第44卷 第4期 地 震 工 程 学 报 Vol. 44 No. 4
2022年7月 CHINA EARTHQUAKE ENGINEERING JOURNAL July，2022

余云燕，孔嘉乐，陈进浩，等.变截面修正 Timoshenko 梁自振频率的回传射线矩阵法分析[J].地震工程学报，2022，44(4)：751-758.DOI：10.20000/j.1000-0844.20210813001
YU Yunyan，KONG Jiale，CHEN Jinhao，et al.Natural frequency of a modified Timoshenko beam with variable cross-section with the method of reverberation ray matrix[J].China Earthquake Engineering Journal，2022，44(4)：751-758.DOI：10.20000/j.1000-0844.20210813001

变截面修正 Timoshenko 梁自振频率的回传射线矩阵法分析

余云燕[1]，孔嘉乐[1]，陈进浩[2]，付艳艳[1]，李 盛[1]
（1. 兰州交通大学土木工程学院，甘肃 兰州 730070；2. 中铁西北科学研究院有限公司，甘肃 兰州 730000）

摘要：考虑剪切变形对转动惯量的影响，对经典 Timoshenko 梁理论进行修正，并基于回传射线矩阵法，将横截面线性变化的圆台均匀分为多段分段等截面等效梁，推导并求解三种经典边界（两端简支、两端固支、一端固支一端自由）条件下变截面修正 Timoshenko 梁的自振频率，进一步分析分段数目和梁长度的变化对变截面修正 Timoshenko 梁自振频率的影响；将计算结果与相同边界条件下经典 Timoshenko 梁的相应结果进行对比。研究表明：回传射线矩阵法用于分析变截面梁的自振频率时具有良好的计算精度和收敛性；相同边界条件下修正 Timoshenko 梁的自振频率小于经典 Timoshenko 梁，且梁越短粗，修正造成的影响（剪切变形对转动惯量的影响）就越大。

关键词：变截面梁；修正 Timoshenko 梁理论；回传射线矩阵法；自振频率
中图分类号：O32；TU311.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1000-0844(2022)04－0751－08
DOI：10.20000/j.1000-0844.20210813001

Natural frequency of a modified Timoshenko beam with variable cross-section with the method of reverberation ray matrix

YU Yunyan[1]，KONG Jiale[1]，CHEN Jinhao[2]，FU Yanyan[1]，LI Sheng[1]
(*1. College of Civil Engineering，Lanzhou Jiaotong University，Lanzhou 730070，Gansu，China；*
2. Northwest Research Institute CO.，Ltd. of C. R .E. C，Lanzhou 730000，Gansu，China)

Abstract：Considering the influence of shear deformation on the moment of inertia，the classical Timoshenko beam theory was modified in this paper. Based on the method of reverberation ray matrix (MRRM)，the bar with linearly varying circular cross-section was evenly divided into multiple constant section beams. The formulation was deduced for solving the natural vibration frequencies of the modified Timoshenko beam with variable cross-section under three classical boundaries (simply supported-simply supported，clamped-clamped，and clamped-free). The effects of the number of segments and the length of beam on the natural frequency of modified

---

收稿日期：2021-08-13
基金项目：甘肃省科技计划项目（21YF5GA050）；甘肃省教育厅产业支撑计划项目（2021CYZC-28）；甘肃省交通运输厅科技研发项目（2021-12）；甘肃省基础研究创新群体项目（145RJIA332，21JR7RA347）
第一作者简介：余云燕（1968－），女，浙江江山人，博士，博士生导师，教授，主要从事岩土力学、土与结构耦合动力学方面的研究。
E-mail：yuyunyan@mail.lzjtu.cn。

Timoshenko beam with variable cross-section were analyzed. The calculated results were then compared with those of the classical Timoshenko beam under the same boundary conditions. The results show that the MRRM has good accuracy and fast convergence. Under the same boundary conditions, the natural frequencies of modified Timoshenko beam are lower than those of classical Timoshenko beam, and the shorter the beam, the greater the influence of shear deformation on the moment of inertia.

Keywords: variable cross-section beam; modified Timoshenko beam theory; method of reverberation ray matrix (MRRM); natural frequency

0 引言

变截面梁在工程中应用广泛,如箱型变截面桥梁、变截面桥墩、海上风机塔筒、变截面水塔等。其中,海上风机与水塔在进行力学分析时,通常简化为部分埋入单桩顶端带有质量块的力学模型。针对这种稳定性较差的结构形式,应着重分析其动力特性。横向自振频率是反映结构动力特性的重要物理量,而变截面梁的振动方程是复杂的高阶变系数微分方程,除个别结构能求得解析解外[1],大部分结构的直接解析求解目前还做不到,因此需寻求适当方法获得变截面梁振动方程的精确解。

针对变截面梁振动方程的求解问题,国内外学者开展了许多研究。Ece 等[2]将变截面简支梁振动方程转化为空间坐标系下普通微分方程,获得了频率方程。Tong 等[3]将变截面梁等效为多段等截面微梁段,获得 Timoshenko 阶梯梁的振动方程近似解。Abrate[4]将变截面梁运动方程转化为等截面梁的运动方程,获得变截面梁近似自振频率。张廷芳[5]对带有变截面梁组合结构自振特性的计算方法进行了研究,建议用“变梁系数”计算变截面梁的单元刚度,用逐步降阶法凝聚总刚度阵。钱波等[6]利用有限差分法研究了变截面简支梁横向振动的自振频率。冯志刚等[7]通过构造矩形变截面梁动力单元和传递函数法,采用摄动法和 Laplace 变换获得梁振动频率的各阶渐进解。徐腾飞等[8]采用 Frobeniu 方法求解变截面梁的自由振动问题,但局限于特定截面的变化形式。针对完全弹性支承,闫维明等[9]基于 Bernoulli-Euler 梁理论对直接模态摄动方法进行改进,建立了求解完全弹性支承变截面梁振动方程的半解析方法。

以上对变截面梁的研究大多基于 Bernoulli-Euler 梁理论与经典 Timoshenko 梁理论。经典 Timoshenko 梁理论以弯曲变形来表达转动惯量,忽略了剪切变形带来的影响,故适用于弯曲变形为主的细长梁。针对长度较小的深梁,陈镕等[10]认为剪切变形不可忽视,主张以弯曲变形与剪切变形共同描述转动惯量,并提出修正 Timoshenko 梁理论的运动方程,研究修正带来的影响。夏呈[11]论证了修正 Timoshenko 梁理论只存在一个频谱,解决了经典 Timoshenko 梁理论存在两个频谱的争议问题[12-13]。陈治江[14]采用动力刚度法研究修正 Timoshenko 梁在有裂纹情况下动力特性的变化。陈镕等[15]研究了集中质量对无约束修正 Timoshenko 梁的正碰撞所引起的瞬态冲击响应。

经典 Timoshenko 梁理论中存在两组截止频率、相速度和群速度,其中一组为运算过程中数学计算的产物,没有实际意义,而修正 Timoshenko 梁理论中仅存在一组截止频率、相速度和群速度,物理意义更加清晰。依据修正 Timoshenko 梁理论求得的等截面梁自振频率的结果偏小[10],给结构动力设计提出了更高要求。修正 Timoshenko 梁理论考虑了剪切变形引起的转动惯量,而常见的变截面结构如桥墩、水塔等都具有短粗的特点,类比建筑结构中的深梁,其剪切变形不可忽略,故求解结构自振频率时应用修正 Timoshenko 梁理论更加适合。为此,本文基于回传射线矩阵法,将截面半径线性变化的变截面梁(即圆台)等效为多段等截面等效梁,将修正 Timoshenko 梁理论应用于变截面梁自振频率的求解中;通过具体算例,与经典 Timoshenko 梁理论进行对比,总结分析该修正对变截面梁自振频率的影响。

1 变截面修正 Timoshenko 梁回传射线矩阵法的基本原理

变截面梁(即圆台)如图 1(a)所示,其长度为 L,横截面半径随轴向坐标线性变化。假设材料均质、小变形,基于分段思想,将该变截面梁(即圆台)均匀分为 n 段,各分段长度均为 $l=L/n$,且分段数足够多。每一分段选用所截取圆台的中位线所在截

面作为该段的等效截面，如图 1(b)所示。对分段等截面等效梁进行节点编号，以英文字母或数字表示节点，以两个字母或两个数字表示连接两个节点的分段梁编号，将与分段梁有关的物理量放在上标，对该等效梁建立总体坐标系（XOY）。对每一分段梁 $j(j+1)$，引入两组笛卡尔局部坐标系：$(x,y)^{j(j+1)}$ 和 $(x,y)^{(j+1)j}$；坐标轴正方向如图 1(c)所示，其原点分别在 j 点和 $j+1$ 点，位移与剪力的正方向与局部坐标系的正方向相同，转角和弯矩正方向符合右手螺旋法则。两组局部坐标系的关系为 $x^{j(j+1)}=l-x^{(j+1)j}$，$y^{j(j+1)}=-y^{(j+1)j}$。总体坐标系和局部坐标系均为右手坐标系。经过分段处理后，每一段等效梁较粗，应按深梁考虑，且考虑剪切变形对转动惯量的影响。

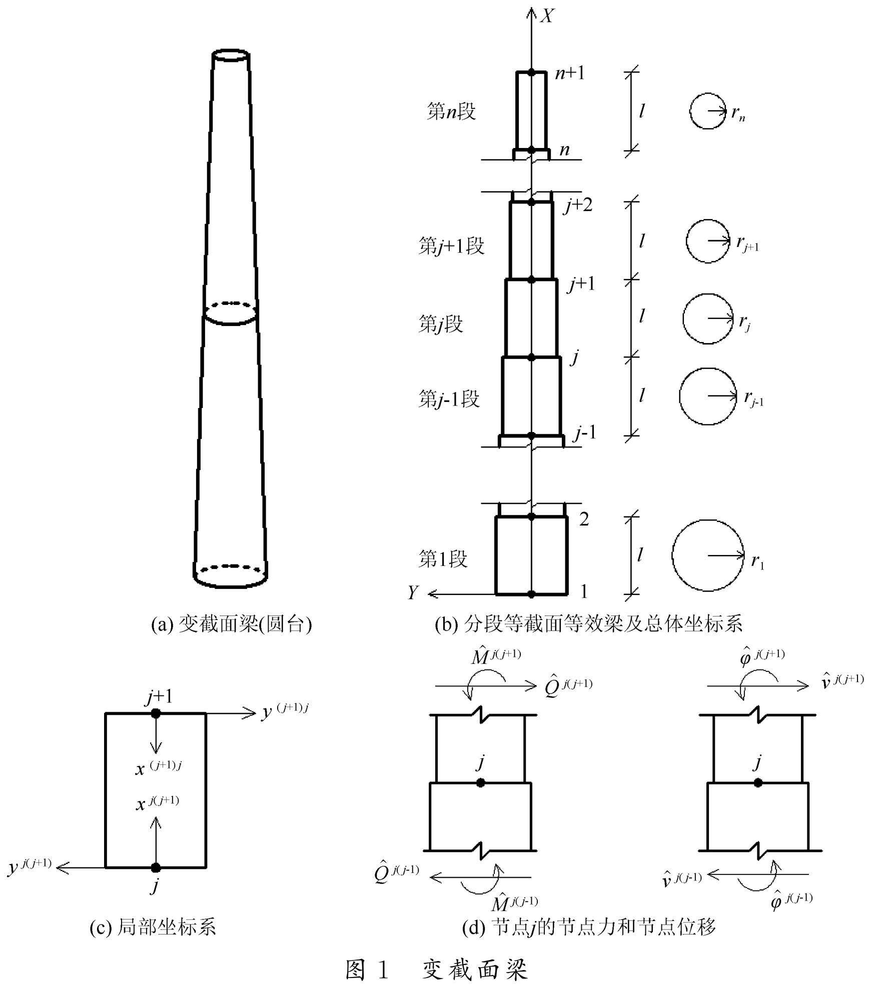

图 1　变截面梁

Fig.1　Variable cross-section beam

基于修正 Timoshenko 梁理论，在局部坐标系下，第 j 段等效梁的横向振动方程为：

$$\left.\begin{aligned}&\kappa A_j G\frac{\partial^2 \upsilon_s}{\partial x^2}=\rho A_j\frac{\partial^2(\upsilon_b+\upsilon_s)}{\partial t^2}\\&\kappa A_j G\frac{\partial \upsilon_s}{\partial x}+EI_j\frac{\partial^3 \upsilon_b}{\partial x^3}=\rho I_j\left(\frac{\partial^3 \upsilon_b}{\partial x\partial t^2}+\frac{\partial^3 \upsilon_s}{\partial x\partial t^2}\right)\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

式中：E、G、ρ、κ 分别为杨氏模量、剪切模量、密度和剪切系数；A_j 和 I_j 为第 j 段等效梁的横截面面积和截面惯性矩；υ_b 和 υ_s 分别为弯矩和剪力引起的挠度，总挠度 $\upsilon=\upsilon_b+\upsilon_s$；$t$ 表示时间；x 表示横坐标值。忽略 $\rho I_j\dfrac{\partial^3 \upsilon_s}{\partial x\partial t^2}$ 项，则式(1)退化为经典 Timoshenko 梁理论的横向振动方程。

剪力、弯矩和转角可以表示为：

$$Q=\kappa A_j G\frac{\partial \upsilon_s}{\partial x},\ M=EI_j\frac{\partial^2 \upsilon_b}{\partial x^2},\ \varphi=\frac{\partial \upsilon_b}{\partial x}\quad(2)$$

引入 Fourier 变换对，对式(1)进行 Fourier 变换并求解得：

$$\hat{\upsilon}_b(x,\omega)=a_1(\omega)e^{ik_{1j}x}+d_1(\omega)e^{-ik_{1j}x}+a_2(\omega)e^{ik_{2j}x}+d_2(\omega)e^{-ik_{2j}x}\quad(3)$$

$$\hat{\upsilon}_s(x,\omega)=g_{1j}(\omega)a_1(\omega)e^{ik_{1j}x}+g_{1j}(\omega)d_1(\omega)e^{-ik_{1j}x}+g_{2j}(\omega)a_2(\omega)e^{ik_{2j}x}+g_{2j}(\omega)d_2(\omega)e^{-ik_{2j}x}\quad(4)$$

式中：“ˆ”表示频域中的变量；ω 为自振圆频率；

$a_1(\omega)$、$a_2(\omega)$ 表示待定入射波波幅；$d_1(\omega)$、$d_2(\omega)$ 表示待定出射波波幅；g_{1j}、g_{2j} 为剪切变形与弯曲变形的比值；k_{1j}、k_{2j} 为波数，由下式计算得到：

$$k_{1j,2j}=\sqrt{\frac{(\eta+1)\dfrac{\omega^2}{c_0^2}\pm\sqrt{(\eta+1)^2\dfrac{\omega^4}{c_0^4}+4\dfrac{\omega^2}{c_0^2}\dfrac{\alpha_{1j}}{l^2}}}{2}} \tag{5}$$

对应于波数 $k_{1j,2j}$，υ_s 与 υ_b 的比值 $g_{1j,2j}$ 为：

$$g_{1j,2j}=\frac{\eta\omega^2}{c_0^2k_{1j,2j}^2-\eta\omega^2} \tag{6}$$

式中：$c_0=\sqrt{E/\rho}$，为纵波波速；$\eta=E/\kappa G$；$\alpha_{1j}=A_jl^2/I_j$。

总挠度 υ 为

$$\begin{aligned}\hat{\upsilon}(x,\omega)=&[1+g_{1j}(\omega)][a_1(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1j}x}+d_1(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1j}x}]+\\&[1+g_{2j}(\omega)][a_2(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{2j}x}+d_2(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{2j}x}]\end{aligned} \tag{7}$$

剪力、弯矩和转角在频域中的表达式为：

$$\begin{aligned}\hat{Q}(x,\omega)=&\mathrm{i}\kappa A_jG\{k_{1j}g_{1j}[a_1(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1j}x}-d_1(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1j}x}]+\\&k_{2j}g_{2j}[a_2(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{2j}x}-d_2(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{2j}x}]\}\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\hat{M}(x,\omega)=&-EI_j\{k_{1j}^2[a_1(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1j}x}+d_1(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1j}x}]+\\&k_{2j}^2[a_2(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{2j}x}+d_2(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{2j}x}]\}\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(x,\omega)=&\mathrm{i}k_{1j}[a_1(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1j}x}-d_1(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1j}x}]+\\&\mathrm{i}k_{2j}[a_2(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{2j}x}-d_2(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{2j}x}]\end{aligned} \tag{10}$$

在频域中对所有节点建立力平衡和位移协调条件，以边节点和中间节点 j 为例[图 1(d)]，有：

边节点 1

$$\text{两端简支}\ \begin{matrix}\hat{M}^{12}(0,\omega)=0\\ \hat{\upsilon}^{12}(0,\omega)=0\end{matrix}；\ \text{两端固支}\ \begin{matrix}\hat{\varphi}^{12}(0,\omega)=0\\ \hat{\upsilon}^{12}(0,\omega)=0\end{matrix}；$$

$$\text{一端固支一端自由}\ \begin{matrix}\hat{\varphi}^{12}(0,\omega)=0\\ \hat{\upsilon}^{12}(0,\omega)=0\end{matrix} \tag{11-1}$$

边节点 $n+1$

$$\begin{aligned}&\text{两端简支}\ \begin{matrix}\hat{M}^{(n+1)n}(0,\omega)=0\\ \hat{\upsilon}^{(n+1)n}(0,\omega)=0\end{matrix}；\\&\text{两端固支}\ \begin{matrix}\hat{\varphi}^{(n+1)n}(0,\omega)=0\\ \hat{\upsilon}^{(n+1)n}(0,\omega)=0\end{matrix}；\\&\text{一端固支一端自由}\ \begin{matrix}\hat{M}^{(n+1)n}(0,\omega)=0\\ \hat{Q}^{(n+1)n}(0,\omega)=0\end{matrix}\end{aligned} \tag{11-2}$$

中间节点 j

$$\begin{aligned}&\hat{Q}^{j(j-1)}(0,\omega)-\hat{Q}^{j(j+1)}(0,\omega)=0\\&\hat{M}^{j(j-1)}(0,\omega)+\hat{M}^{j(j+1)}(0,\omega)=0\\&\hat{\upsilon}^{j(j-1)}(0,\omega)=-\hat{\upsilon}^{j(j+1)}(0,\omega)\\&\hat{\varphi}^{j(j-1)}(0,\omega)=\hat{\varphi}^{j(j+1)}(0,\omega)\end{aligned} \tag{11-3}$$

将式(7)～(10)代入式(11)，整理合并为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}^1&=\boldsymbol{S}^1\boldsymbol{a}^1\\ \boldsymbol{d}^j&=\boldsymbol{S}^j\boldsymbol{a}^j\\ \boldsymbol{d}^{n+1}&=\boldsymbol{S}^{n+1}\boldsymbol{a}^{n+1}\end{aligned} \tag{12}$$

式中：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}^1=[a_1^{12}\quad a_2^{12}]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{d}^1=[d_1^{12}\quad d_2^{12}]^{\mathrm{T}}\\&\text{两端简支}\ \boldsymbol{S}^1=\begin{bmatrix}1+g_1 & 1+g_2\\ k_1^2 & k_2^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-(1+g_1) & -(1+g_2)\\ -k_1^2 & -k_2^2\end{bmatrix}\\&\text{两端固支}\ \boldsymbol{S}^1=\begin{bmatrix}1+g_1 & 1+g_2\\ -\mathrm{i}k_1 & -\mathrm{i}k_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-(1+g_1) & -(1+g_2)\\ -\mathrm{i}k_1 & -\mathrm{i}k_2\end{bmatrix}\\&\text{一端固支一端自由}\ \boldsymbol{S}^1=\begin{bmatrix}1+g_1 & 1+g_2\\ -\mathrm{i}k_1 & -\mathrm{i}k_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-(1+g_1) & -(1+g_2)\\ -\mathrm{i}k_1 & -\mathrm{i}k_2\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{13-1}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}^j=[a_1^{j(j-1)}\quad a_2^{j(j-1)}\quad a_1^{j(j+1)}\quad a_2^{j(j+1)}]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{d}^j=[d_1^{j(j-1)}\quad d_2^{j(j-1)}\quad d_1^{j(j+1)}\quad d_2^{j(j+1)}]^{\mathrm{T}}\\&\boldsymbol{S}^j=\begin{bmatrix}r_{j-1}^2k_{2j-3}g_{2j-3} & r_{j-1}^2k_{2j-2}g_{2j-2} & -r_j^2k_{2j-1}g_{2j-1} & -r_j^2k_{2j}g_{2j}\\ r_{j-1}^4k_{2j-3}^2 & r_{j-1}^4k_{2j-2}^2 & r_j^4k_{2j-1}^2 & r_j^4k_{2j}^2\\ 1+g_{2j-3} & 1+g_{2j-2} & 1+g_{2j-1} & 1+g_{2j}\\ -k_{2j-3} & -k_{2j-2} & k_{2j-1} & k_{2j}\end{bmatrix}^{-1}\\&\begin{bmatrix}r_{j-1}^2k_{2j-3}g_{2j-3} & r_{j-1}^2k_{2j-2}g_{2j-2} & -r_j^2k_{2j-1}g_{2j-1} & -r_j^2k_{2j}g_{2j}\\ -r_{j-1}^4k_{2j-3}^2 & -r_{j-1}^4k_{2j-2}^2 & -r_j^4k_{2j-1}^2 & -r_j^4k_{2j}^2\\ -(1+g_{2j-3}) & -(1+g_{2j-2}) & -(1+g_{2j-1}) & -(1+g_{2j})\\ -k_{2j-3} & -k_{2j-2} & k_{2j-1} & k_{2j}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{13-2}$$

$$\boldsymbol{a}^{n+1}=\left[a_{2n-1}^{(n+1)n}\quad a_{2n}^{(n+1)n}\right]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{d}^{n+1}=\left[d_{2n-1}^{(n+1)n}\quad d_{2n}^{(n+1)n}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\text{两端简支}\ \boldsymbol{S}^{n+1}=\begin{bmatrix}1+g_{2n-1} & 1+g_{2n}\\ k_{2n-1}^{2} & k_{2n}^{2}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-(1+g_{2n-1}) & -(1+g_{2n})\\ -k_{2n-1}^{2} & -k_{2n}^{2}\end{bmatrix}$$

$$\text{两端固支}\ \boldsymbol{S}^{n+1}=\begin{bmatrix}1+g_{2n-1} & 1+g_{2n}\\ \mathrm{i}k_{2n-1} & \mathrm{i}k_{2n}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-(1+g_{2n-1}) & -(1+g_{2n})\\ -\mathrm{i}k_{2n-1} & -\mathrm{i}k_{2n}\end{bmatrix} \tag{13-3}$$

$$\text{一端固支一端自由}\ \boldsymbol{S}^{n+1}=\begin{bmatrix}k_{2n-1}^{2} & k_{2n}^{2}\\ \mathrm{i}k_{2n-1}g_{2n-1} & \mathrm{i}k_{2n}g_{2n}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-k_{2n-1}^{2} & -k_{2n}^{2}\\ -\mathrm{i}k_{2n-1}g_{2n-1} & -\mathrm{i}k_{2n}g_{2n}\end{bmatrix}$$

式(13)中:$\boldsymbol{a}^1$、$\boldsymbol{a}^j$、$\boldsymbol{a}^{n+1}$ 表示节点1、节点 j 和节点 $n+1$ 的局部入射波波幅向量;$\boldsymbol{d}^1$、$\boldsymbol{d}^j$、$\boldsymbol{d}^{n+1}$ 表示节点 1、节点 j 和节点 $n+1$ 的局部出射波波幅向量;$\boldsymbol{S}^1$、$\boldsymbol{S}^j$、$\boldsymbol{S}^{n+1}$ 表示节点 1、节点 j 和节点 $n+1$ 的局部散射矩阵。

将所有节点的局部出射波波幅向量 $\boldsymbol{d}^j$ 和局部入射波波幅向量 $\boldsymbol{a}^j$ 组集到总体矩阵 $\boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 中,有

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{a} \tag{14}$$

式中:$\boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 表示总体出射波波幅向量和总体入射波波幅向量;$\boldsymbol{S}$ 表示总体散射矩阵。

当一个出射波由梁单元 $j(j+1)$ 的 j 点产生,沿着梁单元向 $j+1$ 点传播时,从 $j+1$ 点这一端来看,该波为入射波,所以梁单元 $j(j+1)$ 的入射波波幅向量 $\boldsymbol{a}^{j(j+1)}$ 和出射波波幅向量 $\boldsymbol{d}^{(j+1)j}$ 之间有一个相位关系。引入传播矩阵 $\boldsymbol{P}^{j(j+1)}$,有 $\boldsymbol{a}^{j(j+1)}=\boldsymbol{P}^{j(j+1)}\boldsymbol{d}^{(j+1)j}$,其中 $\boldsymbol{P}^{j(j+1)}=\mathrm{diag}\{-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1j}l^{j(j+1)}}\quad -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{2j}l^{j(j+1)}}\}$,$l^{j(j+1)}$ 为梁单元 $j(j+1)$ 的长度,diag{…} 表示对角矩阵。

将向量 $\boldsymbol{a}^{j(j+1)}$ 组集到 $\boldsymbol{a}^j$ 中,并进一步组集到整体入射波波幅向量 $\boldsymbol{a}$ 中,$P^{j(j+1)}$ 与 $d^{(j+1)j}$ 也同样组集到总体传播矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和总体出射波波幅向量 $\tilde{\boldsymbol{d}}$ 中,有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{d}}$,$\tilde{\boldsymbol{d}}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 只是元素的排列顺序不同,里面的元素全部相同。引入置换矩阵 $\boldsymbol{U}$,其分量仅有 0,1 元素,以调整 $\tilde{\boldsymbol{d}}$ 中各元素的位置,使其与 $\boldsymbol{a}$ 中的元素相对应,有

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}\boldsymbol{d} \tag{15}$$

联立求解式(14)和式(15)得:

$$[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}]\boldsymbol{d}=0 \tag{16}$$

式中:$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}$ 为回传射线矩阵;$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。

要得到非零的出射波波幅矩阵 $\boldsymbol{d}$,则$[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}]$的行列式必须等于零,从而得到变截面梁对应等效梁的自振频率 $\omega_N(N=1,2,\cdots,\infty)$ 的特征方程为

$$\det[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}(\omega_n)]=0 \tag{17}$$

式中:det[…]表示行列式。

当图 1(b)中的分段数 $n=1$ 时,即将圆台简化为圆柱体,成为等截面梁,进一步推导得到简支边界条件下修正 Timoshenko 梁自振频率的特征方程为

$$(1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k_1L})(1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k_2L})=0 \tag{18}$$

利用 Euler 公式将其展开,并令实部和虚部分别等于零,得到简支边界条件下修正 Timoshenko 梁自振时波数的解析表达式为:

$$k_{1,2}=\frac{N^*-1}{L}\pi,\ N^*=1,2,3,4\cdots \tag{19}$$

式中:N^* 为阶数;L 为等截面梁总长。

将式(19)代入式(5)中,得到简支边界条件下等截面修正 Timoshenko 梁自振频率 ω_{N^*} 的解析表达式为

$$\omega_{N^*}=\frac{(N^*-1)^2c_0^2\pi^2}{L\sqrt{(\eta+1)(N^*-1)^2\pi^2+\alpha_1}},\ N^*=1,2,3,4\cdots \tag{20}$$

其他边界条件(如两端固支、一端固支一端自由)情形下,等截面梁或变截面梁的分段数 $n>1$ 时,采用黄金分割法搜索其自振频率的数值解。

2 计算方法验证

2.1 分段数对计算精度的影响

为探究分段数目 n 对计算精度造成的影响,设分段数 $n=1$、2、4、8、16、32,利用回传射线矩阵法(Method of Reverberation Ray Matrix,MRRM)计算前 8 阶自振频率,并利用 Midas 有限元结果对本文结果进行验证。有限元建模中,采用 100 个梁单元。梁的计算参数与文献[11]完全相同(表 1)。

表 1　梁的计算参数[11]

Table 1　Parameters for the beam[11]

弹性模量 E/Pa	泊松比 μ	截面剪切系数 κ	材料密度 ρ /(kg·m^{-3})	端部直径 d/m	梁长 L/m
2.1×10^{11}	0.3	0.9	7 900	0.02、0.01	1

在两端简支、两端固支和一端固支一端自由三种边界条件下，基于回传射线矩阵法（MRRM）求得不同分段数时的自振频率，与有限元法（Finite Element Method，FEM）计算结果进行对比，结果如表2所列。由表2可见，随着分段数的增加计算精度显著提高，当分段数为16时已具备极高精度；在算力允许的情况下，选择分段数为32可小幅度提升计算精度，但计算时长翻倍。

表2 MRRM与FEM求得自振频率对比

Table 2 Comparison between natural frequencies obtained by MRRM and FEM

边界条件	阶数	自振频率/Hz						
		FEM	MRRM					
			$N=1$	$N=2$	$N=4$	$N=8$	$N=16$	$N=32$
两端简支	1	28.5	30.4	27.0	28.1	28.4	28.5	28.5
	2	119.3	121.3	124.2	117.5	118.9	119.2	119.3
	3	267.2	272.7	259.2	263.6	266.0	266.8	266.9
	4	473.0	483.8	483.1	482.5	470.6	472.1	472.4
	5	736.7	754.2	729.0	728.2	732.4	734.8	735.3
	6	1 057.61	1 082.86	1 068.51	1 047.76	1 050.39	1 054.12	1 054.88
	7	1 435.11	1 468.84	1 433.46	1 429.88	1 428.54	1 429.17	1 430.22
	8	1 868.37	1 910.97	1 872.42	1 874.80	1 877.50	1 858.84	1 860.25
两端固支	1	67.55	68.77	65.13	68.17	67.80	67.61	67.56
	2	184.96	189.30	192.13	184.93	185.52	185.09	184.95
	3	361.18	370.38	353.60	354.89	361.93	361.31	361.05
	4	595.28	610.74	607.59	606.58	595.66	595.16	594.76
	5	886.70	909.62	881.75	886.80	885.32	885.95	885.40
	6	1 234.73	1 266.03	1 246.77	1 225.96	1 227.46	1 232.74	1 232.06
	7	1 638.61	1 678.83	1 641.28	1 626.01	1 623.53	1 634.46	1 633.68
	8	2 097.29	2 146.73	2 101.12	2 104.71	2 104.77	2 089.87	2 089.06
一端固支一端自由	1	19.0	10.8	16.2	18.2	18.8	18.9	19.0
	2	80.1	67.7	66.2	76.3	79.1	79.9	80.1
	3	198.9	189.5	191.1	189.0	196.3	198.2	198.7
	4	375.3	370.6	353.7	354.9	370.3	373.9	374.9
	5	609.6	611.2	608.1	605.6	601.4	606.6	608.6
	6	901.09	910.44	882.33	886.50	888.60	896.95	899.22
	7	1 249.18	1 267.37	1 247.97	1 226.74	1 228.85	1 242.77	1 245.84
	8	1 653.11	1 680.86	1 642.70	1 627.35	1 623.94	1 643.52	1 647.45

2.2 梁长度的影响

经典Timoshenko梁理论与修正Timoshenko梁理论的区别在于横向运动方程中是否考虑了剪切变形对转动惯量的影响。在截面形式和尺寸不变的情况下，剪切变形与梁的长度密切相关，梁的长度越短，剪切变形越不可忽视，“修正”带来的影响就越大。算例分析时，梁两端截面直径保持不变（分别为0.02 m和0.01 m），改变梁长度L（分别为0.5 m、0.25 m和0.1 m），其他计算参数如表1所列。表3～5分别给出了分段数$n=32$时，两端简支、两端固支和一端固支一端自由三种边界条件下经典Timoshenko梁（C-T）的自振频率$\omega_{\mathrm{C}r}$和修正Timoshenko梁（M-T）的自振频率$\omega_{\mathrm{M}r}$；并以ζ值来评估修正对自振频率的影响：$\zeta_r=100\times(\omega_{\mathrm{C}r}-\omega_{\mathrm{M}r})/\omega_{\mathrm{C}r}$，$\zeta$值越大，修正对自振频率的影响越大。

表3 两端简支边界条件下变截面经典Timoshenko梁与修正Timoshenko梁的自振频率

Table 3 Natural frequencies of C-T and M-T with variable cross section under simply supported boundary condition

阶数	$L=0.5$ m			$L=0.25$ m			$L=0.1$ m		
r	$\omega_{\mathrm{C}r}$/Hz	$\omega_{\mathrm{M}r}$/Hz	ζ_r/%	$\omega_{\mathrm{C}r}$/Hz	$\omega_{\mathrm{M}r}$/Hz	ζ_r/%	$\omega_{\mathrm{C}r}$/Hz	$\omega_{\mathrm{M}r}$/Hz	ζ_r/%
1	114.0	114.0	0.00	454.49	454.48	0.00	2 775.48	2 774.86	0.02
2	475.70	475.70	0.00	1 879.49	1 879.30	0.01	10 888.91	10 856.62	0.30
3	1 060.47	1 060.40	0.00	4 131.46	4 129.48	0.05	22 314.58	22 086.27	1.02
4	1 867.10	1 866.90	0.01	7 142.33	7 132.64	0.14	35 842.07	35 083.75	2.12
5	2 887.32	2 886.63	0.02	10 811.41	10 779.89	0.29	50 588.10	48 888.23	3.36
6	4 110.68	4 108.73	0.05	15 035.23	14 956.42	0.52	66 019.52	62 990.09	4.59
7	5 525.20	5 520.59	0.08	19 717.21	19 553.12	0.83	81 824.38	77 149.39	5.71
8	7 118.05	7 108.46	0.13	24 772.36	24 473.38	1.21	97 815.64	91 263.26	6.70

表 4　两端固支边界条件下变截面经典 Timoshenko 梁与修正 Timoshenko 梁的自振频率

Table 4　Natural frequencies of C-T and M-T with variable cross section under fixed supported boundary condition

阶数	L=0.5 m			L=0.25 m			L=0.1 m		
r	w_{Cr}/Hz	w_{Mr}/Hz	ζ_r/%	w_{Cr}/Hz	w_{Mr}/Hz	ζ_r/%	w_{Cr}/Hz	w_{Mr}/Hz	ζ_r/%
1	269.39	269.39	0.00	1 064.31	1 064.28	0.00	6 151.27	6 145.24	0.10
2	734.49	734.48	0.00	2 857.69	2 857.03	0.02	15 258.03	15 185.64	0.47
3	1 426.11	1 426.03	0.01	5 442.78	5 438.48	0.08	26 872.48	26 561.14	1.16
4	2 333.59	2 333.23	0.02	8 709.02	8 692.62	0.19	39 993.22	39 176.09	2.04
5	3 446.71	3 445.49	0.04	12 553.28	12 506.01	0.38	54 090.08	52 450.45	3.03
6	4 753.61	4 750.68	0.06	16 878.23	16 776.59	0.60	68 823.80	66 044.36	4.04
7	6 241.59	6 235.14	0.10	21 598.30	21 402.97	0.90	83 970.56	79 771.86	5.00
8	7 897.44	7 884.80	0.16	26 641.05	26 305.47	1.26	99 352.15	93 532.86	5.86

表 5　一端固支一端自由变截面经典 Timoshenko 梁与修正 Timoshenko 梁的自振频率

Table 5　Natural frequencies of C-T and M-T with variable cross section under one end clamped and one end free boundary condition

阶数	L=0.5 m			L=0.25 m			L=0.1 m		
r	w_{Cr}/Hz	w_{Mr}/Hz	ζ_r/%	w_{Cr}/Hz	w_{Mr}/Hz	ζ_r/%	w_{Cr}/Hz	w_{Mr}/Hz	ζ_r/%
1	75.79	75.79	0.00	302.41	302.41	0.00	1 857.78	1 857.60	0.01
2	319.35	319.35	0.00	1 263.36	1 263.30	0.00	7 359.38	7 349.40	0.14
3	789.74	789.73	0.00	3 081.63	3 080.81	0.03	16 716.29	16 621.08	0.57
4	1 482.39	1 482.30	0.01	5 679.59	5 674.72	0.09	28 543.50	28 166.84	1.32
5	2 391.23	2 390.84	0.02	8 966.40	8 948.48	0.20	41 947.33	40 990.54	2.28
6	3 506.26	3 505.05	0.03	12 839.04	12 790.23	0.38	56 337.01	54 457.71	3.34
7	4 815.93	4 812.88	0.06	17 200.07	17 091.86	0.63	71 348.63	68 216.01	4.39
8	6 307.69	6 301.03	0.11	21 962.85	21 695.93	1.22	86 728.40	82 072.20	5.37

由表 3～5 可知：(1)梁的长度不变，低阶时由经典 Timoshenko 梁理论与修正 Timoshenko 梁理论得到的自振频率比较接近，随着阶数的增加，二者差值逐渐增加，且经典 Timoshenko 梁理论计算得到的自振频率大于修正 Timoshenko 梁理论的结果；(2)梁长度逐渐减小，两种梁理论得到的自振频率差值逐渐增大，阶数越高二者差值就越大；(3)梁越短粗，剪切变形对转动惯量的影响就越显著；(4)基于回传射线矩阵法，并考虑剪切变形对转动惯量的影响，将变截面梁简化为多段等截面梁的计算方法正确，具有较好的计算精度和和收敛性。

3　结论

(1) 基于修正 Timoshenko 梁理论，利用分段思想，采用回传射线矩阵法，通过节点力平衡和位移协调条件建立回传射线矩阵，推出截面半径线性变化的变截面修正 Timoshenko 梁横向自振频率的精确求解方法。数值算例表明该方法具有较好的计算精度和收敛性。

(2) 基于经典 Timoshenko 梁理论得到的自振频率大于修正 Timoshenko 梁，且随着阶数增加，两者差值增大；梁越短粗，剪切变形对转动惯量的影响就越大。

(3) 修正 Timoshenko 梁理论更适合于深梁。本方法还可以推广至任意变截面梁以及耦合振动计算。

参考文献(References)

[1]　卡姆克 E.常微分方程手册[M].张鸿林，译.北京：科学出版社，1977.
KAMKE E. Handbook of ordinary differential equations[M]. ZHANG Honglin，tr.Beijing：Science Press，1977.

[2]　ECE M C，AYDOGDU M，TASKIN V. Vibration of a variable cross-section beam[J]. Mechanics Research Communications，2007，34(1)：78-84.

[3]　TONG X，TABARROK B，YEH K Y. Vibration analysis of Timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section[J].Journal of Sound and Vibration，1995，186(5)：821-835.

[4]　ABRATE S. Vibration of non-uniform rods and beams[J].Journal of Sound and Vibration，1995，185(4)：703-716.

[5]　张廷芳.带有变截面梁组合结构自振特性计算[J].大连工学院学报，1982，22(3)：127-135.
ZHANG Tingfang. The calculation of vibration behavior for composite structure with variable sectional beams and bars[J].Journal of Dalian Institute of Technology，1982，22(3)：127-135.

[6]　钱波，岳华英.变截面梁横向振动固有频率数值计算[J].力学

与实践,2011,33(6):45-49.

QIAN Bo,YUE Huaying.Numerical calculation of natural frequency of transverse vibration of non-uniform beams[J].Mechanics in Engineering,2011,33(6):45-49.

[7] 冯志刚,周建平.矩形变截面梁横向振动自振频率的传递函数渐近解法[J].强度与环境,1998,25(1):24-31.

FENG Zhigang,ZHOU Jianping.The asymptotic method for free vibration analysis of wedge beam by distributed transfer function method[J].Structure& Environment Engineering,1998,25(1):24-31.

[8] 徐腾飞,向天宇,赵人达.变截面 Euler-Bernoulli 梁在轴力作用下固有振动的级数解[J].振动与冲击,2007,26(11):99-101,186.

XU Tengfei,XIANG Tianyu,ZHAO Renda.Series solution of natural vibration of the variable cross-section Euler-Bernoulli beam under axial force[J].Journal of Vibration and Shock,2007,26(11):99-101,186.

[9] 闫维明,石鲁宁,何浩祥,等.完全弹性支承变截面梁动力特性半解析解[J].振动与冲击,2015,34(14):76-84.

YAN Weiming,SHI Luning,HE Haoxiang,et al.Semi-analytical solution of dynamic characteristics of non-uniform beams with complete elastic supports[J].Journal of Vibration and Shock,2015,34(14):76-84.

[10] 陈镕,万春风,薛松涛,等.Timoshenko 梁运动方程的修正及其影响[J].同济大学学报(自然科学版),2005,33(6):711-715.

CHEN Rong,WAN Chunfeng,XUE Songtao,et al.Modification of motion equation of Timoshenko beam and its effect[J].Journal of Tongji University (Natural Science),2005,33(6):711-715.

[11] 夏呈.修正铁摩辛柯梁受迫振动响应分析及其应用[D].南京:东南大学,2017.

XIA Cheng.The analysis of forced vibration response of modified Timoshenko beam theory and its application[D].Nanjing:Southeast University,2017.

[12] DOWNS B.Transverse vibration of a uniform,simply supported Timoshenko beam without transverse deflection[J].Journal of Applied Mechanics,1976,43:671-674.

[13] STEPHEN N G.On the variation of Timoshenko's shear coefficient with frequency[J].Journal of Applied Mechanics,1978,45(3):695-697.

[14] 陈治江.基于动力刚度法裂纹修正铁木辛柯梁研究[D].重庆:重庆交通大学,2019.

CHEN Zhijiang.Study on the modified Timoshenko cracked beam based on dynamic stiffness method[D].Chongqing:Chongqing Jiaotong University,2019.

[15] 陈镕,万春风,薛松涛,等.无约束修正 Timoshenko 梁的冲击问题[J].力学学报,2006,38(2):262-269.

CHEN Rong,WAN Chunfeng,XUE Songtao,et al.Impact response of an unrestrained modified Timoshenko beam[J].Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics,2006,38(2):262-269.