

适于声波方程数值模拟的时间-空间域有限差分算子改进线性算法^①

梁文全, 赖永明, 姜琳, 吴超凡

(龙岩学院资源工程学院, 福建 龙岩 364000)

摘要:有限差分法广泛应用于地震波场的数值延拓, 确定合适的有限差分算子以减小数值频散是有限差分法的一个重要研究内容。近年来为了进一步抑制数值频散和增加时间步长, 新的有限差分模板得到了应用, 对于此, 前人使用泰勒展开方法和最小二乘方法确定有限差分算子系数。本文在以前工作的基础上, 使用改进的线性方法确定新模板的有限差分系数, 并与传统模板线性方法进行对比; 通过频散分析和正演模拟验证出新模板线性方法能够更好地保持频散关系, 在相同的精度下效率提高了一倍, 从而说明了改进的线性方法的有效性。

关键词: 声波正演; 时间-空间域; 有限差分格式; 线性方法

中图分类号: P631.4

文献标志码: A

文章编号: 1000-0844(2016)05-0815-07

DOI: 10.3969/j.issn.1000-0844.2016.05.0815

Acoustic Wave Equation Modeling with a New Time-Space Domain Finite Difference Stencil and an Improved Linear Algorithm

LIANG Wen-quan, LAI Yong-ming, JIANG Lin, WU Chao-fan

(College of Resource Engineering, Longyan University, Longyan 364000, Fujian, China)

Abstract: Numerical methods prove useful in exploration seismology. The most commonly used numerical methods are the finite difference, finite volume, and finite element methods. These methods constitute the basis for reverse time migration and full-waveform inversion. Finite difference methods are widely used in wave field extrapolation because of their higher computation efficiency, lower memory requirements, and easier implementation. During discretization of the time and the spatial derivatives in the wave equation, grid dispersion often occurs. Grid dispersion can result in artificial waves and inaccurate wave fields. Therefore, finding suitable finite difference operator coefficients to preserve the dispersion relationship of the wave equation, thus reducing grid dispersion, is one of the most important issues when using finite difference methods. To reduce grid dispersion, the traditional method uses high-order finite difference schemes in the spatial domain. However, waves are simultaneously propagated in time and space. Therefore, some researchers propose finite difference schemes based on the time-space domain dispersion relationship. Most commonly used are the high-order Taylor expansion method and the optimized method. However, the time step is relative small even in the optimized time-space domain method. Recently, a new finite difference stencil has been proposed to increase the time step while preserving the accuracy with the least-squares method. The time-space domain dispersion relation-

① 收稿日期: 2015-09-11

基金项目: 福建省科技厅青年基金(2016J05104); 福建省教育厅项目(JK2014050); 龙岩学院博士启动基金(LB2014010)

作者简介: 梁文全(1983—), 男, 博士, 讲师, 主要从事地震波数值模拟与偏移研究。E-mail: onethink2002@foxmail.com。

ship of this new finite difference stencil is linear. Therefore, in this paper, we propose using this improved linear method, with the new finite difference stencil, to obtain the finite difference coefficients for the acoustic wave equation. We demonstrate, by dispersion analysis and numerical simulation, that with this new FD stencil and its improved linear solution, the wave equation simulation speed can be doubled compared with the previous linear method.

Key words: acoustic wave-equation modeling; time-space domain; finite difference scheme; linear method

0 引言

数值模拟在实践中得到了广泛的应用^[1-2]。其中有限差分方法因为计算效率高、所需内存小、实现简单而广泛应用于地震正演研究^[3-10],同时构成了逆时偏移成像和全波形反演的基础^[11-12]。

数值频散是有限差分研究的关键问题,直接影响着有限差分方法在波动方程中的应用。数值频散是对波动方程的时间和空间偏导数的离散化造成的,使得相速度变成了网格间距的函数,从而导致地震波的数值相速度不等于地球介质的真实相速度,使得波场模拟的精度降低。一般来说,如果存在时间频散,则高频的相速度增大;如果存在空间频散,则高频的相速度减小^[13]。

起初,波动方程空间偏导数的有限差分算子在空间域中确定。但地震波在时间域和空间域同时传播,因此在时间-空间域确定空间偏导数的有限差分算子能同时抑制时间频散和空间频散。Liu 等^[14]通过平面波理论和泰勒展开方法在时间-空间域确定有限差分算子系数。Yang 等^[15]提出和改进了近似解析离散化方法(NADM 方法)。Zhang 等^[7]提出使用模拟退火方法确定有限差分系数并指出合适的误差容限的重要性。笔者曾提出根据震源频率范围、波速和网格间距确定一个合适的波数范围,在此范围内使用线性方法确定有限差分系数,并取得了良好效果^[16]。为进一步压制频散和增加时间步长,Liu 等^[17]也提出新的有限差分模板并用最小二乘方法确定了相应的有限差分系数。本文使用线性方法确定新有限差分模板对应的系数,该方法比最小二乘方法计算系数的效率更高,可在保证有限差分算子精度的同时提高其计算效率。

1 有限差分算子确定方法

对于二维的声波方程,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (1)$$

其中: p 是压力波场或位移波场,在 (x, z) 两个方向

上的二阶空间偏导数,使用相同有限差分格式加以计算,并采用新的有限差分模板格式^[17][图 1(b)],可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \approx & \frac{1}{h^2} \left[(c_0 p_{0,0}^0 + \sum_{m=1}^M c_m (p_{-m,0}^0 + p_{m,0}^0)) \right] + \\ & \frac{1}{h^2} \left[c_0 p_{0,0}^0 + \sum_{m=1}^M c_m (p_{0,-m}^0 + p_{0,m}^0) \right] + \\ & \frac{d}{h^2} (p_{1,1}^0 + p_{1,-1}^0 + p_{-1,-1}^0 + p_{-1,1}^0) \end{aligned} \quad (2)$$

其中: c_m 和 d 表示有限差分系数[当 $d=0$ 时新差分模板格式退化到图 1(a)所示的传统差分模板格式]; h 表示网格长度(m); τ 表示时间步长(s), v 表示波速(m/s); M 表示差分格式的算子长度,其中

$$p_{m,n}^j = p(x + mh, y + nh, t + j\tau) \quad (3)$$

对于时间偏导数,采用二阶有限差分近似,得到

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \approx \frac{\delta^2 p}{\delta t^2} = \frac{1}{\tau^2} (-2p_{0,0}^0 + p_{0,0}^1 + p_{0,0}^{-1}) \quad (4)$$

将式(2)和式(4)带入式(1),可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2 \tau^2} (-2p_{0,0}^0 + p_{0,0}^1 + p_{0,0}^{-1}) \approx & \frac{1}{h^2} \left[c_0 p_{0,0}^0 + \sum_{m=1}^M c_m (p_{-m,0}^0 + p_{m,0}^0) \right] + \\ & \frac{1}{h^2} \left[c_0 p_{0,0}^0 + \sum_{m=1}^M c_m (p_{0,-m}^0 + p_{0,m}^0) \right] + \\ & \frac{d}{h^2} (p_{1,1}^0 + p_{1,-1}^0 + p_{-1,-1}^0 + p_{-1,1}^0) \end{aligned} \quad (5)$$

对式(5)进行傅里叶变换,可得

$$\begin{aligned} 2c_0 + 2 \sum_{m=1}^M c_m [\cos(mk_x h) + \cos(mk_z h)] + \\ 4d \cos(k_x h) \cos(k_z h) \approx \frac{1}{v^2} [2\cos(\omega\tau) - 2] \end{aligned} \quad (6)$$

令

$$k_x = k \cos \theta, k_z = k \sin \theta \quad (7)$$

其中: k 表示波数; θ 是平面角的传播角度; $r = \frac{v\tau}{h}$ 。

根据震源频率、速度和网格间距确定需要满足频散关系的波数范围占总波数的比例^[16],

$$r = \frac{k_u}{k_{\text{total}}} = \frac{2\pi f/v}{\pi/h} = \frac{f}{v/(2h)} \quad (8)$$

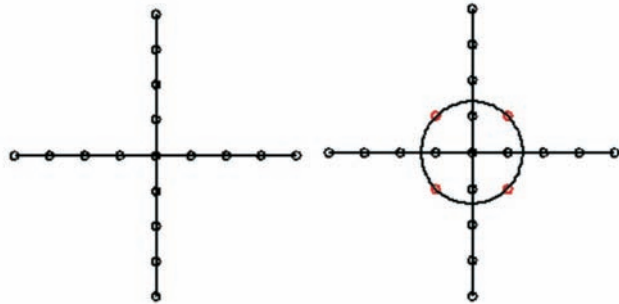
其中: f 是震源最高频率; v 表示地震波速度; h 表示空间采样间距。

$$\sum_{\theta=0}^{2\pi} \begin{bmatrix} 1 & \cos(k_{1,x}h) + \cos(k_{1,z}h) & L & \cos(Mk_{1,x}h) + \cos(Mk_{1,z}h) & 2\cos(k_{1,x}h)\cos(k_{1,z}h) \\ M & M & & M & \\ 1 & \cos(k_{M+1,x}h) + \cos(k_{M+1,z}h) & L & \cos(Mk_{M+1,x}h) + \cos(Mk_{M+1,z}h) & 2\cos(k_{M+1,x}h)\cos(k_{M+1,z}h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ M \\ c_M \\ d \end{bmatrix} = \sum_{\theta=0}^{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{\cos(k_1 v \tau) - 1}{r^2} \\ M \\ \frac{\cos(k_{M+1} v \tau) - 1}{r^2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

由于矩阵的条件数较大,解方程(9)不能确定合适的有限差分算子系数,因此需要对线性方法进行改进,使之适应新有限差分模板。通过研究分析,假

$$\sum_{\theta=0}^{2\pi} \begin{bmatrix} 1 & \cos(k_{1,x}h) + \cos(k_{1,z}h) & \cdots & \cos(Mk_{1,x}h) + \cos(Mk_{1,z}h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(k_{M+1,x}h) + \cos(k_{M+1,z}h) & \cdots & \cos(Mk_{M+1,x}h) + \cos(Mk_{M+1,z}h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_M \end{bmatrix} = \sum_{\theta=0}^{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{\cos(k_1 v \tau) - 1}{r^2} - 2d \cos(k_{1,x}h)\cos(k_{1,z}h) \\ \vdots \\ \frac{\cos(k_{M+1} v \tau) - 1}{r^2} - 2d \cos(k_{M+1,x}h)\cos(k_{M+1,z}h) \end{bmatrix} \quad (10)$$

方程(10)中,令有限差分算子系数 d 遍历数组 c 中元素,并对频散误差进行比较,得到频散误差最小的一组有限差分算子系数。由于线性方法的计算效率极高,即使进行了 3 次计算,其效率仍远高于最小二乘法。在方程(9)和(10)中, $k(i)$ ($i=1,2,\dots,M+1$) 均匀分布于 0 和 $r\pi/h$ 之间,而 r 通过式(8)确定。 k_i 的分量表示为 $k_{i,l}$, 其中 $l=(x,z)$ 。我们称方程(10)为新模板改进线性方法,当 $d=0$ 时,退化到传统模板线性方法。



(a) 传统有限差分模板

(b) 新有限差分模板

图 1 传统及新的有限差分模板

Fig.1 (a) The traditional and new FD stencil

在式(8)确定的波数范围内,使用之前提出的线性方法^[16],假设 $M+2$ 个均匀分布的波数点满足式(6)所示的时间-空间域频散关系,得到方程(9)所示的线性方程组:

设 $M+1$ 个均匀分布的波数点满足式(6)所示的时间-空间域频散关系,并令 $d=r^2/4$,得到方程(10)所示的线性方程组:

$$c_0 + \sum_{m=1}^M c_m [\cos(mk_x h) + \cos(mk_z h)] + 2d \cos(k_x h) \cos(k_z h) \approx \frac{-2}{r^2} \sin^2(\omega \tau / 2) \quad (11)$$

令式(11)左边

$$c_0 + \sum_{m=1}^M c_m [\cos(mk_x h) + \cos(mk_z h)] + 2d \cos(k_x h) \cos(k_z h) = g \quad (12)$$

由式(11)可知 $g \leq 0$ 。由于 $\sin^2(\omega \tau / 2) \leq 1$, 要保证稳定性,则必须满足条件

$$\frac{-r^2 g}{2} \leq 1 \quad (13)$$

整理得到

$$r \leq \sqrt{-2/g} \quad (14)$$

一般来说,随着波数(频率)的增加频散误差增大,令

$$k_x h = k_z h = \pi \quad (15)$$

将式(12)和(15)代入不等式(14),得到新模板线性方法稳定性条件

$$r \leq s = \sqrt{2 / \left[-c_0 + 2 \sum_{m=1}^M c_m (-1)^{m-1} - 2d \right]} \quad (16)$$

由方程(6)可以得到,

图 2 是新模板改进线性方法不同有限差分算子长度 M 、不同 r 值时的稳定性分析曲线图。从图 2 中可以看到, M 越大、 r 越大越容易造成不稳定, 因此当 r 值较大时(波速较大时), 应该采用较小的 M 值, 这和实际的模拟情况一致。

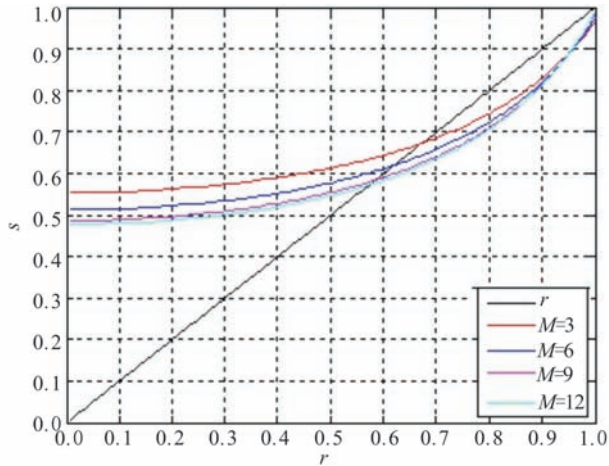


图 2 新模板线性方法的稳定性条件
Fig.2 Stability condition of the new linear method

2 频散分析

二维声波方程数值频散 $\delta(\theta)$ 定义为^[18]

$$\delta(\theta) = \frac{v_{\text{phase-grid}}(k, \theta, c_m)}{v_{\text{real}}} = \frac{1}{rkh} \cos^{-1} \left\{ 1 + \frac{r^2}{2} + [2c_0 + 2 \sum_{m=1}^M c_m (\cos mk_x h + \cos mk_z h) + 4d \cos(k_x h) \cos(k_z h)] \right\} \quad (17)$$

表 2 时间步长 $\tau=2.5$ ms 时新有限差分模板对应的有限差分系数 ($d=r^2/4$)
Table 2 FD coefficients for different velocities when $\tau=2.5$ ms with the new FD stencil ($d=r^2/4$)

$v/(\text{cm} \cdot \text{s}^{-1})$	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
1 500	-3.126 457 23	1.849 661 15	1.849 661 15	-0.392 510 593	-0.051 564 217 7	0.018 791 780 2	-0.005 526 414 47	0.000 927 240 452
2 000	-2.900 294 34	1.645 227 48	-0.251 498 726	0.046 241 724 2	-0.005 448 304 88			
2 500	-2.718 266 39	1.491 109 57	-0.173 719 93	0.017 329 493 3				

间步长增加到 $\tau=2.5$ ms 时仍然能够在 30 Hz 频率范围内使得误差小于 10^{-5} , 而使用传统的有限差分模板做不到这一点, 由此证明了新有限差分模板和线性方法的有效性。

3 数值模拟

3.1 均匀介质模型

首先考虑均匀介质模型, 对于所有的有限差分算子 $v=2\,000$ m/s, $h=20$ m, $\tau=2.5$ ms, $M=7$ 。模型大小是 $700\text{ m} \times 700\text{ m}$ 。震源在模型的中心位

置, $1-\delta(\theta)$ 表示数值频散, 其绝对值越小, 数值频散越小。

有限差分方法在一个空间网格上传播的时间误差是^[18]:

$$\epsilon = \frac{h}{v} (\delta^{-1} - 1) \quad (18)$$

表 1 比较了时间-空间域最小二乘方法, 传统模板线性方法和新模板线性方法在不同速度时频散误差绝对值小于 10^{-5} 所需的算子长度。由表 1 可见, 假如时间步长 $\tau=1$ ms, 当地震波速分别为 1 500、2 000 和 2 500 m/s 时, 最小二乘方法和传统模板线性方法对应的算子长度 M 分别为 7、4 和 3。由表 1 的最后一行可见, 当时间步长从 1 ms 增加到 2.5 ms 时, 新模板线性方法所需的算子长度并没有改变(仅仅增加了 d), 由此数值模拟需要的机时可以减少一半多。表 2 显示了表 1 最后一行所对应的系数。

表 1 不同方法 30 Hz 频率范围内误差小于 10^{-5} 需要的算子长度对比
Table 1 M required to ensure ϵ is less than 10^{-5} at a maximum frequency of 30 Hz with different methods

$h=20$	f_{max}/Hz	ϵ	不同速度对应的 M		
			1 500	2 000	2 500
最小二乘方法 ($\tau=1$ ms)	30	10^{-5}	7	4	3
传统模板线性方法 ($\tau=1$ ms)	30	10^{-5}	7	4	3
新模板线性方法 ($\tau=2.5$ ms)	30	10^{-5}	7	4	3

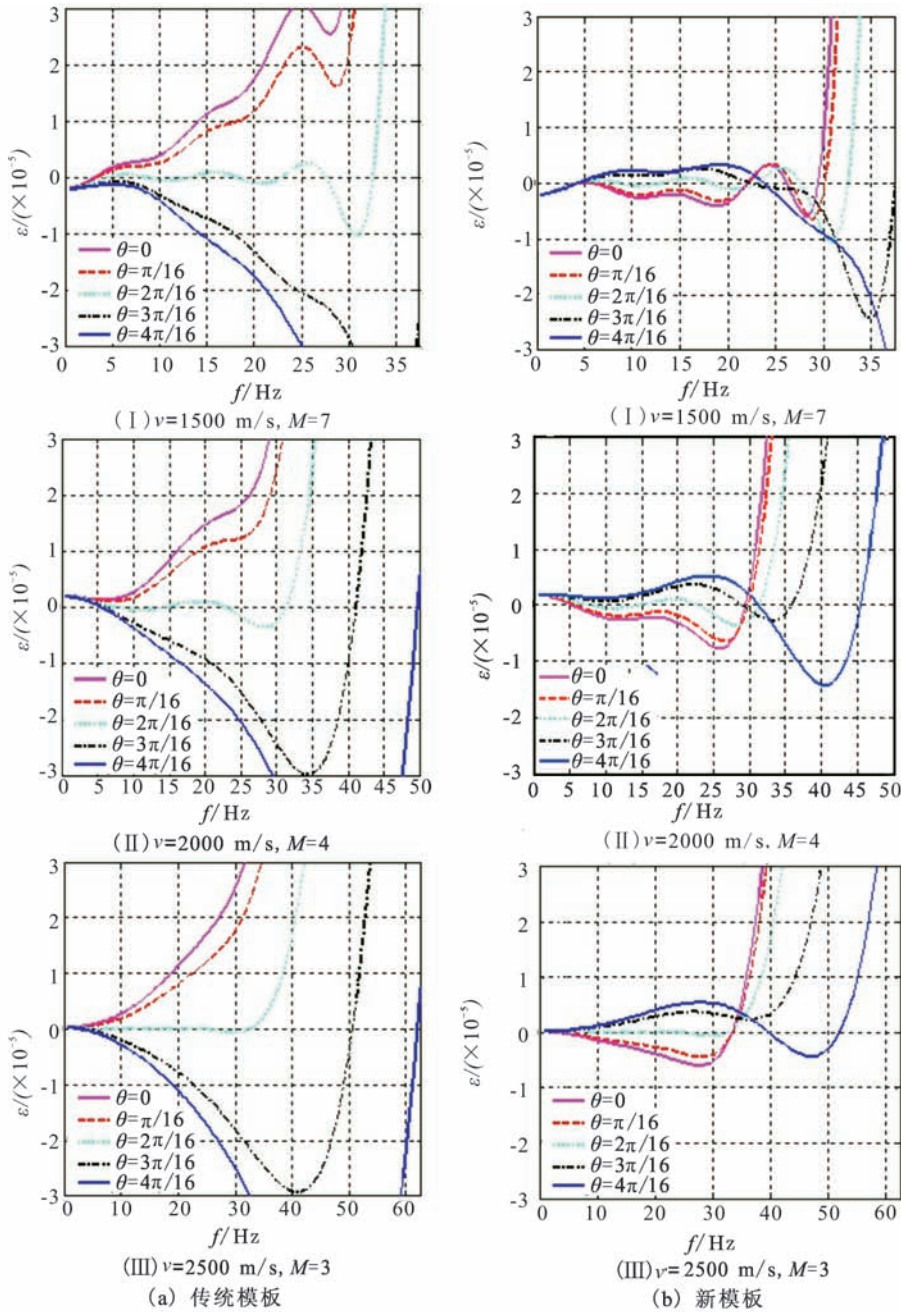
使用传统模板和新模板的线性方法数值频散如图 3 所示。由此可见, 使用新有限差分模板后, 时

置, 是高斯函数的二阶导数^[19],

$$w(t) = c \exp[-f_0^2(t-t_0)^2] \quad (18)$$

其中: $f_0=55$ Hz; f_0/π 是主频频率; $t_0=4/f_0$; c 是常数。

图 4 显示了 5 000 ms 时波场不同有限差分算法所对应快照的切片振幅图 ($z/dz=120$), 使用时间步长 1 ms 的传统模板线性方法作为解析解。从图 4 可见, 使用新模板线性方法后时间步长增加到 2.5 ms, 数值频散不明显; 而使用传统模板线性方法时

图 3 传统模板与新模板线性方法的频散误差($h=20$ m, $\tau=2.5$ ms)Fig.3 Dispersion error of the former and new linear method ($h=20$ m, $\tau=2.5$ ms)

间步长增加到 2.5 ms 后,数值频散明显。

4 盐丘模型

图 5 显示了美国勘探地球物理学会的盐丘模型,其速度从 1 500 m/s 变化到 4 800 m/s^[20]。震源位置用红色菱形表示。震源函数使用式(18),其中震源频率等于 45 Hz。对于所有的有限差分算子空间步长 $h=20$ m。采用变算子长度方法(Liu and Sen, 2011),当波速小于 2 000 m/s 时,算子长度 $M=7$;当波速大于等于 2 000 m/s 小于 2 500 m/s

时,算子长度 $M=4$;当波速大于等于 2 500 m/s 时,算子长度 $M=3$ 。图 6 显示了不同有限差分算子在 3 000 ms 时的波场快照切片振幅图($z=400$ m),其中时间-空间域泰勒展开方法时间步长 $\tau=1$ ms,时间-空间域传统模板线性方法时间步长 $\tau=1$ ms,新模板线性方法时间步长 $\tau=2.5$ ms。从图 6 红色椭圆中的部分对比可以看到,新模板线性方法在时间步长 $\tau=2.5$ ms 时的空间频散要小于时间-空间域泰勒展开方法在时间步长 $\tau=1$ ms 时的空间频散,而两者的时间频散相似(在波的传播过程中,空

间频散使得高频的相速度减小)。因此使用新模板线性方法既保持了精度又提高了计算效率。

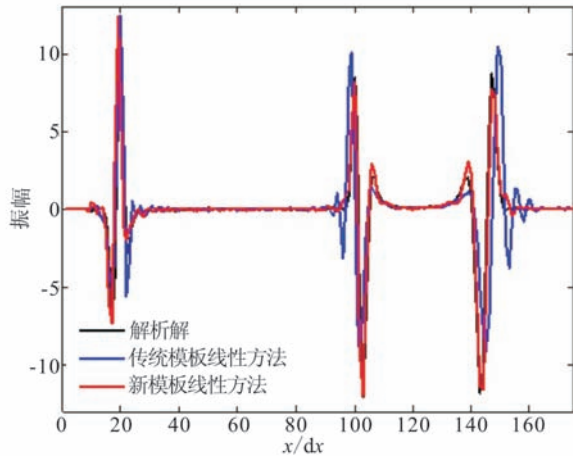


图 4 不同有限差分算子对应的波场快照切片图

Fig.4 Slices of wave field snapshots using different methods

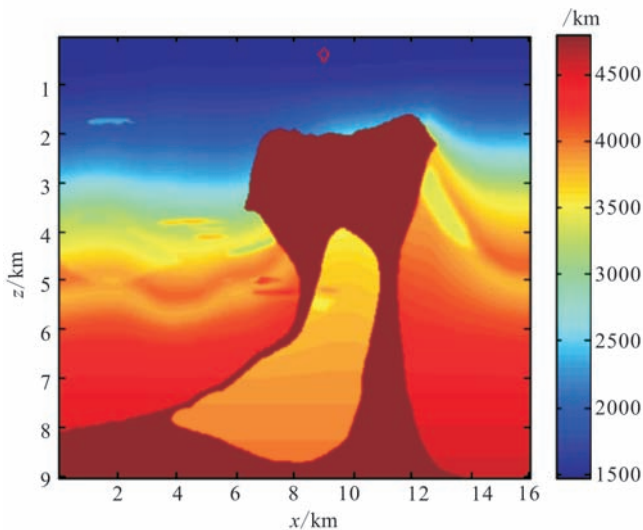


图 5 BP 盐丘速度模型

Fig.5 BP salt velocity model

图 6 波场快照的切片振幅对比图。从上到下依次是时间-空间域泰勒展开法;时间-空间域传统模板线性方法;时间-空间域新模板线性方法。

5 结论

基于前人提出的新有限差分模板,提出使用线性方法确定新有限差分模板对应的算子系数。其主要特点有二:其一是改进了线性方法,使之可以应用于新有限差分模板。使用新模板改进线性方法之后,在其他条件相同的情况下,时间步长可以从 1 ms 增加到 2.5 ms,使得数值模拟的效率提高了一倍多;其二,线性方法计算新模板有限差分系数的效

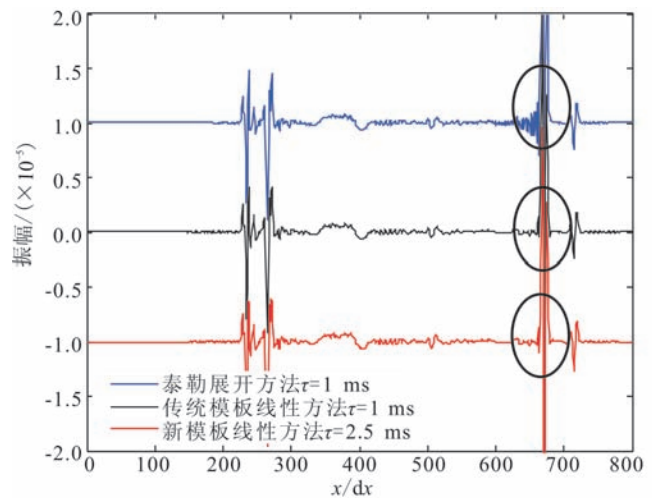


图 6 波场快照的切片振幅对比图

Fig.6 Comparison chart of slices of wave field snapshots

率要远高于优化方法计算新模板有限差分系数的效率。鉴于新模板线性有限差分方法能够有效去除频散,在保持相同精度的情况下提高了计算效率,因此可以代替传统的有限差分系数应用于声波数值模中。

参考文献 (References)

- [1] 连尉平,卢大伟,唐方头,等.汶川 $M_s 8.0$ 地震逆冲滑动沿断层深度的分布特征及其数值模拟解释[J].地震工程学报,2014,36(1):88-92.
LIAN Wei-ping, LU Da-wei, TANG Fang-tou, et al. Distribution Characteristics of the Thrust Slip along Fault Depth in the Wenchuan $M_s 8.0$ Earthquake and the Interpretation Based on Numerical Simulation[J]. China Earthquake Engineering Journal, 2014, 36(1): 88-92. (in Chinese)
- [2] 董非非,温燕林,邓辉,等.地震海啸在东海大陆架上传播过程的数值模拟研究[J].地震工程学报,2013,35(1):154-159.
Dong Fei-fei, WEN Yan-lin, DENG Hui, et al. Numerical Simulation of Seismic Tsunami Dissemination at the Continental Shelf of the East China Sea[J]. China Earthquake Engineering Journal, 2013, 35(1): 154-159. (in Chinese)
- [3] Marfurt K J. Accuracy of Finite-difference and Finite-element Modeling of the Scalar and Elastic Wave Equations[J]. Geophysics, 1984, 49(5): 533-549.
- [4] Dablain M A. The Application of High-order Differencing to the Scalar Wave Equation[J]. Geophysics, 1986, 51(1): 54-66.
- [5] Liu Y. Globally Optimal Finite-difference Schemes Based on Least Squares[J]. Geophysics, 2013, 78(4): T113-T132.
- [6] Chu C, Stoffa P L. Determination of Finite-difference Weights Using Scaled Binomial Windows[J]. Geophysics, 2012, 77(3): 17-26.
- [7] Zhang J H, Yao Z X. Optimized Finite-difference Operator for Broadband Seismic Wave Modeling[J]. Geophysics, 2012, 78

- (1):A13-A18.
- [8] 王德利,雍运动,韩立国,等.三维黏弹介质地震波场有限差分并行模拟[J].西北地震学报,2007,29(1):30-34.
WANG De-li, YONG Yun-dong, HAN Li-guo, et al. Parallel Simulation of Finite Difference for Seismic Wavefield Modeling in 3-D Viscoelastic Media [J]. Northwestern Seismological Journal, 2007, 29(1): 30-34. (in Chinese)
- [9] 严武建,王彦宾,石玉成.基于伪谱和有限差分混合方法的兰州盆地强地面运动二维数值模拟[J].西北地震学报,2013,35(2):302-310.
YAN Wu-jian, WANG Yan-bin, SHI Yu-cheng. 2D Simulation of the Strong Ground Motion in Lanzhou Basin with Hybrid PSM/FDM Method [J]. China Earthquake Engineering Journal, 2013, 35(2): 302-310. (in Chinese)
- [10] 黄翼坚.非均匀 TI 介质 P-SV 波传播交错网格高阶有限差分数值模拟[J].西北地震学报,2008,30(1):11-16.
HUANG Yi-jian. High-order Staggered-grid Finite Difference Numerical Modeling for P-SV Wave Propagation in Heterogeneous Transversely Isotropic Media [J]. Northwestern Seismological Journal, 2008, 30(1): 11-16. (in Chinese)
- [11] Liu H W, Li B, Liu H, et al. The Issues of Prestack Reverse Time Migration and Solutions with Graphic Processing Unit Implementation [J]. Geophysical Prospecting, 2012, 60(5): 906-918.
- [12] Yan H, Liu Y. Pre-stack Reverse-time Migration Based on the Time-space Domain Adaptive High-order Finite-difference Method in Acoustic VTI Medium [J]. Journal of Geophysics and Engineering, 2013, 10(1): 015010.
- [13] Dablain M. The Application of High-order Differencing to the Scalar Wave Equation [J]. Geophysics, 1986, 51(1): 54-66.
- [14] Liu Y, M K Sen. Acoustic VTI Modeling with a Time-space Domain Dispersion-relation-based Finite-difference Scheme [J]. Geophysics, 2010, 75(3): 7-13.
- [15] Yang D, Lu M, Wu R S, et al. An Optimal Nearly-analytic Discrete Method for 2D Acoustic and Elastic Wave Equations [J]. Bull Seismol Soc Am, 2004, 94(5): 1982-1991.
- [16] Liang W Q, Wang Y F, Yang C C. Comparison of Numerical Dispersion in Acoustic Finite-difference Algorithms [J]. Exploration Geophysics, 2014, 46(2): 206-212.
- [17] Liu H, Dai N, Niu F, et al. An Explicit Time Evolution Method for Acoustic Wave Propagation [J]. Geophysics, 2014, 79(3): 117-124.
- [18] Liu Y, M K Sen. A New Time-space Domain High-order Finite-difference Method for the Acoustic Wave Equation [J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228: 8779-8806.
- [19] 王彦飞, I E 斯捷潘诺娃, V N 提塔连科, 等. 地球物理数值反演问题 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.
WANG Yan-fei, Stepanova I E, Titarenko V N, et al. Inverse Problems in Geophysics and Solution Method [M]. Beijing: Higher Education Press, 2011. (in Chinese)
- [20] Billette F J, S Brandsberry-Dahl. The 2004 BP Velocity Benchmark [C] // 67th Annual EAGE Meeting, EAGE, Expanded Abstracts, B305.