;  $\lambda$ 、 $\mu$  是土骨架(干土状态)的 Lamé 常数;  $\alpha$ 、 $M$  为表征土颗粒孔隙水压缩性的常数;  $K_f$  是孔隙水的体积模量, 具体见式(2).

在 Biot 模型中, 土颗粒和孔隙水均为可压缩的, 固体、液体部分的应力—应变关系分别为

$$\sigma_{ij}^s = 2N\epsilon_{ij} + \delta_{ij}(Ae + Q\epsilon), \quad \sigma^f = Qe + R\epsilon \quad (5)$$

式中  $\sigma_{ij}^s$ 、 $\sigma^f$  分别为固体骨架部分和流体部分承担的应力,  $\epsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}$ , 是土骨架应变.

由矢量分析原理, 方程(3)的解可以用势函数表示为<sup>[6]</sup>

$$\begin{aligned} u &= \text{grad } \Phi + \text{curl } H \\ U &= \text{grad } \Psi + \text{curl } G \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $\Phi$  和  $H$  分别为固体骨架部分的标量势函数和矢量势函数;  $\Psi$  和  $G$  分别为流体部分的标量势函数和矢量势函数.

对于弹性土层, 其波动方程为<sup>[7]</sup>

$$(\lambda' + \mu') \text{grad } \theta + \mu' \nabla^2 u' = \rho' \frac{\partial u'}{\partial t} \quad (7)$$

其中  $\lambda'$ 、 $\mu'$  是弹性土层介质的 Lamé 常数;  $\rho'$  为介质密度;  $u'$  为介质的位移向量;  $\theta = \text{div } u'$ . 方程(7)的解可以用势函数表示为

$$u' = \text{grad } \Phi' + \text{curl } H' \quad (8)$$

式中  $\Phi'$  和  $H'$  分别为标量势函数和矢量势函数.

## 2 边值问题

### 2.1 界面两侧波的势函数表达式

根据弹性动力学理论, 弹性土层中存在两种体波: P 波和 SV 波; 而在两相饱和多孔介质中, 由 Biot 动力学理论可知, 存在三种体波: P<sub>I</sub> 波、P<sub>II</sub> 波、SV 波. P<sub>I</sub> 波和 SV 波相当于弹性土层中的 P 波和 SV 波, P<sub>II</sub> 波由于粘滞阻尼而衰减地很快.

本文所用的分析模型如图 1. 入射波频率为  $\omega$ , 入射角为  $\alpha_1$ , 从不完全饱和土层入射到弹性土层. 二者交于  $z = 0$ .  $z > 0$  的空间为弹性土层,  $z < 0$  的半空间为基本饱水土层.

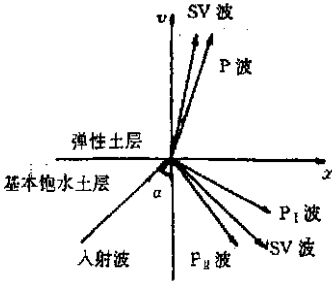


图 1 P 波和 SV 波的传播分析模型

Fig. 1 Analysis model for propagation of P and SV waves.

当  $z < 0$  时, 在不完全饱和土层中, 固体骨架部分的势函数 (本文以 P 波入射为例, SV 波入射时, 可以按照相同思路得到) 为

$$\text{入射 P}_I \text{ 波: } \Phi_1 = A_1 \exp[i(\omega t - k_1 \sin \alpha_1 x - k_1 \cos \alpha_1 z)] \quad (9)$$

$$\text{反射 P}_I \text{ 波: } \Phi_1 = A_1 \exp[i(\omega t - k_1 \sin \alpha_1 x + k_1 \cos \alpha_1 z)] \quad (10)$$

$$\text{反射 P}_{II} \text{ 波: } \Phi_2 = A_2 \exp[i(\omega t - k_2 w_{21} x + k_2 w_{23} z)] \quad (11)$$

$$\text{反射 SV 波: } H = A_3 \exp[i(\omega t - k_3 w_{31} x + k_3 w_{33} z)] \quad (12)$$

固体骨架部分总的标量、矢量势函数分别为

$$\Phi_s = \Phi_1 + \Phi_1 + \Phi_2, \quad H_s = H \quad (13)$$

液相总的标量、矢量势函数分别为

$$\psi = \eta_1(\Phi_1 + \Phi_1) + \eta_2 \Phi_2, \quad G = \eta_3 H \quad (14)$$

其中  $k_1, k_2, k_3$  分别为 P<sub>I</sub> 波、P<sub>II</sub> 波和 SV 波的复波数;  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$

分别为对应于 P<sub>I</sub> 波、P<sub>II</sub> 波和 SV 波的两个液相波的参与系数, 其计算方法参见文献[6].

当  $z > 0$  时, 在弹性土层中

$$\text{透射 P 波: } \Phi = B_1 \exp[i(\omega t - k_1 w_{11} x - k_1 w_{13} z)] \quad (15)$$

$$\text{透射 SV 波: } H = B_2 \exp[i(\omega t - k_2 w_{21} x - k_2 w_{23} z)] \quad (16)$$

其中  $k_1, k_2$  分别为 P 波和 SV 波的波数

$$k_1 = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}}; \quad k_2 = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}}$$

由 Snell 定理有

$$k_1 \sin \alpha_1 = k_1 \sin \alpha_1 = k_2 w_{21} = k_3 w_{31} = k_1 w_{11} = k_2 w_{21} \quad (17)$$

### 2.2 交界面上的边界条件

Deresiewicz 等(1963)<sup>[8]</sup> 给出了两种不同饱和多孔介质交界面上的边界条件, 以后其他研究者根据不同的需要进行了一系列修改. 本文中所采用的边界条件是综合了 Deresiewicz 等(1963)和 Hajra 等(1982)<sup>[9]</sup> 提出的边界条件, 给出了弹性土层和基本饱水土层交界面上的连续性条件, 即: 界面两侧应力和位移的切向分量和法向分量分别连续, 同时考虑界面不透水条件, 应保证在边界上基本饱水土层中固相骨架的法向位移等于流体部分的法向位移.

## 3 界面上水平位移和竖向位移的计算

根据前面给出的弹性土层和基本饱水土层场地的波动方程式(3), (7); 方程解的势函数表达式(9)~(16), 单相弹性介质应力应变关系(略)和基本饱水介质的应力应变关系式(5), 以及前述的界面上的连续性条件, 并引入 Snell 定理(式(17)), 可以得到 P 波从基本饱水介质入射

到弹性土层介质时,在界面上的反射、透射系数计算式:

$$\begin{bmatrix} n_{12} & n_{13} & n_{14} & -m_{11} & -m_{12} \\ n_{22} & n_{23} & n_{24} & -m_{21} & -m_{22} \\ n_{32} & n_{33} & n_{34} & -m_{31} & -m_{32} \\ n_{42} & n_{43} & n_{44} & -m_{41} & -m_{42} \\ n_{52} & n_{53} & n_{54} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -n_{11} A_1 \\ -n_{12} A_1 \\ -n_{13} A_1 \\ -n_{14} A_1 \\ -n_{15} A_1 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} n_{11} &= -ik_1 \sin \alpha_1; & n_{12} &= -ik_1 \sin \alpha_1; & n_{13} &= -ik_2 w_{21}; & n_{14} &= ik_3 w_{33}; \\ n_{21} &= -ik_1 \cos \alpha_1; & n_{22} &= ik_1 \cos \alpha_1; & n_{23} &= ik_2 w_{23}; & n_{24} &= ik_3 w_{31}; \\ n_{31} &= -k_1^2 [\lambda + Q(1 + \eta_1) + \eta_1 R + 2\mu \cos^2 \alpha_1]; \\ n_{32} &= -k_1^2 [\lambda + Q(1 + \eta_1) + \eta_1 R + 2\mu \cos^2 \alpha_1]; \\ n_{33} &= -k_2^2 [\lambda + Q(1 + \eta_2) + \eta_2 R + 2\mu w_{23}^2]; \\ n_{34} &= -2\mu k_3^2 w_{31} w_{33}; & n_{41} &= -2\mu k_1^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1; \\ n_{42} &= 2\mu k_1^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1; & n_{43} &= 2\mu k_2^2 w_{21} w_{23}; \\ n_{44} &= \mu k_3^2 (w_{31}^2 - w_{33}^2); & n_{51} &= (1 - \eta_1) n_{21}; & n_{52} &= (1 - \eta_1) n_{22}; \\ n_{53} &= (1 - \eta_2) n_{23}; & n_{54} &= (1 - \eta_3) n_{24} \end{aligned} \quad (19)$$

以及

$$\begin{aligned} m_{11} &= -ik_1 w_{11}; & m_{12} &= -ik_2 w_{23}; \\ m_{21} &= -ik_1 w_{13}; & m_{12} &= ik_2 w_{21}; \\ m_{31} &= -\lambda k^2 - 2\mu k^2 w_{13}; & m_{32} &= 2\mu k_2^2 w_{21} w_{23}; \\ m_{41} &= -2\mu k_1^2 w_{11} w_{13}; & m_{42} &= \mu k_2^2 (w_{21}^2 - w_{23}^2) \end{aligned} \quad (20)$$

解方程组(18),可以得到  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $B_1$ 、 $B_2$ 。同理可以得到 SV 波入射时反射、透射系数的计算公式。

## 4 计算结果分析

根据上面得到的反射、透射系数计算公式,进行数值计算。不完全饱和土层介质和弹性土层介质的材料参数见表 1<sup>[10]</sup>。入射波频率为 5 Hz。

图 2、3 分别给出了 P 波和 SV 波入射时饱和度分别为  $S_r = 95\%$ 、 $99\%$  和  $100\%$  三种情况下,入射系数、反射系数随入射角变化的变化曲线。对三种饱和度情况,我们可以看到计算结果是合理的。在 P 波入射时,当入射角为  $0^\circ$  时,没有反射、透射 SV 波产生(图 3b、3d);当入射角等于  $90^\circ$  时,发生全反射(图 3c)。在 SV 波入射时,当入射角为  $0^\circ$  时,没有反射、透射 P 波产生(图 2a、

表 1 材料参数表

材料参数	数值(SI 单位制)
土骨架的体积模量 $K_b$	$4.36 \times 10^7$
土颗粒的体积模量 $K_s$	$3.6 \times 10^{10}$
基本饱和土层	
水的体积模量 $K_w$	$2.0 \times 10^9$
土骨架的剪切模量 $\mu$	$2.7 \times 10^9$
孔隙率 $n$	0.47
固相质量密度 $\rho_s$	2 640
液相质量密度 $\rho_f$	1 000
液固两相耦合质量密度 $\rho_a$	0
弹性土层	
Lame 常数 $\lambda$	$2.00 \times 10^9$
Lame 常数 $\mu$	$1.70 \times 10^9$
介质密度 $\rho$	2 000

2c); 当入射角等于  $90^\circ$  时, 发生全反射(图 2d). 并且, 因为在此只考虑不透水边界, 所以两种情况下反射  $P_{II}$  波所占的成分都非常小. 文中没有给出  $P_{II}$  波反射曲线.

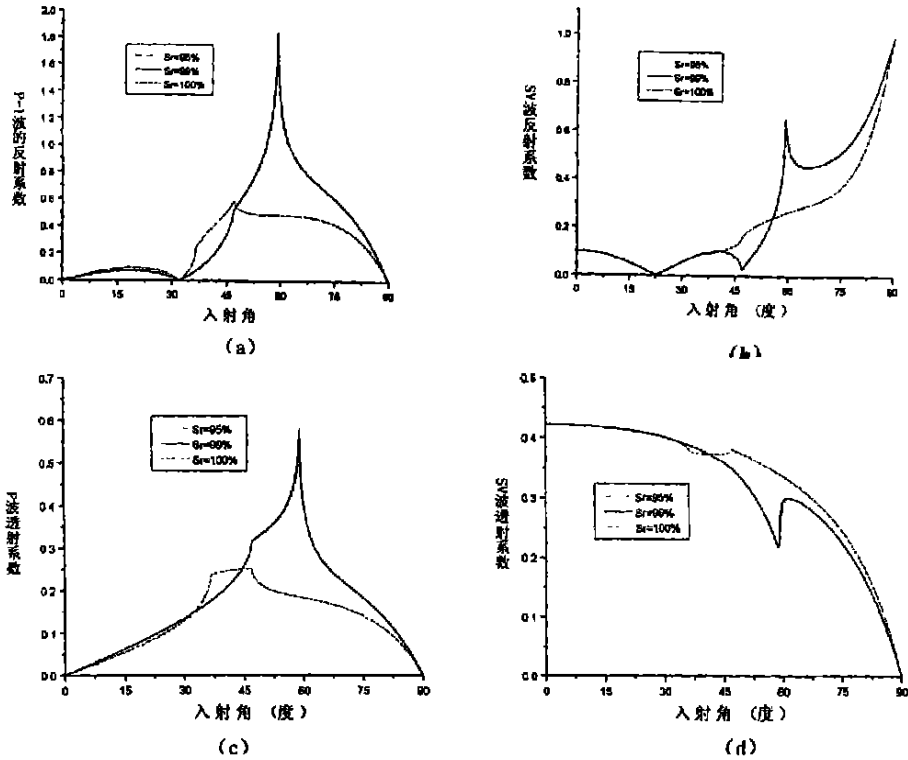


图 2 SV 波入射时不同饱和度下反射、透射系数与入射角关系曲线

Fig. 2 Reflection and transmission coefficients induced by SV wave as a function of incident angle under different saturation.

从图 2、3 中可以很明显地看出, 无论是在 P 波入射还是在 SV 波入射时, 即使在饱和度仅低于 100% 一个百分点时, 得到的反射、透射系数与饱和度等于 100% 时的结果就有很明显的差异. 同时, 这种差异随着入射角的改变而改变. 然而, 对于饱和度不等于 100% 的两种情况, 即饱和度分别等于 95% 和 99% 的两种情况, 得到的反射、透射系数却没有明显的差异.

从图中还可以看出, 在 SV 波垂直入射的情况下, 当不完全饱和土层的饱和度从 99% 变化到 100% 时, 对反射 SV 波的反射系数以及透射 SV 波的透射系数几乎没有影响(见图 2b、d). 而在 P 波入射的情况下, 无论是垂直入射还是斜入射, 饱和度从 99% 变化到 100% 时对 P 波的反射系数和透射系数影响都是很大的(见图 3a、c). 饱和度等于 100% 时的 P 波的反射系数和透射系数都明显低于饱和度等于 99% 时的 P 波的反射系数和透射系数.

## 5 结语

本文研究了波从不饱和土层入射到弹性土层时, 不完全饱和土层的饱和度的变化对交界面上反射系数和透射系数的影响, 并与完全饱和土情况做了对比. 数值计算表明, 即使饱和度仅仅稍微低于完全饱和情况, 其对于界面反应的改变都是很大的. 这种饱和度对界面反应的影响还与入射角和入射波频率有关. (由于文章篇幅的限制, 本文只考虑了与入射角有关的情况) 这说明在今后的研究中, 应该重视饱和度变化对地震动力响应的影响.

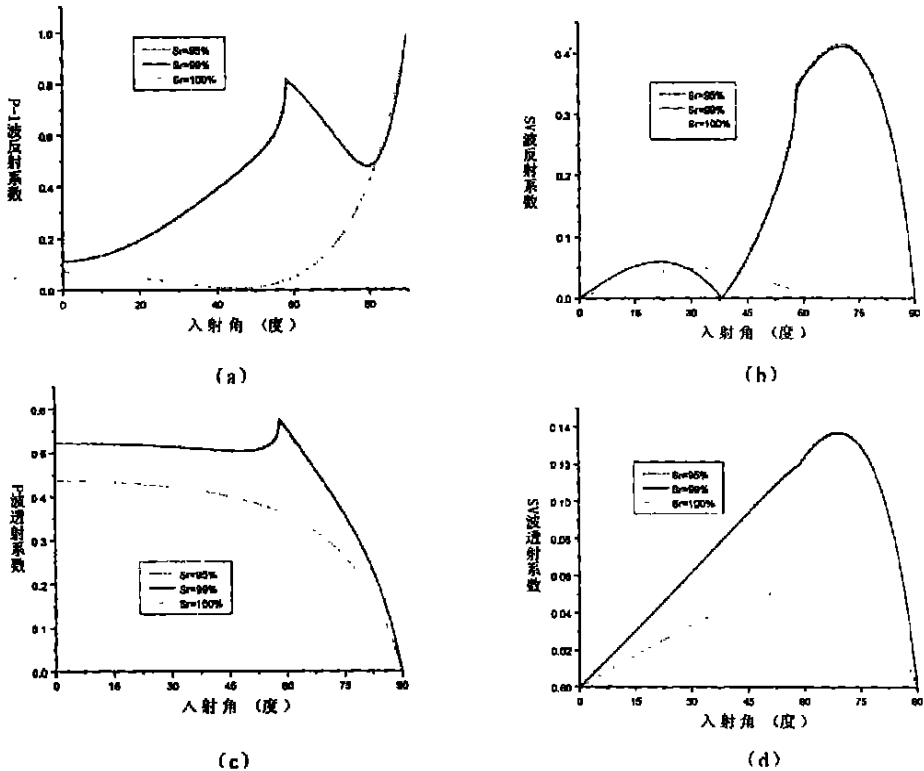


图3 P波入射时不同饱和度下反射、透射系数与入射角关系曲线

Fig. 3 Reflection and transmission coefficients induced by P wave as a function of incident angle under different saturation.

当然, 本文所涉及到的不完全饱和土还仅限于饱和度很接近于 100% 的不完全饱和土. 正如本文前面所述, 对于饱和度在此范围之外的情况, 由于问题的复杂性, 暂时还无法考虑饱和度的变化对上述界面效应的影响, 还有待于进行深入的研究.

#### [参考文献]

- [1] 赵成刚 杜修力, 崔杰. 固体 \ 流体多相孔隙介质中的波动理论及其数值模拟的进展[J]. 力学进展, 1998, 28(1): 83—92.
- [2] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000. 134.
- [3] Verrill A. . Elastic storage aquifers[A]. In: Flow Through Porous Media[C]. London: Academic Press 1969.
- [4] Chang C. S., et al. . Consolidation analysis for partly saturated clay by using an elastic-plastic effective stress-strain model[J]. Int J Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1983 (7): 39—56.
- [5] Biot M. A. . Theory of propagation of elastic wave in fluid-saturated porous soil[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1956, 28(2): 168—178.
- [6] Deresiewicz H. . The effect of boundaries wave propagation in a liquid-filled porous solid[J]. Bulletin of Seismological Society of America, 1962, 52: 595—625.
- [7] 杨宝俊. 弹性波理论[M]. 沈阳: 东北师范大学出版社, 1990.
- [8] Deresiewicz H., et al. . On uniqueness in dynamic poro-elasticity[J]. Bulletin of Seismological Society of America 1963, 53: 595—626.

- [9] Hajra S., et al. . Reflection and refraction of seismic waves incident obliquely at the boundary of a liquid-saturated porous solid[ J] .  
Bulletin of Seismological Society of America, 1982, **72**: 1509—1533.
- [10] 吴世明. 土介质中的波[ M] . 北京: 科学出版社, 1997.

## INFLUENCE OF WATER SATURATION ON SEISMIC REFLECTION AND TRANSMISSION COEFFICIENTS AT A MAINLY WATER-SATURATED POROUS SOIL INTERFACE

LI Wei-hua

(*School of Civil Engineering and Architecture,  
Northern Jiao-tong University, Beijing 100044, China*)

**Abstract:** Based on the concept of homogeneous pore fluid and Biot's theory of two-phase media, and using the model of Biot's theory to imitate imperfect saturated porous soil, the theoretical formulation of reflection and transmission coefficients at an interface between imperfect saturated porous soil and ordinary elastic soil for propagation of P wave and SV wave is developed. Numerical results show that only small difference in degrees of saturation may produce substantial influence on the coefficients at interface. The study suggests that we may carefully pay attention to the influence of water saturation on the dynamic analysis of seismic wave.

**Key word:** Homogeneous pore fluid; Biot's theory of two-phase media; Saturation; Interface effect