

苗雨, 丁琪皓, 陈浙, 等. 基于 SVM 与 SRM 耦合的抗剪强度参数随机场模拟[J]. 地震工程学报, 2021, 43(2): 375-379. doi: 10.3969/j.issn.1000-0844.2021.02.375

MIAO Yu, DING Qihao, CHEN Zhe, et al. Random Field Simulation of Soil Shear Strength Parameters Based on SVM and SRM Coupling[J]. China Earthquake Engineering Journal, 2021, 43(2): 375-379. doi: 10.3969/j.issn.1000-0844.2021.02.375

基于 SVM 与 SRM 耦合的抗剪强度参数随机场模拟

苗 雨¹, 丁琪皓¹, 陈 浙¹, 郑俊杰¹, 李继能²

(1. 华中科技大学 土木工程与力学学院, 湖北 武汉 430074; 2. 武汉华中科大土木工程检测中心, 湖北 武汉 430074)

摘要: 实验数据表明土体参数具有很大的空间变异性, 而随机场理论为模拟土体参数空间变异性提供了有效途径。因为传统的谱表示法(SRM)无法正确模拟多维多元随机场参数间的互相关性, 提出支持向量机法(SVM)与 SRM 耦合的方法。SVM 是基于统计学习理论和结构风险最小化原理基础上的通用机器学习方法, 它在解决小样本、非线性和高维模式识别问题中表现出诸多优势。以土体抗剪强度参数: 黏聚力 c 和内摩擦角 φ 为例, 通过实验证明二者之间存在天然负相关性, 即为二维二元随机场。结果表明, 在样本数量较少的条件下, 基于耦合算法模拟随机场不仅能有效地描述变量的自相关性, 而且能够准确地描述变量间的互相关性, 为解决小样本条件下模拟多维多元随机场提供了一种有效的方法。

关键词: 谱表示法; 支持向量机; 随机场; 互相关性

中图分类号: TU443

文献标志码: A

文章编号: 1000-0844(2021)02-0375-05

DOI: 10.3969/j.issn.1000-0844.2021.02.375

Random Field Simulation of Soil Shear Strength Parameters Based on SVM and SRM Coupling

MIAO Yu¹, DING Qihao¹, CHEN Zhe¹, ZHENG Junjie¹, LI Jineng²

(1. School of Civil Engineering and Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, Hubei, China;
2. Wuhan Huazhong University of Science and Technology Civil Engineering Testing Center, Wuhan 430074, Hubei, China)

Abstract: Previous experimental data show that the soil parameters have great spatial variability, which can be effectively simulated by the random field theory. The traditional spectral representation method (SRM) can not accurately simulate the cross-correlation between the parameters of multidimensional-multivariate random field. A support vector machine (SVM) and SRM coupling method was proposed in this paper. As a general machine learning method based on statistical learning theory and the principle of structural risk minimization, SVM has many advantages in solving the problems such as limited training data, nonlinear and high-dimensional pattern recognition. The shear strength parameters of soil (cohesion c and internal friction angle φ) were taken as an example, and the experiment proved that there is a natural negative correlation between them. The results showed that the proposed method can not only effectively describe the auto-correlation of variables, but also accurately describe the cross-correlation between variables under limited training data. The study provides an effective method to simulate multidimensional-multi-

收稿日期: 2016-04-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(51378234); 华中科技大学优青培育项目(2014YQ008)

第一作者简介: 苗 雨(1979—), 男, 教授, 主要从事计算岩土力学方面的研究。E-mail: my_miaoyu@163.com。

variate random fields with a limited training data.

Keywords: spectral representation method (SRM); support vector machine; random field; cross-correlation

0 引言

工程经验表明,土体参数即使在同质层中也会表现出显著差异。这种不确定性在传统的计算中经常会被忽略,而采用均值代替。在大多数情况下,这种处理方法并不准确甚至是错误的。因此如何正确地模拟土体参数的空间变异性是一个富有挑战性的问题。

随机场理论为土体空间变异性的模拟提供了有效途径。目前关于随机场模拟分析方面的文献较多,如 Vanmarcke 等^[1]提出随机场模型,视土层为统计均匀的前提下,运用方差、方差折减函数、相关函数和波动范围等随机场的数字特征来描述土性参数的空间分布。Griffiths 等^[2-4]将蒙特卡罗法(MCS)用于随机场分析中,对比考虑空间变异性后结构的失效概率变化。吴振君等^[5]将随机场模拟和区域化变量理论的 Kriging 方法结合,建立约束随机场。闫澍旺等^[6]研究了随机场方差折减函数的确定原则,并通过算例说明了折减原则的合理性。史良胜等^[7]研究了 Karhunen-Loeve(KL)展开在土性参数随机场模拟中的应用。Shinozuka 等^[8-9]比较了 SRM 与 KL 方法在随机场离散中的优劣,证明在相关距离较短时 KL 方法收敛难度较大。尽管上述方法在岩土工程随机场分析中得到了一定的应用,但仍然存在很多不足。如方差折减法需要大量数据确定其折减函数。MCS 方法需要更大数量级的样本数量和计算时间,计算代价过大。KL 方法需要解决 Fredholm 积分方程问题。更重要的是,在实际工程中土体参数一般为多维多变量随机场,而传统的随机场方法仅考虑参数的自相关性,即仅解决多维单变量问题,并未考虑到参数间的互相关性。

本文将 SRM 与 SVM 结合,提出一种能兼顾参数自相关性与互相关性的随机场模拟方法,并在此基础上研究土体抗剪强度参数随机场模拟问题。

1 基本理论

1.1 谱表示法

谱表示法将随机场离散为 N_1 个具有随机相位角的三角函数,一维随机场公式:

$$\hat{f}(x_1) = \sqrt{2} \sum_{i=0}^{N_1-1} A_i \cos(\kappa_{1i} x_1 + \varphi_i) \quad (1)$$

式中: $\varphi_i (i=1, \dots, N_1)$ 为在 $[0, 2\pi]$ 区间服从标准分布的独立随机相位角,频率设定为:

$$\kappa_{1i} = i\Delta\kappa_1 = i\frac{\kappa_{1u}}{N_1}, i=1, \dots, N_1 \quad (2)$$

式中: κ_{1u} 为截断波数。幅值 A_i 可用下式确定:

$$A_0 = 0, A_i = \sqrt{2S_{f_0}(\kappa_{1i})\Delta\kappa_1}, i=1, \dots, N_1 \quad (3)$$

其中: S_{f_0} 为非负函数 κ_1 的功率谱密度函数。式(1)的模拟过程构成了随机场的频谱表示。

当随机场为二维或三维时,式(1)改写为以下形式:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x_1, x_2) = & \sqrt{2} \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} [A_{ij} \cos(\kappa_{1i}x_1 + \kappa_{2j}x_2 + \varphi_{ij}^{(1)}) + \\ & \tilde{A}_{ij} \cos(\kappa_{1i}x_1 - \kappa_{2j}x_2 + \varphi_{ij}^{(2)})] \end{aligned} \quad (4)$$

和

$$\begin{aligned} \hat{f}(x_1, x_2, x_3) = & \sqrt{2} \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \sum_{k=0}^{N_3-1} [A_{ijk} \cos(\kappa_{1i}x_1 + \kappa_{2j}x_2 + \\ & \kappa_{3k}x_3 + \varphi_{ijk}^{(1)}) + \tilde{A}_{ijk} \cos(\kappa_{1i}x_1 + \kappa_{2j}x_2 - \kappa_{3k}x_3 + \\ & \varphi_{ijk}^{(3)}) + \tilde{A}_{ijk} \cos(\kappa_{1i}x_1 - \kappa_{2j}x_2 + \kappa_{3k}x_3 + \varphi_{ijk}^{(3)}) + \\ & \tilde{A}_{ijk} \cos(\kappa_{1i}x_1 - \kappa_{2j}x_2 - \kappa_{3k}x_3 + \varphi_{ijk}^{(4)})] \end{aligned} \quad (5)$$

式中:

$$A_{ij} = \sqrt{2S_{f_0 f_0}(\kappa_{1i}, \kappa_{2j})\Delta\kappa_1\Delta\kappa_2} \quad (6)$$

$$\tilde{A}_{ij} = \sqrt{2S_{f_0 f_0}(\kappa_{1i}, -\kappa_{2j})\Delta\kappa_1\Delta\kappa_2} \quad (7)$$

$$A_{ijk} = \sqrt{2S_{f_0 f_0 f_0}(\kappa_{1i}, \kappa_{2j}, \kappa_{3k})\Delta\kappa_1\Delta\kappa_2\Delta\kappa_3} \quad (8)$$

$$\tilde{A}_{ijk} = \sqrt{2S_{f_0 f_0 f_0}(\kappa_{1i}, -\kappa_{2j}, -\kappa_{3k})\Delta\kappa_1\Delta\kappa_2\Delta\kappa_3} \quad (9)$$

$$\tilde{A}_{ijk} = \sqrt{2S_{f_0 f_0 f_0}(-\kappa_{1i}, \kappa_{2j}, \kappa_{3k})\Delta\kappa_1\Delta\kappa_2\Delta\kappa_3} \quad (10)$$

$$\tilde{A}_{ijk} = \sqrt{2S_{f_0 f_0 f_0}(-\kappa_{1i}, -\kappa_{2j}, -\kappa_{3k})\Delta\kappa_1\Delta\kappa_2\Delta\kappa_3} \quad (11)$$

$$\Delta\kappa_1 = \frac{\kappa_{1u}}{N_1}; \Delta\kappa_2 = \frac{\kappa_{2u}}{N_2}; \Delta\kappa_3 = \frac{\kappa_{3u}}{N_3} \quad (12)$$

$$\kappa_{1i} = i\Delta\kappa_1; \kappa_{2i} = j\Delta\kappa_2; \kappa_{3i} = k\Delta\kappa_3 \quad (13)$$

1.2 自相关函数

土体参数空间变异性分析时常采用自相关函数描述随机场计算区域内任意两个不同空间位置处土体参数间的自相关性^[10]。对于土体的自相关函数,尚无一个确定的结论,常用的型式有指类型和指余弦型。出于简化计算的考虑,本文采用各向同性指指数平方型相关函数^[11],其表达式为:

$$R(\tau_1, \tau_2) = \exp\left[-\left(\frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{b^2}\right)\right] \quad (14)$$

式中: b 为随机场的相关距离。

1.3 支持向量机

SVM 的基本思想是通过非线性变化把原数据空间映射到某一高维的特征空间, 然后在这个新空间中求取最优线性分类面, 使得该超平面将两类样本正确无误地分开且使分类间隔最大^[12]。这种非线性变化通过定义适当的内积函数加以实现。SVM 的特点在于根据有限的样本信息在模型的复杂性(对特定训练样本的学习精度)和学习能力(无错误地识别任意样本的能力)之间寻求最佳折中, 以获得最好的推广能力^[13-14]。

对于给定一组样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k), x_i \in R^n, y_i \in R$, 我们的目标是寻找一个 n 维空间中的线性函数

$$f(x) = w \cdot x + b \quad (15)$$

使得对于所有从训练数据中获得的目标数据 y_i 的偏差最小。

经过整理, 最优分类面问题可以表示成如下的约束优化问题, 求函数

$$\phi(w) = \frac{1}{2} \|w\|^2, \\ \begin{cases} y_i - w \cdot x_i - b \leq \epsilon, & i=1, \dots, n \\ w \cdot x_i + b - y_i \leq \epsilon, \end{cases} \quad (16)$$

的最小值。

对于现行不可分情况, 根据统计学习理论, 可以通过在约束条件中引入松弛变量, 并在目标函数中加入罚函数来解决这一问题。式(16)即可演变为下式:

$$\phi(w) = \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^k (\xi_i + \xi_i^*), \\ \begin{cases} y_i - w \cdot x_i - b \leq \epsilon + \xi_i, & i=1, \dots, n \\ w \cdot x_i + b - y_i \leq \epsilon + \xi_i^*, \end{cases} \quad (17)$$

式中: C 为常数, 起控制对错分样本惩罚程度的作用, 能实现错分样本的比例与算法复杂度之间的折中。若 C 过大, 就会引起过学习, 影响分类器的泛化能力。使用优化算法, 式(17)即可转化为一个双优化问题, 即求函数

$$W(\alpha, \alpha^*) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*)(\alpha_j - \alpha_j^*)(x_i \cdot x_j) + \\ \sum_{i=1}^n y_i (\alpha_i - \alpha_i^*) - \epsilon \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha_i^*), \\ \begin{cases} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) = 0, & i=1, 2, \dots, n \\ 0 \leq \alpha_i, \alpha_i^* \leq C, \end{cases} \quad (18)$$

的最大值。解决上述优化问题后, 即可得到回归方程:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*)(x \cdot x_i) + b \quad (19)$$

如果一个问题在其定义的空间中不是线性可分的, 可以考虑通过引入核函数 $K(x_i, x_j)$ 把问题转换到一个新的空间中, 相应的判别函数为:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) K(x \cdot x_i) + b \quad (20)$$

本文采用径向基核函数^[15-16], 其形式为:

$$K(X, Y) = \exp\left\{-\frac{\|X - Y\|^2}{\sigma^2}\right\} \quad (21)$$

式中: g 是核函数中的重要参数, 影响着 SVM 算法的复杂程度。

1.4 SRM 与 SVM 耦合算法

对于给定一组样本数据 $(x_{11}, \dots, x_{1j}, \dots, x_{1m}), (x_{21}, \dots, x_{2j}, \dots, x_{2m}), \dots, (x_{n1}, \dots, x_{nj}, \dots, x_{nm})$, 可得参数矩阵 \mathbf{X}

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix} \quad (22)$$

由式(22)可得参数间的相关矩阵 \mathbf{C} 。SRM 与 SVM 耦合其主要内容包括以下步骤:

(1) 选择一种参数作为训练集 \mathbf{x} , 剩余参数为训练集 \mathbf{y} ;

(2) 土体参数间的非线性关系可用 SVM(\mathbf{X}) 表示:

$$\begin{aligned} \text{SVM}(\mathbf{x}) : R^n &\rightarrow R \\ \mathbf{y} &= \text{SVM}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \mathbf{y} &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (23)$$

(3) 求解二次优化问题, 得到对应的支持向量机模型;

(4) 使用最佳算法: 如粒子群算法、网格搜索法或遗传算法搜寻最优参数: C 和 g ;

(5) 联合步骤(3)与(4)得到最优支持向量机模型;

(6) 采用各向同性指教平方型相关函数来表征土体参数的自相关性;

(7) 使用 SRM 模拟土体参数 \mathbf{x} ;

(8) 使用式(23), 即可得到剩余参数的模拟数据。

2 算例

本文以土体抗剪强度参数: 黏聚力 c (kPa)、内摩擦角 φ (°) 为例进行分析。土体黏聚力和内摩擦

角间存在明显的统计负相关性,且二者大多服从非正态分布,故其服从二维二元随机场分布。取30组样本数据^[17]为训练集,场地大小为50 m×50 m,具体数值见表1,基本指标见表2。

表1 土体三轴试验抗剪强度参数

Table 1 Soil shear strength parameters for triaxial tests

编号	c/kPa	$\varphi/(^\circ)$
1	75.47	20.78
2	45.72	25.45
3	57.40	22.22
4	81.43	23.30
5	67.32	24.78
6	56.15	20.06
7	92.19	18.77
8	65.97	24.76
9	64.56	18.49
10	20.71	22.95
11	27.43	24.75
12	80.83	23.66
13	49.37	17.02
14	36.39	23.16
15	75.74	20.07
16	81.04	16.63
17	71.61	21.03
18	69.81	23.62
19	53.50	22.70
20	88.02	20.43
21	93.48	21.41
22	74.30	22.81
23	65.03	22.14
24	62.27	22.28
25	56.54	22.13
26	77.68	22.87
27	71.40	24.00
28	86.09	18.70
29	58.35	22.33
30	91.49	21.37

表2 土体抗剪强度参数基本指标

Table 2 Basic indexes of soil shear strength parameters

参数	均值	变异系数	协方差矩阵
c/kPa	66.58	0.27	$\begin{bmatrix} 1 & -0.34 \\ -0.34 & 1 \end{bmatrix}$
$\varphi/(^\circ)$	21.82	0.1	$\begin{bmatrix} 1 & -0.34 \\ -0.34 & 1 \end{bmatrix}$

若采用传统SRM模拟此二维二元随机场,则可用式(14)得到自相关函数 $R_{f_0 f_0}(\xi_1, \xi_2)$,对应的功率谱密度函数 $S_{f_0 f_0}(x_1, x_2)$ 可采用快速傅里叶变换得到。土体抗剪强度参数随机场基本指标的具体数值见表3。

表3 SRM离散随机场基本指标

Table 3 Basic indexes for SRM method

参数	均值	变异系数	协方差矩阵
c/kPa	61.26	0.16	$\begin{bmatrix} 1 & -0.02 \\ -0.02 & 1 \end{bmatrix}$
$\varphi/(^\circ)$	21.11	0.06	$\begin{bmatrix} 1 & -0.02 \\ -0.02 & 1 \end{bmatrix}$

表3与表2对比可知,使用传统SRM方法离散多元随机场后,变量间的相关性发生了很大变化,说明此方法仅考虑了变量间的自相关性,并未考虑变量间的互相关性,与实际情况并不相符。

采用SRM与SVM耦合算法,将表1中数据作为SVM的训练集,黏聚力c为训练输入x,内摩擦角为训练输出y,由此可得到支持向量机模型。然后使用SRM方法离散黏聚力随机场,得到测试集输入x。最后选取合适的参数寻优方法,得到最合适的C和g的值,带入支持向量机模型,可得到测试集输出y,即内摩擦角随机场。具体数值见表4。

表4 SRM与SVM耦合离散随机场基本指标

Table 4 Basic indexes for SRM-SVM coupled method

参数	均值	变异系数	协方差矩阵
c/kPa	61.26	0.16	$\begin{bmatrix} 1 & -0.31 \\ -0.31 & 1 \end{bmatrix}$
$\varphi/(^\circ)$	20.76	0.07	$\begin{bmatrix} 1 & -0.31 \\ -0.31 & 1 \end{bmatrix}$

图1给出了传统SRM方法与耦合算法离散随机场后内摩擦角的概率密度函数曲线。二者比较可知,耦合算法在自相关性上与传统SRM方法拟合较好,说明耦合算法在随机场模拟过程中比较好地保留了参数的自相关性。

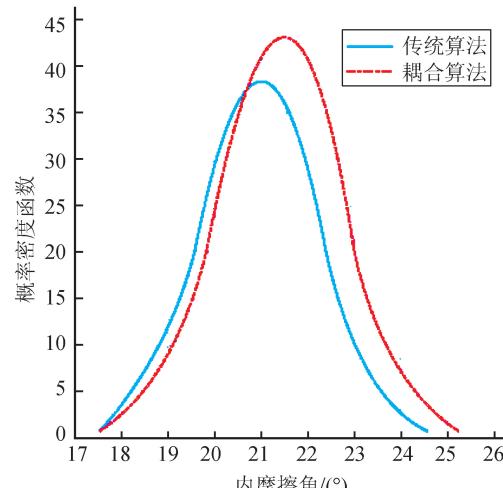


图1 内摩擦角概率密度函数

Fig.1 Probability density function of the internal friction angle

表4与表2对比可知,使用此方法离散随机场所得协方差矩阵与原始数据吻合较好,表明在随机场离散过程中未改变黏聚力c与内摩擦角 φ 的互相关性,更加符合工程实际。

3 结论

本文提出采用谱表示法与支持向量机法耦合模拟多维多元随机场,通过对比土体抗剪强度参数随

机场模拟过程中相关性的变化,探讨传统谱表示法与耦合算法对互相关性的影响。通过上述分析,可以得到以下结论:与传统的谱表示法相比,采用本文提出的耦合算法,不仅可以模拟变量的自相关性,还可以兼顾变量间的互相关性,全面地反映了空间变异性,更加有利于工程设计计算。

参考文献(References)

- [1] VANMARCKE E. Random Fields: Analysis and Synthesis[M]. Cambridge: MIT Press, 1983.
- [2] GRIFFITHS D V, FENTON G A. Probabilistic Slope Stability Analysis by Finite Elements[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2004, 130(5): 507-518.
- [3] GRIFFITHS D V, FENTON G A. Bearing Capacity of Spatially Random Soil: the Undrained Clay Prandtl Problem Revisited [J]. Geotechnique, 2001, 51(4): 351-359.
- [4] FENTON G A, GRIFFITHS D V. Bearing-capacity Prediction of Spatially Random $c \varphi$ Soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, 40(1): 54-65.
- [5] 吴振君,王水林,葛修润.约束随机场下的边坡可靠度随机有限元分析方法[J].岩土力学,2009,30(10):3086-3092.
WU Zhenjun, WANG Shuilin, GE Xiurun. Slope Reliability Analysis by Random FEM under Constraint Random Field[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(10): 3086-3092.
- [6] 闫澍旺,朱红霞,刘润.关于随机场理论在土工可靠度计算中应用的研究[J].岩土工程学报,2006,28(12):2053-2059.
YAN Shuwang, ZHU Hongxia, LIU Run. Study on Application of Random Field Theory to Reliability Analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(12): 2053-2059.
- [7] 史良胜,杨金忠,陈伏龙,等.Karhunen-Loeve 展开在土性各向异性随机场模拟中的应用研究[J].岩土力学,2007,28(11):2303-2308.
SHI Liangsheng, YANG Jinzhong, CHEN Fulong, et al. Research on Application of Karhunen-Loeve Expansion to Simulating Anisotropic Random Field of Soil Property[J]. Rock & Soil Mechanics, 2007, 28(11): 2303-2308.
- [8] HUANG S P, QUEK S T, PHOON K K. Convergence Study of the Truncated Karhunen-Loeve Expansion for Simulation of Stochastic Processes[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 52(9): 1029-1043.
- [9] SHINOZUKA M, DEODATIS G. Simulation of Multi-dimensional Gaussian Stochastic Fields by Spectral Representation [J]. Applied Mechanics Reviews, 1996, 49(1): 29-53.
- [10] 蒋水华,李典庆,周创兵,等.考虑自相关函数影响的边坡可靠度分析[J].岩土工程学报,2014,36(3):508-518.
JIANG Shuihua, LI Dianqing, ZHOU Chuangbing, et al. Slope Reliability Analysis Considering Effect of Autocorrelation Functions[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, 36(3): 508-518.
- [11] 龚勋,张冬梅,黄宏伟.二维空间随机场的浅基础极限承载力可靠度分析[J].地下空间与工程学报,2012,8(A02):1676-1679.
GONG Xun, ZHANG Dong-mei, HUANG Hong-wei. Reliability Analysis of Allowable Pressure on Shallow Foundation Based on 2D Random Field[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2012, 8(A02): 1676-1679.
- [12] 闫园园,张胤,胡峥嵘.基于支持向量机方法的抗滑桩优化设计及在边坡稳定性分析中的应用[J].水利水电技术,2016,47(11):125-128,135.
YAN Yuanyuan, ZHANG Yin, HU Zhengrong. Support Vector Machine (Svm)-Based Optimum Design of Anti-slide Pile and Its Application to Analysis of Slope Stability[J]. Water Resources and Hydropower Engineering, 2016, 47(11): 125-128, 135.
- [13] 赵洪波,茹忠亮,张士科.SVM 在地下工程可靠性分析中的应用[J].岩土力学,2009,30(2):526-530.
ZHAO Hongbo, RU Zhongliang, ZHANG Shike. Application of Support Vector Machine to Reliability Analysis of Underground Engineering[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(2): 526-530.
- [14] 赵洪波.基于 GA 与 SVM 的最危险滑动面识别[J].岩土力学,2006,27(11):2011-2014.
ZHAO Hongbo. Recognition of Critical Slip Surface Based on GA and SVM[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(11): 2011-2014.
- [15] KEERTHI S S, LIN C J. Asymptotic Behaviors of Support Vector Machines with Gaussian Kernel[J]. Neural Computation, 2003, 15(7): 1667-1689.
- [16] 戴波,陈波.基于混沌的大坝监测序列小波 RBF 神经网络预测模型[J].水利水电技术,2016,47(2):80-85.
DAI Bo, CHEN Bo. Chaos-based Dam Monitoring Sequence Wavelet RBF Neural Network Prediction Model[J]. Water Resources and Hydropower Engineering, 2016, 47(2): 80-85.
- [17] 张雷,唐小松,李典庆.基于 Copula 函数的土体抗剪强度参数二维分布模型[J].土木工程与管理学报,2013,30(2):11-17.
ZHANG Lei, TANG Xiaosong, LI Dianqing. Bivariate Distribution Model of Soil Shear Strength Parameter Using Copula[J]. Journal of Civil Engineering and Management, 2013, 30(2): 11-17.