

陈波,温增平.基于一致可靠度的地震动记录样本容量确定方法研究[J].地震工程学报,2018,40(6):1295-1305.doi:10.3969/j.issn.1000-0844.2018.06.1295

CHEN Bo, WEN Zengping. Sample Size Determination for Strong Ground Motion Inputs Based on Reliability—Consistent Method[J]. China Earthquake Engineering Journal, 2018, 40(6): 1295-1305. doi: 10.3969/j.issn.1000-0844.2018.06.1295

# 基于一致可靠度的地震动记录样本容量 确定方法研究

陈波, 温增平

(中国地震局地球物理研究所, 北京 100081)

**摘要:** 确定地震动输入样本容量是开展结构动力地震反应分析的重要环节,目前国内外关于地震动输入样本容量的讨论往往忽略或尚难以定量考虑结构地震反应估计的可靠度水平。以一实际钢筋混凝土框架结构为例,首先分析在大样本地震动作用下结构非线性地震反应的统计特征,研究估计结构地震反应时取样本最大值和平均值的差异,然后借助于假设检验分析结构地震反应的概率分布模型,给出基于一致可靠度的地震动样本容量确定方法,并对比分析单周期点、多周期点、谱值匹配调整地震动及人工合成地震动对样本容量需求的影响,为保证在小样本地震动输入下结构地震反应估计值满足给定可靠度和容许误差提供分析方法和判断依据。本文方法适应于定量确定不同结构类型和不同地震强度水平下的地震动样本容量需求,对建筑结构抗震性能评估及设计规范研究有一定意义。

**关键词:** 地震动; 样本容量; 假设检验; 一致可靠度; 确定方法

中图分类号: TU318

文献标志码: A

文章编号: 1000-0844(2018)06-1295-11

DOI: 10.3969/j.issn.1000-0844.2018.06.1295

## Sample Size Determination for Strong Ground Motion Inputs Based on Reliability—Consistent Method

CHEN Bo, WEN Zengping

(Institute of Geophysics, China Earthquake Agency, Beijing 100081, China)

**Abstract:** Sample size determination for strong ground motion inputs is one of the most critical issues in carrying out nonlinear dynamic analyses. Most popular studies about ground motion sample size at home and abroad often ignore or barely consider the reliability of the structural seismic response estimation. In this paper, the reliability-consistent sample size determination method is presented to ensure a certain reliability of structural seismic response estimation. First, the statistical characteristics of structural nonlinear dynamic response under large ground motions sample for a typical reinforced concrete frame building are analyzed to discuss the difference between the maximum and mean values of structural responses. Then, based on the hypothesis testing of structural response probability distribution models, a sample size determination method for

收稿日期: 2017-11-29

基金项目: 国家自然科学基金(51508527, 51378477); 中央级公益性科研院所基本科研业务专项(DQJB15C05)

第一作者简介: 陈波(1987-), 男, 博士, 副研究员, 主要从事地震工程学与城市减灾研究。E-mail: chenbo@cea-igp.ac.cn。

strong ground motion inputs based on the reliability-consistent method is proposed. In addition, the impacts of synthesized ground motions and single-period and multi-period spectral-matching methods for generating synthetic strong motions on the sample size demand are discussed to provide a determination method and estimation basis and ensure reliability and allowable error of structural response estimation using small sample size strong ground motions. The results show that distribution models of structural response highly accept the logarithmic extremum distribution and lognormal distribution hypotheses and completely reject the normal distribution hypothesis. This method is suitable for various types of building structures and ground motion intensities in determining ground motion sample size demand, which is very significant as regards seismic performance and the study of seismic design code.

**Keywords:** ground motion; sample size; hypothesis testing; reliability-consistent; determination method

## 0 引言

选取多少地震动记录来进行结构动力地震反应分析是地震动选取过程中的一个重要环节<sup>[1-2]</sup>。目前结构动力地震反应分析在建筑结构的抗震设计和性能评估中的应用越来越广泛。为了较为准确地估计结构的地震反应,往往需要选取大量(数十条或更多)地震动记录进行动力反应分析,来减小地震动记录与记录之间的差别对结构反应估计值的影响<sup>[3-4]</sup>。但这在实际工作中往往是不可行的,特别是对于大型结构的非线性分析,单条地震动记录就需要耗费大量的时间。所谓一致可靠度的样本容量确定是指在给定地震危险性水平计算结构的地震反应时,对不同的地震动选择和调整方法,通过确定合适的地震动样本容量来保证结构地震反应估计结果能够达到满足工程需要的一致可靠度水平。

目前,为了确定地震动的样本容量,多数抗震设计规范<sup>[1,5-6]</sup>(包括我国现用的抗震设计规范)规定时程分析时至少选取3条地震动记录,并规定如果少于7条则选取最大值作为结构反应估计值,7条或更多则选用平均值;ATC-58<sup>[7]</sup>认为在非线性动力分析中,3条或7条地震动并不能有效地估计结构反应的分布,建议在估计设定地震作用下结构反应的整个概率分布时至少需要11条地震动<sup>[7]</sup>。也有一些学者对结构动力分析中的地震动样本容量进行了讨论。杨溥<sup>[8]</sup>比较了四种天然地震动和人工合成地震动的小样本组合方式(“2+1”:2条实际地震动+1条人造波;“3+1”,“4+1”,“3+2”)下结构反应的均值、方差概率分布和均值置信区间的概率分布,建议结构时程分析中的最小样本容量取为“3+1”。Reyes等<sup>[9]</sup>通过比较样本容量分别是3~10的单自由度体系的反应,检验了ASCE/SEI-7<sup>[10]</sup>关于地震

动选择的规定,认为ASCE/SEI-7关于少于7条地震动记录时结构反应的取值过于保守,建议至少选择7条地震动记录,并且应该充分考虑谱形的影响。然而这种规定只是尽可能地满足结构一定安全设计的要求,而对结构反应的估计,特别是结构在大震作用下的弹塑性反应,是否是对结构真实反应的无偏估计并不能做出一个清晰、定量的判断。由统计理论可知,当样本容量到达一定程度后,结构地震反应估计值的一阶矩和二阶矩基本趋于平稳,样本容量的增大并不能显著降低估计的误差。因此实际有效的思路应当是在满足估计结果一定可靠度的基础上来确定地震动样本容量。Hancock等<sup>[2]</sup>在正态分布的假设下从可靠度的角度对设定地震下地震动样本容量需求进行了估计,但缺乏对结构地震反应概率分布的有效检验。如何平衡结构反应估计精度和地震动的样本容量之间的关系是地震动选取中一个值得深入研究的问题。

本文以一实际钢筋混凝土框架结构为例,输入地震动记录进行非线性动力分析,并对结构地震反应进行统计分析,研究结构地震反应估计取值的统计特征,并通过假设检验分析结构非线性地震反应的概率分布模型,在此基础上建立基于一致可靠度的样本容量确定方法,并为相关结构抗震设计中地震动输入确定的研究工作提出建议。

## 1 结构的地震反应分析

### 1.1 结构模型

分析模型选取一8层钢筋混凝土框架结构,设防烈度Ⅷ度,场地类别为Ⅱ类,设计分布第二组,设计基本地震加速度为 $0.2g$ 。结构平面规整,三跨五榀,为 $7.2\text{ m}\times 7.2\text{ m}$ 柱网。框架底层层高 $4.5\text{ m}$ ,其

他层高均为 3.6 m,总高度为 29.7 m,其平面和立面布置图分别见图 1(a)和图 1(b)。结构基本周期为

1.2 s。梁柱尺寸及配筋等均按照中国建筑设计规范<sup>[5]</sup>要求配置,如图 1(c)所示。

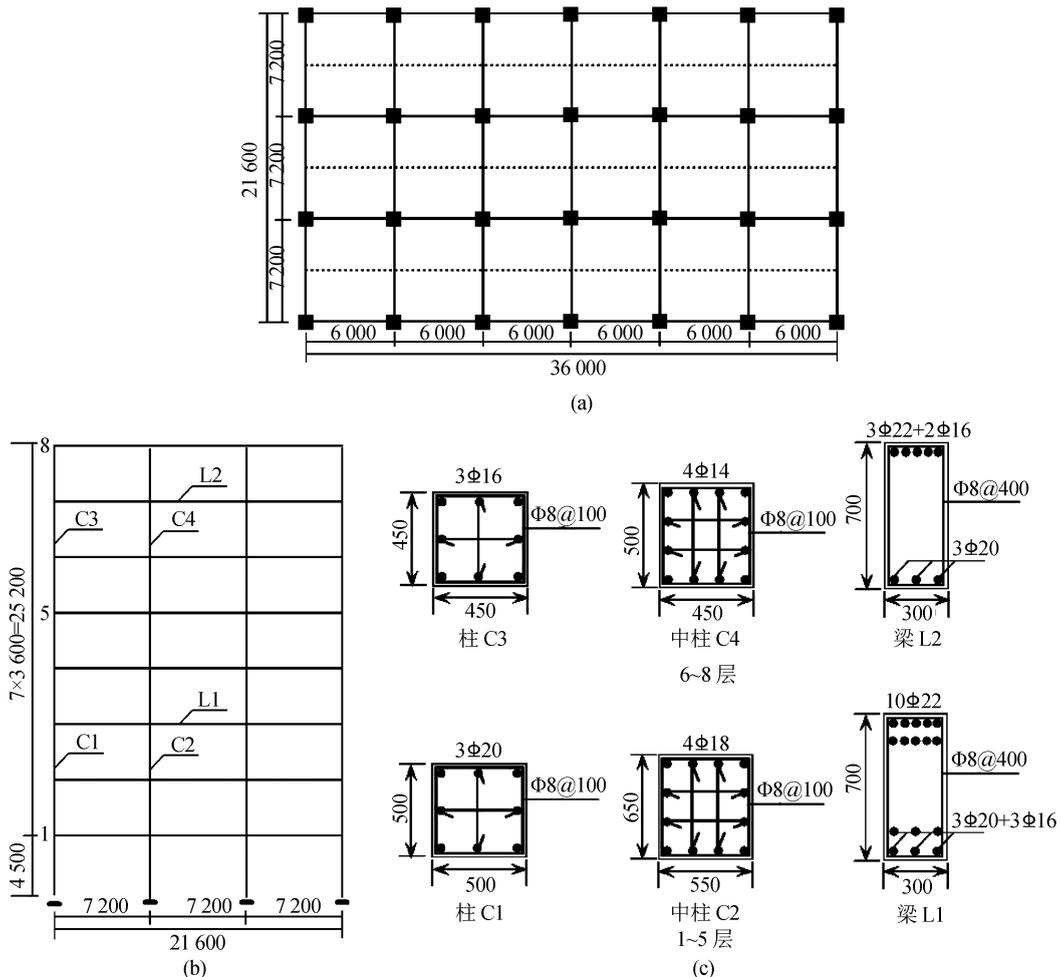


图 1 结构模型平、立面布置及梁柱配筋简图(单位:mm)

Fig.1 Plan and elevation view of the structure model and the schematic of the reinforcement of beams and columns (Unit:mm)

采用非线性结构分析软件 IDARC 2D (V.6.0)<sup>[11]</sup>,取结构模型中间一榀框架进行建模分析。梁柱均采用纤维单元,连续塑性模型,纵筋均按实配钢筋布置,箍筋约束系数为 0.5,保护层厚度为 30 mm,并在梁柱端部设置适当的刚域。滞回特性采用多线段滞回模式,并考虑  $P-\Delta$  效应。选取最大层间位移角作为结构反应参数。

## 1.2 地震动记录

本文所用地震动记录来源于太平洋地震工程中心(PEER)提供的强震数据库<sup>[12]</sup>,并依据下列准则进行选择:

- (1) 震级不小于 5.5 级;
- (2) 震中距小于 100 km;
- (3) 地震动记录来源于自由场地或结构底层;
- (4) 记录地震动的场地 30 m 剪切波速 260

$\text{m/s} \leq v_s \leq 510 \text{ m/s}$ ;

(5) 记录的两个水平分量均可用,并且所有分量高通滤波角频率均小于 0.2 Hz,低通滤波角频率均大于 18 Hz。

共挑选出 220 组地震动记录,包含 440 个水平分量作为备选数据库,地震动记录列表见文献[6]附录 A。

为了研究结构弹塑性反应的概率分布,选用与设计模型相对应罕遇地震水平下的加速度反应谱作为目标谱,其中水平地震影响系数最大值为 1.20,特征周期 0.4 s。从备选的 440 条水平地震动记录中挑选与目标谱的谱形最接近的 100 条记录,并按照多周期点( $0.2T_1 \sim 2T_1$ )调幅法将其调整到目标谱强度水平作为地震动输入进行结构地震反应分析(图 2)。

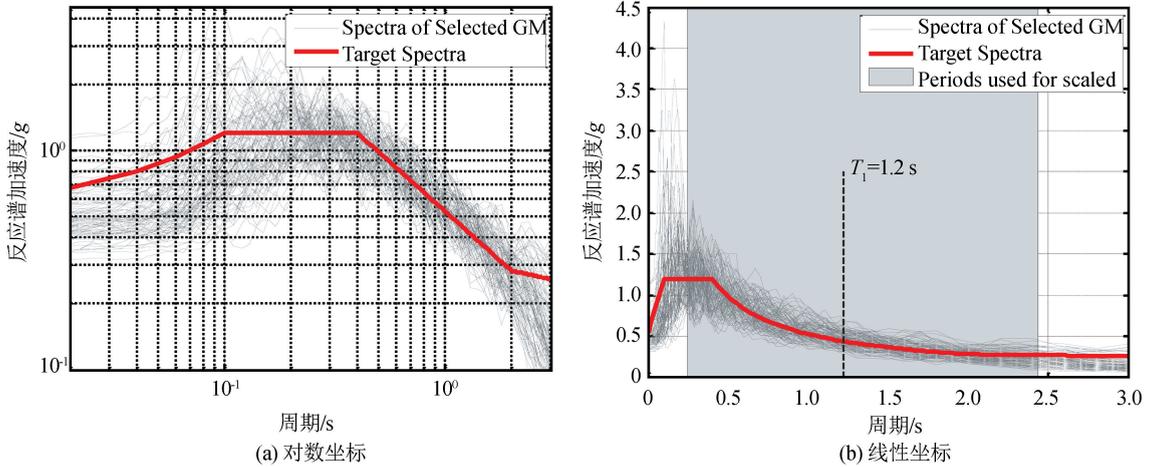


图2 挑选和调整后的地震动反应谱

Fig.2 Spectra of selected and modified ground motions

## 2 结构地震反应估计值

由于地震动输入和结构模型等的不确定性,结构在一定地震强度水平下计算得到的地震反应并不是一个确切的值。而在结构性能评估或抗震设计中需要确定一个数值作为参考。目前有部分抗震规范(GB 50011-2010, ASCE 7-05 等)规定如果地震动输入少于7条,则选取最大值作为结构反应估计值,7条或更多则选用平均值。这种规定尽可能考虑了地震动选择的不确定性对结构地震反应估计的不利影响,却增加了结构地震反应估计取值的难度。例如分别选择5条和8条地震动记录输入结构进行计算,这时候二者计算的结果往往并不一致。且由前面的规定可以初步判断,5条记录得到的结果很有可能要大于8条记录的结果,如果此时从安全的角度来考虑就需要放弃由更多地震动记录计算的结果,这显然是不合理的。本文认为不应简单地以某

个样本容量为界限确定结构地震反应估计值的取值方式,而应该充分考虑两种估计取值方式的统计特征(一、二阶矩)与样本容量的关系,较好的估计值应当具有平稳的统计特征。

为了分析两种取值方式的统计特征,以前文计算的100个结构地震反应为总体,按照样本  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  重复抽样40次作为对应于每一种地震动样本容量为  $n$  的子样本  $Y$ 。

$$\begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{40} & x_2^{40} & \dots & x_n^{40} \end{bmatrix} \quad (1)$$

对于每种估计值的取值方式,可以构造两个随机变量分别为子样本均值  $\text{Mean}(Y)$  和子样本最大值  $\text{Max}(Y)$ 。

图3分别给出了  $\text{Mean}(Y)$  和  $\text{Max}(Y)$  随地震动样本容量的变化情况。图中蓝色线条为一倍标准

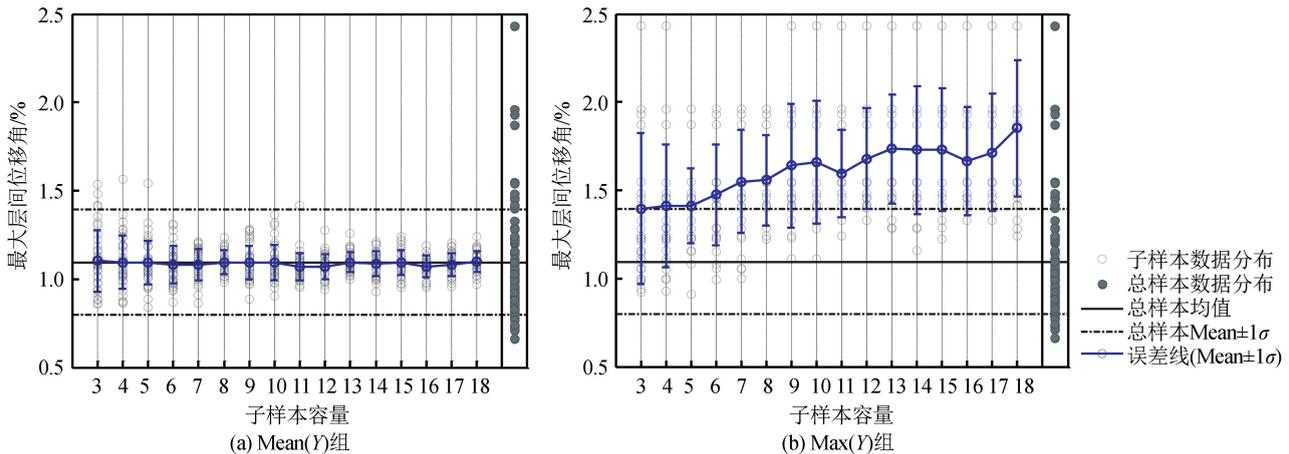


图3 不同地震动样本容量对应的结构反应均值

Fig.3 Mean value of structural responses corresponding to different size of sample

差的误差曲线。图 4 给出了随机变量  $Mean(Y)$  和  $Max(Y)$  的均值随地震动样本容量的变化情况。从图中可以看出,  $Mean(Y)$  的均值与总体均值几乎一致, 且随着样本容量的变化其比较平稳。而  $Max(Y)$  的均值则随样本容量的变化逐渐增大, 没有逐渐平稳的趋势。

图 5 分别给出了  $Mean(Y)$  和  $Max(Y)$  的标准差和变异系数的比较。从图中可以看出  $Mean(Y)$  的离散性要明显小于  $Max(Y)$ , 且随着样本容量的增大逐渐减小。当样本容量大于 11 时,  $Mean(Y)$  的离散性已经变得比较小, 且趋于平稳。

综合以上讨论可以看出, 在结构地震反应的估计中, 相对于最大值的取值方法, 均值法在统计意义上是比较合适的。但如何确定地震动的样本容量才

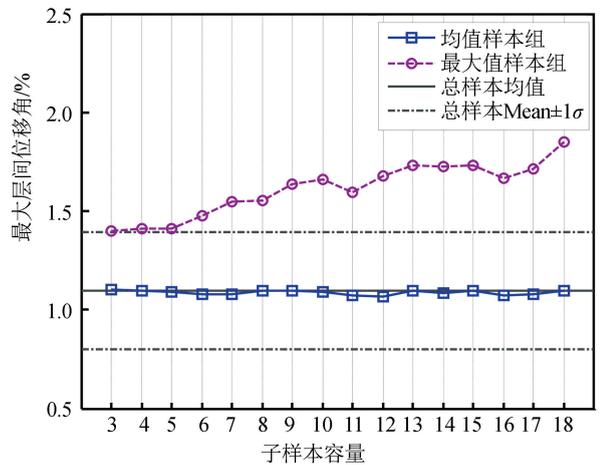
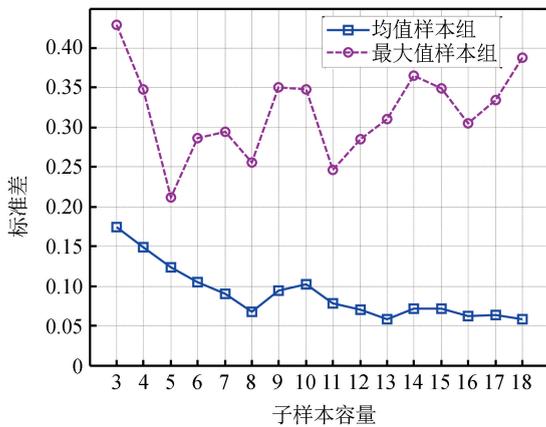
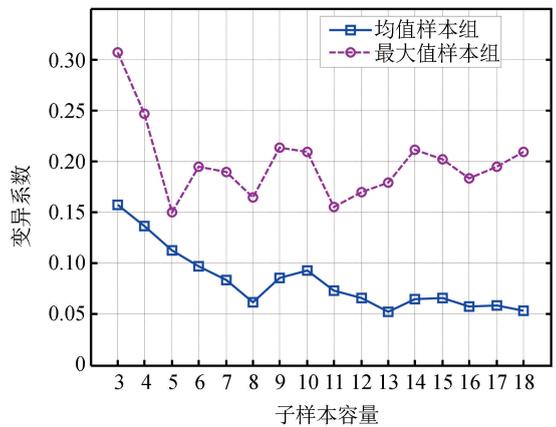


图 4 Mean(Y) 和 Max(Y) 的均值比较

Fig.4 Mean value comparison between Mean(Y) set and Max(Y) set



(a) 标准差



(b) 变异系数

图 5 Mean(Y) 和 Max(Y) 组标准差和变异系数的比较

Fig.5 Comparison between standard deviations and coefficients of variability between Mean(Y) set and Max(Y) set

能得到一个可靠的估计值, 仍然是一个值得讨论的问题。下文将以样本均值作为结构地震反应的估计值, 研究地震动样本容量的取值问题, 以实现小样本地震动作用下结构的反应对总体均值的可靠估计。

### 3 结构地震反应的概率分布

结构的地震反应是服从一定概率分布的随机变量。为了实现对地震动样本容量的估计, 首先就需要确定结构地震反应的概率分布模型。Lutes 等<sup>[13]</sup>统计检验了 1 000 个子样以上的单自由度体系的弹性最大反应, 并将计算结果按大小排队画在 Gumbel 图上, 其结果近似于一直线, 于是认为该反应符合极值 I 型分布, 但这样的判断方法显然是比较粗糙的。陈永祁<sup>[14]</sup>分别对单自由度体系和多自由度剪切型结

构在人工地震动作用下的弹塑性反应进行了统计分析, 并分别采用  $\chi^2$  检验和 K-S 检验, 按照正态, 对数正态、极值 I 型假设分布进行了显著性检验, 认为这两种检验方法得到的结果基本相同, 并且结构在人工地震动作用下的弹塑性反应符合极值 I 型分布。也有研究认为结构在罕遇地震作用下的弹塑性反应更倾向于符合对数正态分布<sup>[15]</sup>, 或者在工程精度允许的范围内假定符合正态分布<sup>[8]</sup>。但目前对结构地震反应的概率分布还未能有一个确切的认识。

为了分析结构地震反应的概率分布, 本文假定以下四种分布:

#### (1) 正态分布

如果随机变量  $X$  的概率密度为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad (-\infty < x < \infty) (\sigma > 0) \quad (2)$$

则称  $X$  遵从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ; 简记为  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

(2) 对数正态分布

如果随机变量  $X$  的对数  $\ln X$  服从正态分布, 则  $X$  服从对数正态分布, 其概率密度函数为:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2} \frac{1}{x} \quad (-\infty < x < \infty) (\sigma > 0) \quad (3)$$

(3) 极值分布

极值分布研究多个彼此对立的  $Y$  (不同地震动输入下的结构反应) 中挑选出来的各个极大值 (每一条地震动作用下结构反应的最大值)。这些极大值的概率密度为:

$$p(x) = f(x | k, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp \left[ - \left( 1 + k \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{k}} \right] \left( 1 + \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{k}} \quad (4)$$

其中:  $1 + k \frac{x - \mu}{\sigma} > 0$ ;  $\mu$  为位置参数, 决定了分布函数的位置;  $\sigma$  为幅值参数;  $k$  为形状参数。  $k = 0$  代表

极值 I 型分布,  $k > 0$  代表极值 II 型分布,  $k < 0$  代表极值 III 型分布。

(4) 对数极值分布

在本文中如果随机变量  $X$  的对数  $\ln X$  服从极值分布, 则  $X$  服从对数极值分布, 其概率密度函数为:

$$p(x) = f(x | k, \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma} \exp \left[ - \left( 1 + k \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{k}} \right] \left( 1 + \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{k}} \quad (5)$$

3.1 结构地震反应的概率分布拟合

分别用以上假设的四种概率分布模型对结构在地震动作用下的最大层间位移角进行拟合。其中将正态分布和对数正态分布所需参数记为样本的均值和标准差; 极值分布的参数可用 Matlab 函数 `gevfit` 计算得到, 具体参数如表 1 所列。另外从极值分布和对数极值分布的  $k$  值可以看出, 样本的极值分布符合极值 II 型分布, 样本的对数极值分布符合对数极值 III 型分布, 并非简单的极值 (对数极值) I 型分布。

表 1 四种概率分布拟合参数

Table 1 Fitting parameters of the four probability distributions

	均值	标准差		$\mu$	$\sigma$	$k$
正态分布	1.095 5	0.296 3	极值分布	0.138 3	0.192 9	0.954 7
对数正态分布	0.060 1	0.243 5	对数极值分布	-0.063 0	0.203 6	-0.046 1

图 6 分别给出了最大层间位移角的四种概率密度 [图 6(a)] 和累计概率分布拟合 [图 6(b)] 的比较。从图中可以看出对数极值分布和对数正态分布与经验概率密度分布最为接近; 正态分布与经验概率分布相差比较大。

3.2 概率分布的假设检验

在样本概率分布还不确定的情况下, 需要通过已有样本对假设的概率分布进行非参数假设检验, 即检验观察到的样本数据是否与某种理论分布符合。本文分别采用  $\chi^2$  拟合优度检验法和 K-S 检

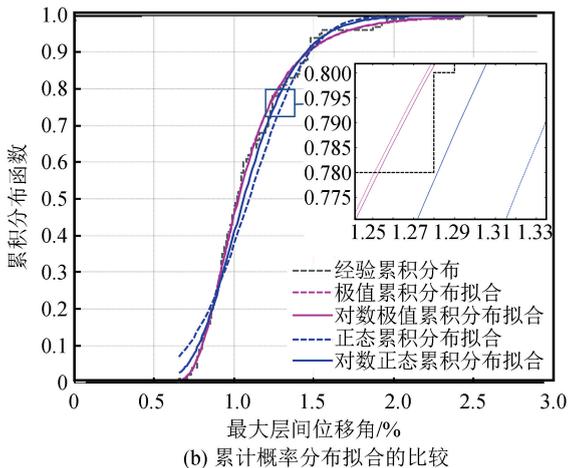
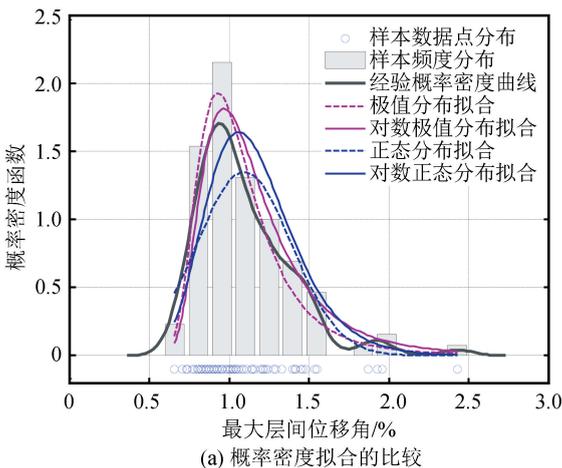


图 6 最大层间位移角的概率分布拟合

Fig.6 Probability distribution fitting of the maximum inter-story drift ratio

(1)  $\chi^2$  拟合优度检验法

$\chi^2$  拟合优度检验法,又称  $\chi^2$  检验或卡方检验,是一种基于卡方分布的常用假设检验方法。它是利用  $\chi^2$  值检验实际观察次数与理论次数的差异是否显著的方法。其中  $\chi^2$  是实得数据与理论数据偏离程度的指标,具体公式如下:

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \quad (6)$$

式中: $f_o$  为样本观测的频数; $f_e$  为理论频数。

对于大样本,统计量  $\chi^2$  近似服从自由度为  $m-r-1$  的  $\chi^2$  分布,其中  $m$  为观测区间个数, $r$  为观测估计的参数个数。从式(6)可以看出,实际观察次数与理论次数的差异越小, $\chi^2$  值也就越小;当  $f_o$  与  $f_e$  完全相同时, $\chi^2$  值为零。

(2) K-S 检验:

与  $\chi^2$  检验不同,K-S 检验比较了统计样本的经验分布函数  $F_N(x)$  和原假设的理论分布函数  $F(x)$  之差的绝对值  $D_N$ 。

$$D_N = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_N(x) - F(x)| \quad (7)$$

按照指定的显著水平  $\alpha$ ,查表以确定  $D_N$  值是否落在对应的置信区间内。若其值落在了对应的置信区间内,说明被检测的数据满足要求,反之亦然。

表 3 四种概率分布在 5% 和 10% 的显著水平下的最短置信区间

Table 3 Minimum confidence intervals for four probability distributions under the significant level of 5% and 10%

	正态分布			对数正态分布			极值分布			对数极值分布		
	下限	上限	间距	下限	上限	间距	下限	上限	间距	下限	上限	间距
5%	0.51	1.68	1.17	0.66	1.71	1.05	0.66	1.69	1.03	0.69	1.73	1.04
10%	0.61	1.58	0.97	0.71	1.59	0.88	0.69	1.50	0.81	0.72	1.54	0.82

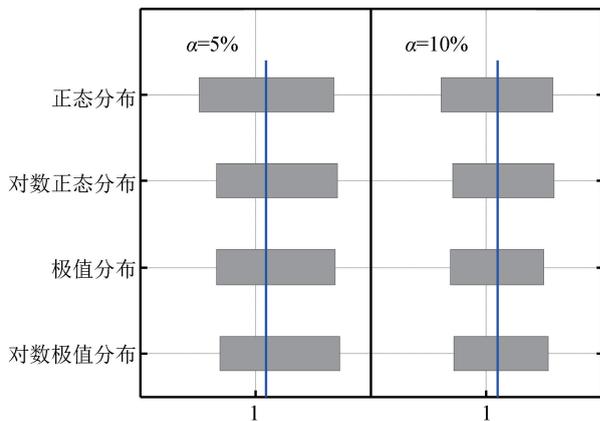


图 7 四种概率分布在 5% 和 10% 的显著水平下的最短置信区间的比较

Fig.7 Comparison between the minimum confidence intervals for four probability distributions under the significant level of 5% and 10%

对于前面计算得到的 100 个结构反应样本,分别在显著水平为 5% 和 10% 下进行  $\chi^2$  检验和 K-S 检验,结果如表 2 所列。

表 2 最大层间位移角概率分布的假设检验结果

Table 2 Hypothesis test results of the probability distribution of maximum inter-story drift ratio

	$\chi^2$ 检验		K-S 检验	
	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.10$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.10$
正态分布	×	×	×	×
对数正态分布	✓	×	✓	✓
极值分布	×	×	✓	✓
对数极值分布	✓	✓	✓	✓

注:✓代表接受假设分布;×代表拒绝假设分布

从表 2 可以看出, $\chi^2$  检验和 K-S 检验给出了不尽相同的结果。在 5% 和 10% 的显著水平下均完全接受服从对数极值分布,完全拒绝服从正态分布; $\chi^2$  检验拒绝了极值分布的假设,而 K-S 检验则接受假设;除了在 10% 显著水平下拒绝服从对数正态分布,其余情况均接受服从对数正态分布。这与图 6 显示的结果基本一致。

表 3 给出了四种概率分布在 5% 和 10% 的显著水平下的最短置信区间,图 7 给出了更直观的比较。从图中可以看出,对数正态分布和对数极值分布的结果相差不大。

另外也对结构底层位移角和顶层位移样本进行了假设检验,分别如表 4 和表 5 所列。从表中可以看出三种结构反应的假设检验结果类似,完全接受对数极值分布的假设,完全拒绝正态分布,这为结构的可靠度分析和易损性分析提供了较好的参考。

但从式(4)和(5)可以看出,极值分布和对数极值分布的形式较为复杂,并且概率密度曲线并不对称,不容易得到其最短置信区间(需要使用优化算

表 4 底层层间位移角概率分布的假设检验结果

Table 4 Hypothesis test results of the probability distribution of the inter-story drift at the first floor

BIDR	$\chi^2$ 检验		K-S 检验	
	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.10$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.10$
正态分布	×	×	×	×
对数正态分布	✓	×	✓	✓
极值分布	✓	×	✓	✓
对数极值分布	✓	✓	✓	✓

表5 顶层位移概率分布的假设检验结果

Table 5 Hypothesis test results of the probability distribution of the displacement at top floor

RDIS	$\chi^2$ 检验		K-S 检验	
	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.10$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.10$
正态分布	×	×	×	×
对数正态分布	×	×	√	√
极值分布	√	×	√	√
对数极值分布	√	√	√	√

法寻找其最短置信区间),因此也难以应用极值分布和对数极值分布对抽样分析中样本容量的估计进行计算。另外从假设检验的结果来看,结构在天然地震动作用下的反应基本符合对数正态分布。在对数坐标下,对数正态分布的概率密度曲线对称分布,很容易求得最短置信区间,且可以用函数表达式明确表示。因此本文选择对数正态分布作为结构反应的概率分布。

#### 4 地震动样本容量的估计

由于地震动输入的不确定性,不同地震动作用下的结构地震反应往往是不同的。当确定一个值作为结构在一定地面运动强度水平下的反应时,该值的精确度和可靠度是必须要考虑的问题。杨溥<sup>[8]</sup>根据统计分析,对四种地震动样本组合情况进行了讨论,应用统计量  $u_{\text{设}} = u_{\text{小}} + \sigma_{\text{小}}$  对小样本的结构反应进行修正,从而确定出具有一定概率保证意义的设计统计值。这种方法虽然在一定程度上弥补了选波过程中不确定性因素所导致的不利影响,但未对结构地震反应设计值的可靠度进行有效衡量。

在前面地震动调整方法的讨论中,为了充分获取结构在地震动作用下的特征,往往假设地震动样本容量(Sample Size)  $n$  是已知的,且在统计意义上足够大。但在实际的工程计算中并不需要如此多的地震动记录进行抗震验算。如果  $n$  选得过大,会增加大量的人力和物力,现实上不可行;但如果  $n$  选得过小,会使估计误差增大,结果也会很不可靠,无法为结构的抗震性能评估提供参考。

可靠度也称置信度,表示估计值落入一定区间的概率,这个区间称为置信区间。精确度指估计值与真实值的接近程度。抽样估计值的精确度和可靠度与样本容量密切相关。样本容量越大,估计值与总体样本真实值之间的误差越小,可靠度也越高;反之亦然。因此确定满足需要的精确度和可靠度的样本容量是对结构地震反应进行有效估计的关键问题,确定合适的样本容量也是保证结构反应估计取值精确度和可靠度的有效途径。

#### 4.1 估计方法

由前文概率分布的讨论可知,结构地震反应  $X_1, X_2, \dots, X_n$  服从对数正态分布,即:

$$\ln X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (8)$$

其中: $\mu$  和  $\sigma$  分别为总体的均值和标准差。那么结构在设定强度下的地震反应估计值  $\overline{\ln X}$  服从以下分布:

$$\overline{\ln X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (9)$$

其中: $n$  为样本容量,  $\overline{\ln X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i$

进一步可以得到:

$$Y = \frac{\overline{\ln X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1) \quad (10)$$

于是在一定可靠度(置信水平)  $1 - \alpha$  下,随机变量  $Y$  的置信区间为:

$$[-Z_{\alpha/2}, Z_{\alpha/2}] \quad (11)$$

即

$$-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{\ln X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z_{\alpha/2} \quad (12)$$

其中: $Z_{\alpha/2}$  为分位数,如图8所示。将式(12)变形,即可得到总体均值  $\mu$  的置信区间为:

$$\left[ \overline{\ln X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}, \overline{\ln X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \right] \quad (13)$$

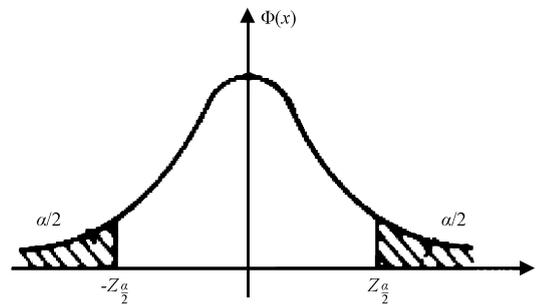


图8 区间估计示意图

Fig.8 Schematic diagram of interval estimation

则样本均值估计值  $\overline{\ln X}$  与总体均值  $\mu$  的最大偏差为  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}$ ,这个偏差即为在一定可靠度  $1 - \alpha$  (置信水平)下,用样本均值估计总体均值所允许的最大绝对误差,本文用  $\Delta$  表示,称之为允许误差,公式表示为:

$$\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \quad (14)$$

式(14)反映了允许误差  $\Delta$ 、分位数  $Z_{\alpha/2}$ 、总体标准差  $\sigma$  与样本容量  $n$  之间的相互制约关系。只要确

定其中任意三个因素,另一个因素也就确定了。

对于具体的问题,总体标准差  $\sigma$  可通过大样本(样本容量一般大于 30 即可) 计算得到;当给定期望的“可靠度”——置信水平  $1-\alpha$ ,则分位数  $Z_{\alpha/2}$  也就被确定;允许误差可以通过一定比例的地震反应均值确定,这个比例称为误差比,本文中用  $e$  表示。通过适当的推导就可以得到地震反应样本对数误差为:

$$\Delta \approx \ln \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tag{15}$$

从式(15) 可以看出,对数误差只与设定的误差比有关,代入式(14) 可得到:

$$n = \left(\frac{\sigma Z_{\alpha/2}}{\Delta}\right)^2 = \left(\frac{\sigma Z_{\alpha/2}}{\ln \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}}\right)^2 \tag{16}$$

式(16) 就可以计算得到满足一定可靠度和精确度的样本容量。

由式(14) 或(16) 可以看出,样本容量  $n$  与总体方差、允许误差、可靠度有以下关系:

(1) 样本容量  $n$  与总体方差成正比:总体方差

越大,样本容量需求  $n$  越大;

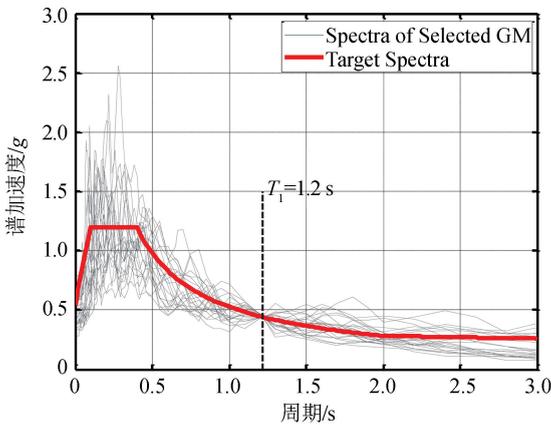
(2) 样本容量  $n$  反比例于允许误差。即在给定的置信水平下,允许误差越大样本容量需求就可以越小;反之则样本容量需求就必须加大;

(3) 样本容量  $n$  与可靠度成正比。要求的可靠程度越高样本容量需求就应越大;反之,则样本容量需求就可以越小。

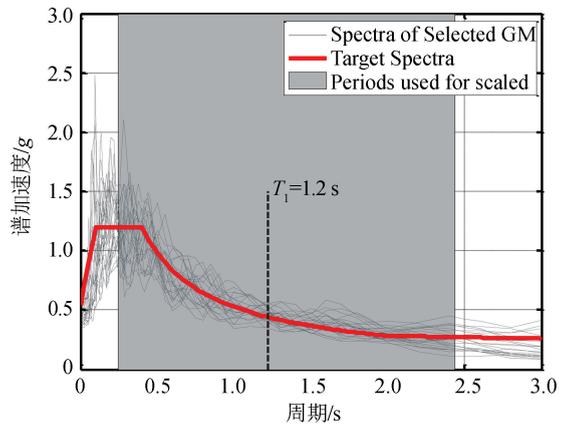
### 4.2 地震动调整方法对样本容量的影响

样本容量由总体方差、允许误差和可靠度共同决定。在允许误差和可靠度给定的情况下,样本容量则由结构地震反应的方差唯一决定。由前文地震动调整方法的讨论可知,结构地震反应的离散程度与地震动调整方法密切相关。

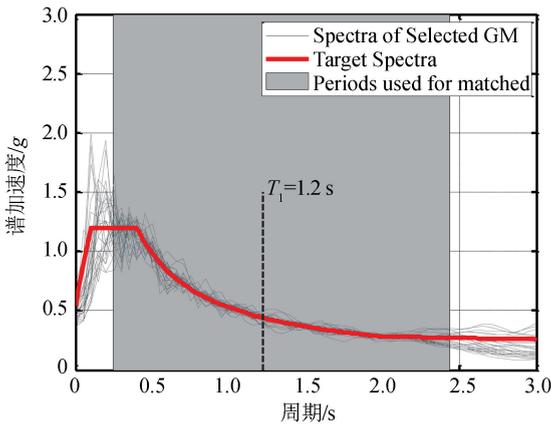
下文分别按照单周期点( $T_1$ )调幅,多周期点( $0.2\sim 2T_1$ )调幅、谱值匹配法( $0.2\sim 2T_1$ )和人工合成法四种方法得到 40 条与目标谱相一致的地震动记录,其中设定目标设计谱为结构所处 VIII 度  $0.3g$  地区罕遇地震的地震危险性水平(图 9),将调整后的记录输入结构进行非线性动力分析。



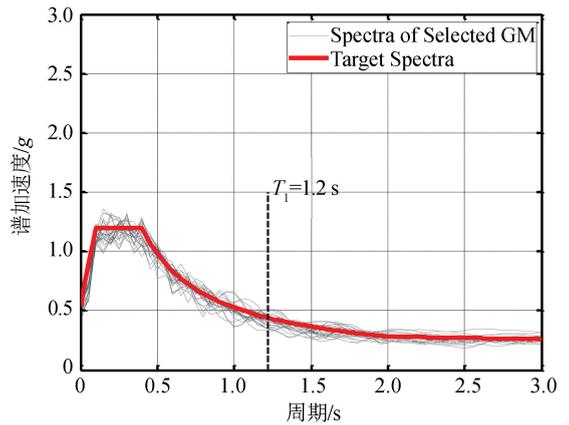
(a) 单周期点( $T_1$ )调幅



(b) 多周期点( $0.2\sim 2T_1$ )调幅



(c) 谱值匹配法( $0.2\sim 2T_1$ )



(d) 人工合成地震动

图 9 四种地震动调整方法下反应谱与目标谱的比较

Fig.9 Comparison between target spectra and response spectra by four scaled methods

表 6 分别给出了结构地震反应及其对数值的均值和标准差。由于结构地震反应服从对数正态分布,表 7 中的均值采用几何均值(几何均值的对数即

为样本对数均值)。从表中可以看出不同调整方法得到的统计结果并不相同。

由表 6 给出的分析结果,通过式(16)就可以计

表 6 结构地震反应的均值和标准差

Table 6 Mean value and standard deviation of structural seismic responses

	最大层间位移角		底层层间位移角		顶层位移	
	均值	标准差	均值	标准差	均值	标准差
单周期点调整	1.081 5	0.392 9	0.825 9	0.383 7	187.502	61.038 7
多周期点调整	1.095 8	0.379 5	0.840 7	0.384 8	190.362	62.040 5
谱值匹配	1.023 6	0.294 4	0.813 8	0.278 7	174.915	45.201 2
人工合成	1.279 9	0.252 2	1.063 1	0.246 4	224.961	42.610 0

表 7 结构地震反应对数值的均值和标准差

Table 7 Mean value and standard deviation of the logarithm of structural seismic responses

	最大层间位移角		底层层间位移角		顶层位移	
	对数均值	对数标准差	对数均值	对数标准差	对数均值	对数标准差
单周期点调整	0.078 4	0.303 1	-0.191 3	0.374 5	5.233 8	0.279 8
多周期点调整	0.091 5	0.289 1	-0.173 5	0.363 2	5.248 9	0.275 3
谱值匹配	0.023 4	0.258 2	-0.206 0	0.297 1	5.164 3	0.233 2
人工合成	0.246 8	0.200 6	0.061 2	0.237 6	5.415 9	0.191 0

算不同地震动调整方法下地震动输入的样本容量需求。表 7 给出了置信水平为 68%(一倍标准差,  $Z_{\alpha/2} = 1$ )、样本均值的允许误差为 10% 下的地震动样本容量需求。

表 8 置信水平 68% 及允许误差 10% 下样本容量需求

Table 8 Sample size demand under the confidence level of 68% and permissible error of 10%

	最大层间位移角	底层层间位移角	顶层位移
单周期点调整	10	14	8
多周期点调整	9	14	8
谱值匹配	7	9	6
人工合成	4	6	4

从表 7 可以看出,不同结构地震反应参数所需求的样本容量不同。底层层间位移角需求的样本容量最多,最大层间位移角次之,顶层位移最少。

地震动调整方法对地震动样本容量的需求有明显的影响。单点调幅法所需要的样本容量最多,多点调幅和单点调幅的结果差别不大,这与选取的结构受第一振型控制和设定地面运动强度较低有关。人工合成地震动对应的地震动样本容量需求最少,谱值匹配法次之。这是由于人工合成的地震动反应谱与目标谱匹配程度最好,其结构地震反应的离散性最小,为达到给定的可靠度和允许误差只需要较少的地震动样本即可。由式(16)也可以看出,样本容量需求与标准差的平方成正比,如果离散性增加一倍,为保持一样的可靠度和允许误差,样本容量需求就要增加三倍。

表 9 给出了 90% 置信水平 ( $Z_{\alpha/2} = 1.65$ )、10% 样本均值的允许误差下的地震动样本容量需求;表 10 给出了 68% 置信水平、5% 样本均值的允许误差下的地震动样本容量需求。这两种情况下样本容量的需求相对于表 7 有显著增多。这是因为样本容量需求与分位数的平方成正比,与允许误差的平方成反比。

表 9 置信水平 90% 及允许误差 10% 下样本容量需求

Table 9 Sample size demand under the confidence level of 90% and permissible error of 10%

	最大层间位移角	底层层间位移角	顶层位移
单周期点调整	25	38	22
多周期点调整	23	36	21
谱值匹配	18	24	15
人工合成	11	15	10

表 10 置信水平 68% 及允许误差 5% 下样本容量需求

Table 10 Sample size demand under the confidence level of 68% and permissible error of 5%

	最大层间位移角	底层层间位移角	顶层位移
单周期点调整	37	56	31
多周期点调整	34	53	30
谱值匹配	27	35	22
人工合成	16	23	15

通过以上分析就可以明确知道估计结构地震反应时要达到设定的可靠度和允许误差所需要地震动样本容量;换言之,在设定数量地震动的作用下,可以知道样本均值对总体均值估计的可靠度及误差范围。

## 5 结语

确定地震动输入的样本容量是开展结构动力地震反应分析的必要环节,本文从一致可靠度的角度,研究了结构地震反应估计中地震动样本容量需求的确定方法。通过分析大样本地震动作用下结构非线性地震反应的统计特征,研究了取值方式对估计结构地震反应的影响。通过假设检验,分析了结构地震反应的概率分布模型,研究了基于可靠度的地震动样本容量的估计方法,并对比分析了不同地震动调整方法对样本容量需求的影响,为小样本地震动作用下结构地震反应的估计提供依据。研究表明:

(1) 结构地震反应的估计值一般应采用平均值法来确定。最大值法虽然从尽量安全的角度考虑了地震动随机性的影响,选取地震反应样本中最大值作为设计取值,但从统计结果来看,这种方法却增大了计算结果的不确定性,并且所确定的估计值可能会过于保守。平均值法的一阶和二阶矩随着样本容量的增加趋于平稳,其计算结果的不确定性也要低于最大值法。

(2) 通过假设检验,结构的地震反应最可接受对数极值分布的假设,也可接受对数正态分布假设,完全拒绝正态分布假设。

(3) 通过基于一致可靠度的地震动样本容量计算方法,可实现对结构反应估计值的置信水平和误差范围给出一个定量地判断。在可靠度和允许误差给定的情况下,减小地震反应的离散性可以有效减少地震动样本容量的需求。多周期点调整方法、谱值匹配法以及人工合成地震动能够有效地减小地震动输入的不确定性对结构地震反应的影响,进而减少地震动样本容量的需求。

(4) 实际上,结构动力地震反应分析的工况千差万别,对于确定地震动输入的样本容量,如何得到普适性的认识,仍需经过大量的统计分析和检验。鉴于目前结构动力分析效率的飞速提升,并结合目前国内外抗震设计规范的相关规定及本文的分析结果,为了较为准确的估计结构地震反应,建议至少采用 7 条记录作为地震动输入。

## 参考文献(References)

- [1] NIST. Selecting and Scaling Earthquake Ground Motions for Performing Response History[R]. Gaithersburg, Maryland: NEHRP Consultants Joint Venture, 2011.
- [2] HANCOCK J, BOMMER J J, STAFFORD P J. Numbers of Scaled and Matched Accelerograms Required for Inelastic Dynamic Analyses[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2008, 37(14): 1585-1607.
- [3] 陈波,温增平.考虑目标谱不确定性及谱形的实际地震动记录优化选取和调整方法[J].建筑结构学报, 2015, 36(11): 99-108. CHEN Bo, WEN Zengping. Optimized Real Ground Motion Selection and Scaling Method Considering the Uncertainty and Spectral Shape of Target Spectrum[J]. Journal of Building Structures, 2015, 36(11): 99-108.
- [4] 曲哲,叶列平,潘鹏.建筑结构弹塑性时程分析中地震动记录选取方法的比较研究[J].土木工程学报, 2011, 44(7): 10-21. QU Zhe, YE Lieping, PAN Peng. Comparative Study on Methods of Selecting Earthquake Ground Motions for Nonlinear Time History Analyses of Building Structures[J]. China Civil Engineering Journal, 2011, 44(7): 10-21.
- [5] 建筑抗震设计规范:GB50011-2010[S].北京:中国建筑工业出版社, 2010. Code for Seismic Design of Buildings: GB50011-2010[S]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2010.
- [6] 陈波.结构非线性动力分析中地震动记录的选择和调整方法研究[D].北京:中国地震局地球物理研究所, 2013. CHEN Bo. Ground Motion Selection and Modification Methods for Performing Nonlinear Dynamic Analysis of Buildings[D]. Beijing: Institute of Geophysics, China Earthquake Administration, 2013.
- [7] ATC. Seismic Performance Assessment of Buildings, 100% Draft[R]. Redwood City, California: Applied Technology Council, 2012.
- [8] 杨溥.基于位移的结构地震反应分析方法研究[D].重庆:重庆建筑大学, 1999. YANG Pu. Study on Structure Seismic Response Analysis Method Based on Displacement[D]. Chongqing: Chongqing Jianzhu University, 1999.
- [9] REYES J C, KALKAN E. How Many Records Should be Used in Asce/Sei-7 Ground Motion Scaling Procedure[J]. Earthquake Spectra, 2012, 28(3): 1223-1242.
- [10] ASCE. ASCE/SEI 7-05 Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures[S]. Reston, Engineer A S O C, 2006.
- [11] REINHORN A M, KUNNATH S K, VALLES R E, et al. A Computer Program for the Inelastic Damage Analysis of Buildings: IDARC2D Version 6.1[S]. 2006.
- [12] PEER. PEER Next Generation Attenuation (NGA) Database [http://peer.berkeley.edu/nga/\[DB/OL\]](http://peer.berkeley.edu/nga/[DB/OL]), 2008.
- [13] LUTES L D, CHOKSHI N C. Maximum Response Statistics for a Linear Structure[C]//Proc of the 5th World Conf. on Earthquake Engineering, 1972: 2818-2821.
- [14] 陈永祁.地震作用下结构弹塑性反应的统计分析[J].土木工程学报, 1986, 19(1): 16-26. CHEN Yongqi. Statistical Analysis of Static Structural Response by Time Integration[J]. China Civil Engineering Journal, 1986, 19(1): 16-26.
- [15] 赖明,杨红.罕遇地震作用下剪切型结构的可靠性分析[J].重庆建筑工程学院学报, 1994, 16(2): 13-24. LAI Ming, YANG Hong. Study on a Reliability on Shear-type Structure under Effects of Rare Earthquakes[J]. Journal of Chongqing Institute of Architectural & Environmental Engineering, 1994, 16(2): 13-24.