

## 基于综合刚度原理的陡坡基桩有限杆单元分析<sup>①</sup>

杨超炜<sup>1</sup>, 赵明华<sup>1</sup>, 尹平保<sup>2</sup>, 刘 猛<sup>1</sup>

(1. 湖南大学岩土工程研究所, 湖南 长沙 410082; 2. 长沙理工大学土木与建筑学院, 湖南 长沙 410114)

**摘要:**为分析陡坡段桥梁基桩内力及变形特性,提出一种有限杆单元计算方法。首先,基于综合刚度原理并引入双参数地基模型,建立适用于陡坡基桩内力计算分析的修正有限杆单元刚度方程;在此基础上结合杆系结构受力特征,提出考虑  $P-\Delta$  效应的杆单元修正矩阵;最后,根据有限杆单元计算原理,基于 MATLAB 平台编制计算程序,并对某工程实例进行分析。计算结果显示:改进有限杆单元方法可行且具有较高的精度;陡坡段桥梁基桩  $P-\Delta$  效应显著,应在设计计算中予以考虑;在浅层地基土抗力计算中双参数地基模型较  $m$  法精度更高。

**关键词:** 桥梁工程; 桩基础; 有限杆单元法; 综合刚度原理;  $P-\Delta$  效应

中图分类号: U443.15

文献标志码: A

文章编号: 1000-0844(2015)增刊 1-0046-06

DOI: 10.3969/j.issn.1000-0844.2015.02.0563

## Finite Bar Element Analysis of Bridge Pile Foundation in Steep Slopes Based on Composite Stiffness Principle

YANG Chao-wei<sup>1</sup>, ZHAO Ming-hua<sup>1</sup>, YIN Ping-bao<sup>2</sup>, LIU Meng<sup>1</sup>

(1. Geotechnical Engineering Institute, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China;

2. School of Civil Engineering and Architecture, Changsha University of Science and Technology, Changsha, Hunan 410114, China)

**Abstract:** A finite member element method is proposed for the analysis of the deformation of a bridge slope pile located on a steep slope. A modified finite member element method based on the composite stiffness principle and double-parameter ground model was established that was suitable for the calculation, and analysis of the stresses on the slope pile. Next, taking into account the load response of the bar system, a modified matrix of the bar element incorporating the  $P-\Delta$  effect was developed. The next step involved writing a MATLAB program which was used to analyze a real example. The results showed that the precise, proposed method was valid. Also, the  $P-\Delta$  effect was too considerable to be ignored in the design and calculation and double-parameter model works better than  $m$ -model on shallow ground.

**Key words:** bridge engineering; pile foundation; finite member element method; composite stiffness principle;  $P-\Delta$  effect

① 收稿日期: 2015-03-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51278187; 51408066)

作者简介: 杨超炜(1988-), 男, 湖南长沙人, 博士研究生, 主要研究方向为桩基础计算与分析。E-mail: ycw1988@sina.com

通讯作者: 赵明华(1956-), 男, 湖南邵阳人, 教授, 博士研究生导师, 主要从事桩基础计算与分析方面的教学研究。

E-mail: mhzhaohd@21cn.com

## 0 引言

随着高速公路向山区推进,部分路线须穿越崇山峻岭,由于地质条件复杂、沿线土地宝贵、耕地资源紧缺等原因,导致高桥墩林立,很多桥梁桩基需要设置在陡坡地段<sup>[1]</sup>。陡坡段桥梁基桩受力特性十分复杂,除受到上部结构传来的复杂荷载外,还要承受来自坡体的剩余下滑力。此外,由于桩前土体缺失、上覆土层软弱,桩土共同作用机理较平地基桩复杂得多<sup>[2]</sup>。

现行规范中尚无陡坡基桩内力计算方法,设计过程大多参照平地桩或不考虑潜在滑动面以上地基土抗力,而这或将低估基桩水平位移引发工程事故,或将低估地基土抗力造成不必要的浪费。为此,国内外部分学者开展了理论与试验研究。Meyerhof<sup>[3]</sup>最早研究了倾斜荷载下成层土地基中的基桩承载机理;赵文<sup>[4]</sup>给出了竖向荷载下陡坡段桥梁桩基安全距离计算方法;赵明华<sup>[5]</sup>、杨明辉<sup>[6]</sup>分别提出了陡坡段桥梁桩基位移及内力分析的有限差分解答与幂级数解答;龚先兵<sup>[7]</sup>、尹平保<sup>[8]</sup>以实际工程为原型,依据相似原理完成了高陡横坡桥梁双桩基础模型试验,得到了桩基及边坡变形发展规律。然而,上述研究中少有对桩基与边坡相互作用的探讨,或是简单的对水平抗力乘以折减系数,难以准确计算桩前土体抗力。为弥补弹性地基反力法参数单一的缺陷,Vlasov<sup>[9]</sup>与 Pasternak<sup>[10]</sup>分别提出了双参数地基模型;张望喜<sup>[11]</sup>基于双参数地基理论,获得了横向荷载作用下基桩水平位移解析解;梁发云<sup>[12]</sup>基于 Pasternak 模型,提出了双参数水平受荷桩计算方法。引入双参数地基模型对横向受荷桩的计算精度提高起到了重要作用,然而陡坡基桩与横向受荷桩有显著差异,现有研究中亦鲜少将基桩与边坡作为整体进行分析。

鉴于此,本文基于综合刚度原理将基桩及地基土综合考虑,通过引入双参数地基模型,以有限杆单元方法为求解手段,建立综合考虑桩土相互作用及  $P-\Delta$  效应,适用于陡坡段桥梁基桩计算分析的改进有限杆单元方法,并在此基础上分析轴力对  $P-\Delta$  效应的影响以及双参数地基法与  $m$  法的区别,以期为类似工程提供参考。

## 1 陡坡段桥梁基桩受力分析

陡坡段桥梁基桩属于复杂受荷桩,与普通桥梁基桩不同之处在于其不仅受到来自上部结构传来的

轴、横向荷载以及弯矩,还要承受坡体传来的剩余下滑力(图 1)。此外,由于桩前临空面的存在,桩前一侧不再是半无限空间,坡面以下土体在一定深度内无法正常提供抗力,加上陡坡段桥梁基桩自由段长,  $P-\Delta$  效应明显,这导致基桩易产生较大的水平位移。

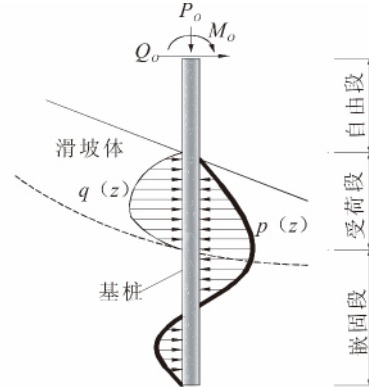


图 1 陡坡段桥梁基桩受力分析

Fig. 1 Force analysis of the bridge pile foundation in a steep slope

根据陡坡基桩受力特性及计算分析需要,将陡坡段桥梁基桩分为自由段、受荷段及嵌固段<sup>[13]</sup>,并对地基模型做如下假定:

针对陡坡基桩桩前土抗力弱化效应,引入 Pasternak 双参数地基模型<sup>[10]</sup>,在 Winkler 地基模型的基础上,假定各弹簧单元间存在剪切相互作用。该模型可以表述为:

$$p(z) = mb_0zx + Q_p \quad (1)$$

$$Q_p = G_p b_0 \gamma \quad (2)$$

式中:  $p(z)$  为单位长度上地基土水平抗力(kN/m);  $m$  为地基抗力比例系数(kN/m<sup>4</sup>);  $b_0$  为桩计算宽度(m);  $z$  为坡面以下深度(m);  $x$  为桩身水平位移(m);  $Q_p$  为土体剪切力(kN);  $G_p$  为桩侧土体剪切模量(kPa);  $\gamma$  为土体剪应变。

该模型力学概念明确,采用地基抗力比例系数  $m$  及地基土剪切模量两个独立参数描述地基土水平抗力特性,使地基土水平抗力评价指标不再单一,同时还改进了 Winkler 地基模型不连续的缺陷。不难发现,当  $G_p=0$  时,此模型即退化为 Winkler 地基模型,当无  $G_p$  实测值时可通过下式求出:

$$G_p = \frac{E_s}{2(1+\nu)} \quad (3)$$

式中:  $E_s$  为地基土压缩模量(kN/m<sup>2</sup>);  $\nu$  为地基土泊松比。

## 2 基于综合刚度原理的有限杆单元方法

有限杆单元是一种两节点有限单元法,适用于工程中各种杆系结构计算分析,然而普通的杆单元无法考虑桩土共同作用以及  $P-\Delta$  效应即轴力对剪力和弯矩的影响,需修正单元刚度矩阵。

平面杆单元如图 2 所示,杆单元长度为  $l_i$ ,截面积  $A$ ,截面惯性矩  $I$ ,弹性模量  $E$ ,  $\bar{F}_{Ni}$ 、 $\bar{F}_{Qi}$ 、 $\bar{M}_i$  为作用于节点  $i$  的轴力、剪力和弯矩,  $\bar{F}_{Nj}$ 、 $\bar{F}_{Qj}$ 、 $\bar{M}_j$  为作用于节点  $j$  的轴力、剪力和弯矩。各物理量正方向如图 2 所示。

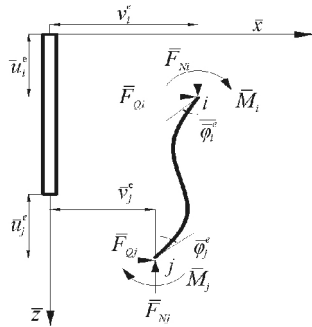


图 2 杆单元受力变形分析示意图

Fig. 2 Force and deformation analysis of pole element

取单元挠曲函数为  $z$  的三次多项式:

$$v(\bar{z}) = a + b\bar{z} + c\bar{z}^2 + d\bar{z}^3 \quad (4)$$

杆端力矩阵与杆端位移矩阵分别为:

$$\bar{\mathbf{F}}^e = [\bar{F}_{Ni} \quad \bar{F}_{Qi} \quad \bar{M}_i \quad \bar{F}_{Nj} \quad \bar{F}_{Qj} \quad \bar{M}_j]^T \quad (5)$$

$$\bar{\boldsymbol{\delta}}^e = [\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{\varphi}_i \quad \bar{u}_j \quad \bar{v}_j \quad \bar{\varphi}_j]^T \quad (6)$$

杆端力与对应的杆端位移关系可用单元刚度矩阵描述如下:

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{k}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \quad (7)$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_i} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_i^3} & \frac{6EI}{l_i^2} & 0 & -\frac{12EI}{l_i^3} & \frac{6EI}{l_i^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_i^2} & \frac{4EI}{l_i} & 0 & -\frac{6EI}{l_i^2} & \frac{2EI}{l_i} \\ -\frac{EA}{l_i} & 0 & 0 & \frac{EA}{l_i} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l_i^3} & -\frac{6EI}{l_i^2} & 0 & \frac{12EI}{l_i^3} & -\frac{6EI}{l_i^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_i^2} & \frac{2EI}{l_i} & 0 & -\frac{6EI}{l_i^2} & \frac{4EI}{l_i} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中:  $l_i$  为杆单元长度。

### 2.1 有限杆单元方法与综合刚度原理

目前在基桩水平承载力计算方法中,基桩刚度

大多仅取决于桩身材料的物理属性,与桩周土体无关。但事实上,设置于岩土体中的基桩刚度是桩土共同作用的结果,由桩身材料、荷载大小以及土体抗力综合确定,即为综合刚度<sup>[15]</sup>。本文从有限单元法等效节点力的概念出发,将剩余下滑力及桩周土抗力分别等效为单元节点力与桩身刚度的增量,以综合考虑桩土相互作用,具体推导过程如下。

将基桩离散为有限个杆单元,取其中任一单元进行分析,设该单元上节点  $i$  与地面距离为  $h_i$ ,单元长度为  $l_i$ ,如图 3 所示。

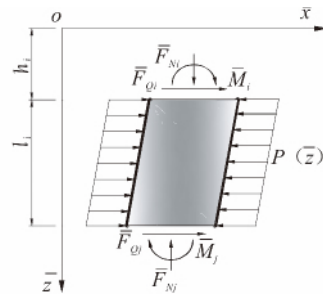


图 3 桩单元与土共同作用

Fig. 3 Interaction between pile element and soil

根据式(4)假定,桩身位移用三次幂表示时,单元内部任一点位移与单元节点位移可由如下关系描述:

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u \\ \mathbf{N}_v \\ \mathbf{N}_\varphi \end{bmatrix} (\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{\varphi}_i \quad \bar{u}_j \quad \bar{v}_j \quad \bar{\varphi}_j)^T \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_u \\ \mathbf{N}_v \\ \mathbf{N}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\bar{z}}{l_i} & 0 & 0 & \frac{\bar{z}}{l_i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3\bar{z}^2}{l_i^2} + \frac{2\bar{z}^3}{l_i^3} & -\bar{z} + \frac{2\bar{z}^2}{l_i} + \frac{\bar{z}^3}{l_i^2} & 0 & \frac{3\bar{z}^2}{l_i^2} - \frac{2\bar{z}^3}{l_i^3} & \frac{\bar{z}^2}{l_i} - \frac{\bar{z}^3}{l_i^2} \\ 0 & \frac{\bar{z}}{l_i^2} + \frac{6\bar{z}^2}{l_i^3} & -1 + \frac{4\bar{z}}{l_i} - \frac{3\bar{z}^2}{l_i^2} & 0 & \frac{6\bar{z}}{l_i^2} + \frac{6\bar{z}^2}{l_i^3} & \frac{2\bar{z}}{l_i} - \frac{3\bar{z}^2}{l_i^2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中:  $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 、 $\bar{\varphi}$  分别表示单元内部一点的竖向、水平和转角位移;  $\mathbf{N}_u$ 、 $\mathbf{N}_v$ 、 $\mathbf{N}_\varphi$  分别为对应的形函数矩阵。

依据有限元等效节点荷载处理方法,将作用于单元内部的荷载(剩余下滑力及桩周土抗力)根据等效虚功原理“移植”到单元节点上,剩余下滑力  $q(\bar{z})$  等效节点力表达式为:

$$\bar{\mathbf{F}}_q^e = \int_0^{l_i} \mathbf{N}_v^T q(\bar{z}) d\bar{z} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{q(\bar{z})l_i}{2} & \frac{q(\bar{z})l_i^3}{12} & 0 & -\frac{q(\bar{z})l_i}{2} & -\frac{q(\bar{z})l_i^3}{12} \end{pmatrix}^T \quad (11)$$

同理,桩周土抗力亦可用等效节点力表示,并将土体剪应变  $\gamma$  用单元体转角表示,即:

$$Q_p = G_p b_0 \frac{d\bar{x}}{dz} = G_p b_0 \bar{\varphi} \quad (12)$$

结合式(1)、式(2)可得土体抗力等效节点力表达式为:

$$\bar{F}_p^e = \int_0^{l_i} (N^T m b_0 z \bar{u} + N_\varphi^T G_p b_0 \bar{\varphi}) dz \quad (13)$$

带入式(9)、(10),积分可得:

$$\bar{F}_p^e = (k_1 + k_2) (\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{\varphi}_i \quad \bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{\varphi}_i)^T \quad (14)$$

$$k_1 = m(h_i + \frac{l_i}{2})b_0$$

$$k_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35}l_i & \frac{11}{210}l_i & 0 & \frac{9}{70}l_i & -\frac{13}{420}l_i^2 \\ 0 & \frac{11}{210}l_i & \frac{1}{105}l_i^3 & 0 & -\frac{19}{140}l_i^2 & -\frac{1}{140}l_i^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70}l_i & -\frac{19}{140}l_i^2 & 0 & \frac{13}{35}l_i & -\frac{11}{210}l_i^2 \\ 0 & -\frac{13}{420}l_i^2 & -\frac{1}{140}l_i^3 & 0 & -\frac{1}{140}l_i^3 & \frac{1}{105}l_i^3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$k_2 = G_p b_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5l_i} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5l_i} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{15l_i} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{l_i}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5l_i} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5l_i} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{l_i}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2}{15l_i} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$k_2, k_3$  即为考虑综合刚度原理及双参数地基模型后有限杆单元刚度矩阵的修正矩阵。

### 2.2 考虑 $P-\Delta$ 效应的杆单元方法

考虑到高陡边坡上桥梁基桩自由段长,且坡面以下一定深度内土体无法提供充足的抗力,因而存在明显的“ $P-\Delta$ ”效应,而普通有限杆单元方法无法考虑到这一点。因此应对有限杆单元进行适当改进,具体过程介绍如下。

对杆单元分析下端中点取矩(图 3),结合材料力学中弯矩、剪力与水平位移的关系,可导得杆单元节点荷载与节点位移关系如下<sup>[16]</sup>:

$$\begin{cases} \bar{F}_Q^e = EI \frac{d^3 \bar{x}}{dz^3} + p_{ij}(\bar{v}_i^e - \bar{v}_j^e)/l_i \\ \bar{M}_i^e = EI \frac{d^2 \bar{x}}{dz^2} \\ \bar{F}_Q^e = -EI \frac{d^3 \bar{x}}{dz^3} - p_{ij}(\bar{v}_i^e - \bar{v}_j^e)/l_i \\ \bar{M}_i^e = -EI \frac{d^2 \bar{x}}{dz^2} \end{cases} \quad (17)$$

式中,  $p_{ij}$  为杆单元中点轴力。

式(17)即可考虑单元轴力对剪力的影响,对比式(8)可得到考虑  $P-\Delta$  效应的修正单元刚度矩阵:

$$k_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{p_{ij}}{l_i} & 0 & 0 & -\frac{p_{ij}}{l_i} & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{p_{ij}}{l_i} & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

对称

### 2.3 考虑综合刚度原理及 $P-\Delta$ 效应的杆单元方法

综合上述部分,结合式(7~8)、(14~16)、(18)可得考虑综合刚度原理及  $P-\Delta$  效应且具有统一形式的杆单元刚度矩阵  $K = k + k_1 + k_2 + k_3$ 。

式(19)(见第 51 页)即适用于陡坡段桥梁基桩内力计算的有限杆单元的刚度方程,且适用于双参数地基,解决了普通有限杆单元方法难以真正考虑桩土共同工作及  $P-\Delta$  效应的问题。

## 3 算例验证

为验证本文方法的正确性,以某高速公路陡坡段桩柱式桥梁基桩为例进行计算。该桥梁 4 号墩基桩设置于河岸陡坡上(图 4)。基桩自由段桩长 39.6 m,其中  $L_1 = 14$  m,  $L_2 = 14$  m,  $L_3 = 11.6$  m,  $d_1 = 2.2$  m,  $d_2 = 2.0$  m,  $d_3 = 1.8$  m,坡面以下桩长  $H = 25$  m,桩径  $D = 2.5$  m,桩身混凝土弹性模量  $E = 2.8 \times 10^4$  MPa。桩侧岩土体由强风化白云质灰岩和中风化白云质灰岩组成。地基土计算参数如表 1 所示。

表 1 地基土计算参数

Table 1 Calculation parameters of foundation soils

土层	厚度/m	水平抗力比例系数/(MN·m <sup>-4</sup> )	剪切模量/MPa
强风化白云质灰岩	5	10	1.5
中风化白云质灰岩	20	72	20

桩顶荷载为:轴力  $P_0 = 7\ 227.5$  kN,水平力  $Q_0$

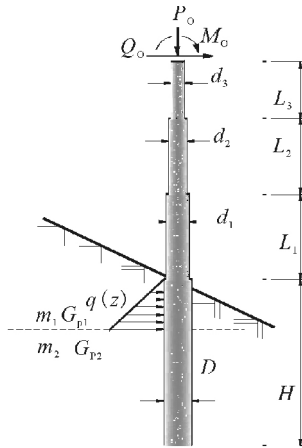


图4 桩柱式桥梁基桩计算简图

Fig. 4 Calculation diagram of the pile-column bridge pile  
 $= 78 \text{ kN}$ , 弯矩  $M_0 = 112 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , 剩余下滑力合力为  $375 \text{ kN}$ , 按三角形分布。根据本文提出的改进有限杆单元方法, 将基桩划分为 645 个杆单元, 以编制的 MATLAB 程序计算, 计算结果与文献[13]方法比较, 如图 5 所示。

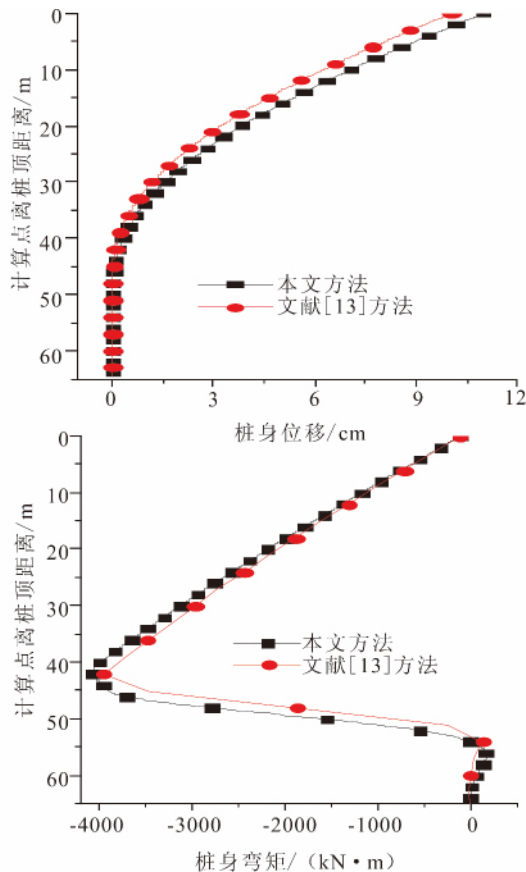


图5 桩身位移及弯矩计算结果对比

Fig. 5 Displacement and bending moment of the pile shaft

文献[13]为幂级数方法, 图 5 表明采用本文方法计算的桩身位移及弯矩与文献[13]计算结果吻合

较好, 说明本文方法是可行的, 可为类似工程提供参考。

#### 4 结论

(1) 本文基于综合刚度原理推导的杆单元刚度方程适用于双参数地基模型且能考虑  $P-\Delta$  效应, 具有统一形式, 可用于复杂荷载下陡坡基桩计算分析;

(2) 陡坡基桩自由段长, 横向荷载大, 竖向荷载对桩身水平位移及弯矩有显著影响, 因此设计计算过程中应当考虑  $P-\Delta$  效应, 不宜采用小变形叠加原理。

#### 参考文献 (References)

- [1] 赵明华, 刘建华, 杨明辉. 倾斜荷载下高陡边坡桥梁基桩内力计算[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(11): 2352-2357.
- [2] 冯忠居. 特殊地区基础工程[M]. 北京: 人民交通出版社, 2008.
- [3] Meyerhof G G, Mathur S K, Valsnagar A J. The Bearing Capacity of Rigid Piles and Pile Groups Under Inclined Loads in Layered Sand[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1981, 18(4): 514-519.
- [4] 赵文, 谢强, 李娅. 高陡边坡桥基安全距离研究[J]. 铁道工程学报, 2006, 23(6): 47-50.
- [5] ZHAO Ming-hua, LIU Jian-hua, LIU Dai-quan. Force Analysis of Pile Foundation in Rock Slope Based on Upper-bound Theorem of Limit[J]. Journal of Central South University of Technology, 2008, 15(3): 404-410.
- [6] 杨明辉, 赵明华, 刘建华, 等. 高陡边坡桥梁基桩内力计算的幂级数解[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2007, 38(3): 561-566.
- [7] 龚先兵, 杨明辉, 赵明华, 等. 山区高陡横坡段桥梁桩基承载力模型试验[J]. 中国公路学报, 2013, 26(2): 56-61.
- [8] 尹平保, 赵明华, 杨超炜, 等. 复杂荷载下横坡段桥梁桩基承载特性试验研究[J]. 土木工程学报, 2014, 47(5): 110-117.
- [9] Vlasov V Z, Leontiev N N. Beams, Plates and Shells on Elastic Foundation[R]. Washington DC: NTIS Accession No. N67-14238, Israel Program for Scientific Translations, 1966.
- [10] Pasteranak P L. Fundamentals of a New Method of Analyzing Structures on an Elastic Foundation by Means of two Foundation Constants [M]. Moscow: Gosudarstvennoe Izdatelstvo Liberaturi po Stroitelstvu Arkhitekture, 1954.
- [11] 张望喜, 易韦建, 陈友坤, 等. 双参数地基推力长桩的水平位移解析解[J]. 建筑科学与工程学报, 2007, 24(4): 34-38.
- [12] 梁发云, 李彦初, 黄茂松. 基于 Pasternak 双参数地基模型水平桩简化分析方法[J]. 岩土工程学报, 2013(S1): 300-304.
- [13] 尹平保, 赵明华, 杨明辉, 等. 考虑  $P-\Delta$  效应的陡坡段桥梁双桩结构受力分析[J]. 湖南大学学报: 自然科学版, 2012, 39(1): 1-6.
- [14] 戴自航. 抗滑桩滑坡推力和桩前滑体抗力分布规律的研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(4): 517-521.
- [15] 吴恒立. 计算推力桩的综合刚度原理和双参数法(第2版)[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000.
- [16] 赵明华, 李微哲, 曹文贵. 复杂荷载及边界条件下基桩有限杆单元方法研究[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(9): 1059-1063.

$$\begin{pmatrix} \bar{F}_{Ni}, \bar{F}_{Qi}, \bar{M}_i, \bar{F}_{Ni}, \bar{F}_{Qi}, \bar{M}_j \end{pmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_i^3} + \frac{P_{\beta}}{l_i} + mb_0(h_i + \frac{l_i}{2}) & \frac{l_i}{2} \frac{13}{35} & \frac{6EI}{l_i^2} + \frac{6G_p b_0}{5l_i} & \frac{l_i}{2} \frac{11}{210} & \frac{G_p b_0}{10} \\ 0 & \frac{12EI}{l_i^3} - \frac{P_{\beta}}{l_i} + mb_0(h_i + \frac{l_i}{2}) & \frac{l_i}{2} \frac{9}{70} & \frac{6EI}{l_i^2} - \frac{6G_p b_0}{5l_i} & \frac{l_i}{2} \frac{13}{420} & \frac{G_p b_0}{10} \\ 0 & -\frac{6EI}{l_i^2} - mb_0(h_i + \frac{l_i}{2}) & \frac{l_i}{2} \frac{19}{140} & \frac{G_p b_0}{10} & \frac{l_i}{2} \frac{1}{140} & -\frac{G_p b_0}{30} \\ \frac{EA}{l_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_i^3} + \frac{P_{\beta}}{l_i} + mb_0(h_i + \frac{l_i}{2}) & \frac{l_i}{2} \frac{13}{35} & \frac{6EI}{l_i^2} + \frac{6G_p b_0}{5l_i} & \frac{l_i}{2} \frac{11}{210} & \frac{G_p b_0}{10} \\ 0 & \frac{12EI}{l_i^3} - \frac{P_{\beta}}{l_i} + mb_0(h_i + \frac{l_i}{2}) & \frac{l_i}{2} \frac{9}{70} & \frac{6EI}{l_i^2} - \frac{6G_p b_0}{5l_i} & \frac{l_i}{2} \frac{13}{420} & \frac{G_p b_0}{10} \\ 0 & -\frac{6EI}{l_i^2} - mb_0(h_i + \frac{l_i}{2}) & \frac{l_i}{2} \frac{19}{140} & \frac{G_p b_0}{10} & \frac{l_i}{2} \frac{1}{140} & -\frac{G_p b_0}{30} \\ \frac{EA}{l_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_i^3} + \frac{P_{\beta}}{l_i} + mb_0(h_i + \frac{l_i}{2}) & \frac{l_i}{2} \frac{13}{35} & \frac{6EI}{l_i^2} + \frac{6G_p b_0}{5l_i} & \frac{l_i}{2} \frac{11}{210} & \frac{G_p b_0}{10} \\ 0 & \frac{12EI}{l_i^3} - \frac{P_{\beta}}{l_i} + mb_0(h_i + \frac{l_i}{2}) & \frac{l_i}{2} \frac{9}{70} & \frac{6EI}{l_i^2} - \frac{6G_p b_0}{5l_i} & \frac{l_i}{2} \frac{13}{420} & \frac{G_p b_0}{10} \\ 0 & -\frac{6EI}{l_i^2} - mb_0(h_i + \frac{l_i}{2}) & \frac{l_i}{2} \frac{19}{140} & \frac{G_p b_0}{10} & \frac{l_i}{2} \frac{1}{140} & -\frac{G_p b_0}{30} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{\varphi}_i, \bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{\varphi}_j \end{pmatrix}^T$$

对 称