

邓肯-张模型参数反演的两种不适定问题^①

唐利民^{1,2,3}, 郑健龙^{1,2,3}

(1. 长沙理工大学 公路养护技术国家工程实验室, 湖南 长沙 410004;

2. 长沙理工大学 交通运输工程学院, 湖南 长沙 410004;

3. 现代公路交通基础设施先进建养技术湖南省协同创新中心, 湖南 长沙 410004)

摘要:利用邓肯-张模型进行参数反演时,不同的参数反演策略会存在不适定问题。结合参数反演的函数图形分析,指出在邓肯-张模型参数反演的过程中,基于 φ 反演 E_t ,基于 c 反演 E_t ,基于 c, φ 反演 E_t 时都会存在两种不适定问题。基于函数导数分析方法,结合莫尔-库仑准则表达式,解释邓肯-张模型参数反演产生两种不适定问题的原因,并提出消除方法。结果表明,邓肯-张模型参数的表达式是产生两种不适定问题的根源。

关键词: 邓肯-张模型; 参数反演; 不适定问题; 莫尔-库仑准则

中图分类号: TU41

文献标志码: A

文章编号: 1000-0844(2015)增刊 1-0001-06

DOI: 10.3969/j.issn.1000-0844.2015.02.0563

Two ill-posed Problems in the Back Analysis of Duncan-Chang Model Parameters

TANG Li-min^{1,2,3}, ZHENG Jian-long^{1,2,3}

(1. State Engineering Laboratory of Highway Maintenance Technology, Changsha University of Science & Technology, Changsha, Hunan 410004, China; 2. School of Traffic and Transportation Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha, Hunan 410004, China; 3. Co-Innovation Center for Advanced Construction and Maintenance Technology of Modern Transportation Infrastructural Facility, Changsha, Hunan 410004, China)

Abstract: Ill-posed problems exist in the Duncan-Zhang model parameters upon the inclusion of different inversion strategies. These ill-posed problems are graphically demonstrated and analyzed, including with inversion-base, with inversion-based, and with inversion-based. On the basis of functional analysis in combination with the Mohr-Coulomb criterion expressions, this study explains two ill-posed problems in the Duncan-Zhang model parameters inversion. Furthermore, a method for the reduction of these two ill-posed problems is proposed. The results show that the Duncan-Chang model parameter expressions produce the root causes of these two ill-posed problems.

Key words: Duncan-Chang model; parameters inversion; ill-posed problem; Mohr-Coulomb criterion

0 引言

岩土工程的参数反演分析过程存在不适定问题。不适定问题主要是指解的存在性、唯一性和稳

定性等性质^[1]。不同的反演策略会导致岩土工程参数反演过程产生不适定现象^[2-4]。岩土工程参数反演一般采用传统的正演分析与最优化相结合的方法

① 收稿日期: 2015-04-01

基金项目: 中国博士后科学基金项目(2013M531776); 湖南省自然科学基金项目(14JJ3090); 公路养护技术国家工程实验室开放基金项目(kfj140102)

作者简介: 唐利民(1978-), 男, 讲师、工程师, 博士后, 主要从事区间数学、岩土工程、变形监测等方面的研究。E-mail: tlmitt@163.com

法,即所谓的正反分析法。邓肯-张本构模型^[5]是 Duncan 等在 Kondner 建议的土体应力应变双曲线方程的基础上提出的非线性弹性模型,称为双曲线模型。为克服取样扰动和测试误差所导致的参数精度低以及土体离散性和随机性所导致的样本代表性差等问题,应用时一般基于原型观测值进行参数反演^[6-10]。文献[6]基于最优化方法对邓肯-张模型的参数进行了反演和分析,在反演计算中选取 k, n, G 作为待确定的参数。文献[7]认为有无数种 c, φ, R_f 组合可以保证 $R_f S$ (破坏比 R_f 与应力水平 S 的乘积)取值不变并获得相同的切线变形模量 E_t 和切线泊松比 ν_t ,从而导致满足反演目标函数获得相同最小值的参数组合出现不唯一性。实际上,当基于非线性最小二乘原理来反演邓肯-张模型参数时,会存在两种不适定问题^[11]:第一种不适定性是指由于算法本身的不适定性,所选算法找不到收敛序列收敛到目标函数,比如牛顿迭代法;第二种不适定性是指在某些算法下,目标函数 E_t 的值相差较小时会引起反演参数 c, φ 的巨大变化,即相差甚远的不同 c, φ 值却对应了近似相等的 E_t 值,或者是存在不相等的 c, φ 取值却对应相等的 E_t 值。对于以实测变形与计算变形量符合最小二乘原则作为终止收敛条件的反演算法来说,由于反演的数学模型不完全适合问题的解决,比较容易产生第二种不适定性问题。

本文主要从土体邓肯-张本构模型切线变形模量 E_t 的函数表达式出发,分析不同策略反演 E_t 时存在的 不适定问题。基于函数导数性质分析,结合莫尔-库仑准则,解释邓肯-张模型参数反演产生两种不适定问题的原因,并给出消除不适定的方法。

1 邓肯-张非线性弹性模型

邓肯-张本构模型切线变形模量表达式为^[12]:

$$E_t = K \cdot p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \left[1 - R_f \frac{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi} \right]^2 \quad (1)$$

式中包括 K, n, φ, c, R 五个材料参数。切线泊松比:

$$\nu_t = \frac{G - F \lg \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)}{(1 - A)^2} \quad (2)$$

式中, A 为与 c, φ, R_f 等参数相关的变量,其中

$$A = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) D}{K p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n (1 - R_f S)} \quad (3)$$

$$S = \frac{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi} \quad (4)$$

在切线泊松比式中引入了 G, F, D 三个材料参数。式(1)~(4)中, E_t 为土体切线弹性模量; ν_t 为切线泊松比^[12]; S 为应力水平; $c, \varphi, k, R_f, n, G, F, D$ 为模型参数。其中, c 为土体黏聚力; φ 为土体内摩擦角; R_f 为破坏比。定义^[12]

$$R_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \quad (5)$$

根据莫尔-库仑强度准则,有

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (6)$$

从而有

$$R_f = \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \quad (7)$$

文献[7]认为对于邓肯-张模型,若待反演的参数中同时包含了 c, φ, R_f , 则计算的收敛性对参数初值十分敏感,易出现计算失败的情况。并说明对于任一特定的应力状态,有无数种 c, φ, R_f 组合可以保证 $R_f S$ 取值不变并获得相同的切线变形模量 E_t 和切线泊松比 ν_t ,从而导致满足反演目标函数获得相同最小值的参数组合出现不唯一性,即产生参数反演的不适定问题。

实际上,得到上述结论并不需要像文献[7]那样复杂的推理。现将式(7)乘以式(4)后,得到:

$$R_f S = \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \times \frac{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \quad (8)$$

式中, $R_f S$ 的取值取决于 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 和 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ 的比值。当土样的应力应变曲线近似于双曲线关系时,则往往是根据一定应变值(如 $\epsilon_1 = 15\%$)来确定土的强度 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$, 而不可能在试验中使 ϵ_1 无限大,以求取 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ ^[12]。如果 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ 的值已经确定,则 $R_f S$ 的取值决定于 $(\sigma_1 - \sigma_3)$, 如此, c, φ 的任何取值不会改变 $R_f S$ 的值。

邓肯-张双曲线模型共计有八个参数,即 $K, n, \varphi, c, R_f, G, F, D$ 。假如上述参数均在反演分析中确定,则会影响计算结果的稳定性。然而本文在反演分析过程中发现,对于切线变形模量 E_t 的反演,不同的反演策略会呈现不适定问题的不同特征。

2 参数反演的两种不适定问题

2.1 基于 φ 反演 E_t 的不适定问题

先讨论基于取值 φ 不同的情形下,固定 K, n, c, R_f 来反演 E_t 的不适定问题。 K, n, c, R_f 分别为 170、0.76、30、0.76,取 $\sigma_1 = 300$ kPa, $\sigma_3 = 100$ kPa, $p_a = 100$ kPa, φ 反演取值范围为 $1^\circ \sim 49^\circ$ 。其 $E_t - \varphi$ 关系见图 1。由于 E_t 数值较大,考虑工程上常用的对数值来表示后, $\lg E_t - \varphi$ 的关系见图 2。

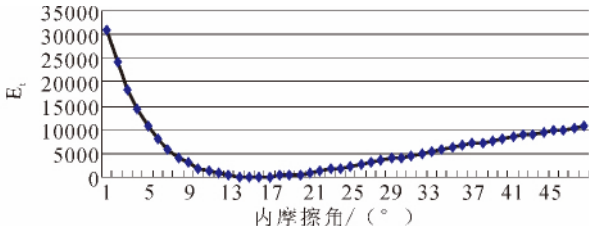


图 1 $E_t - \varphi$ 关系
Fig. 1 $E_t - \varphi$ relation

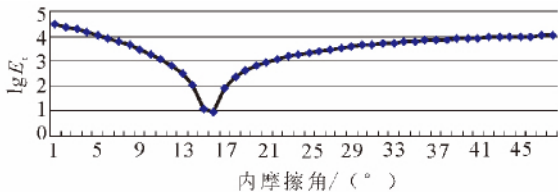


图 2 $\lg E_t - \varphi$
Fig. 2 $\lg E_t - \varphi$

从图 1 可知,当 $\varphi = 16^\circ$ 时, E_t 取最小值 9.739 79。图 1 和图 2 均显示,在 16° 左右两侧存在两个相差不大的 E_t 值,而其对应的 φ 值却相差甚远,表明存在解的稳定性和唯一性的不适定问题特征,也即第二种不适定问题。而在基于变形量的路基沉降反演分析过程中,基于有限元或有限差分计算时,由于数值计算过程中存在各种误差,两个相差不大的 E_t 值所计算得到的沉降量常常近似相等,即相差甚远的两个不同 φ 值对应近似相等的计算沉降量。

图 1 中的曲线出现明显的局部极值,故其导数也应有正负符号的改变。 E_t 关于 φ 的导数为:

$$\frac{\partial E_t}{\partial \varphi} = 2K \cdot p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n \left[1 - R_f \frac{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi} \right] \times \left[\frac{R_f \cos \varphi (\sigma_1 - \sigma_3) (2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi)}{(2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi)^2} + \frac{R_f (1 - \sin \varphi) (\sigma_1 - \sigma_3) (-2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi)}{(2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi)^2} \right] \quad (9)$$

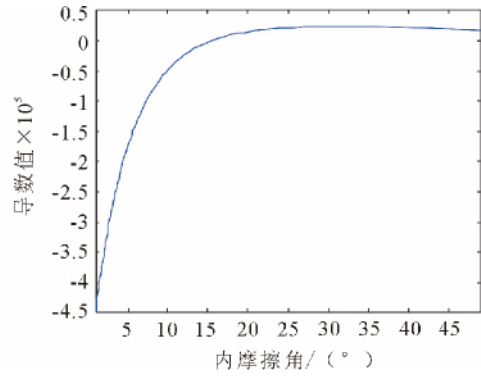


图 3 $E_t - \varphi$ 的导数曲线
Fig. 3 Curve of derivative function $E_t - \varphi$

图 3 显示, $\frac{\partial E_t}{\partial \varphi}$ 值在 $\varphi = 16^\circ$ 左右发生正负符号上的改变。由于数值迭代法,如牛顿迭代法 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 中,其每一步迭代都需计算导数值,即都是基于导数的迭代,当导数符号上发生改变时,迭代数值会产生剧烈变动。因此,第一种不适定性特征就有可能出现,即找不到收敛序列收敛到所选算法的目标函数。

2.2 基于反演的不适定问题

基于 c 取值不同,固定 K, n, φ, R_f 来反演 E_t 时,取 K, n, φ, R_f 分别为 170、0.55、20、0.78,取 $\sigma_1 = 300$ kPa, $\sigma_3 = 100$ kPa, $p_a = 100$ kPa。 c 值反演取值范围为 $1 \sim 60$ kPa,其 $E_t - c$ 关系见图 4。 $\lg E_t - c$ 关系见图 5。

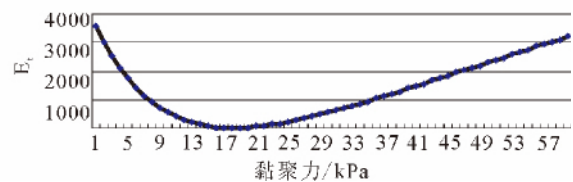


图 4 $E_t - c$ 关系
Fig. 4 $E_t - c$ relation

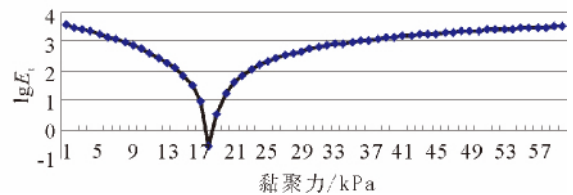


图 5 $\lg E_t - c$
Fig. 5 $\lg E_t - c$

图 4 中,当 $c = 18$ kPa 时, E_t 取最低值 0.275 958。由 $E_t - c$ 曲线的形状知存在第二种不适

定问题,即 E_t 值变化不大,却对应相差极大的 c 值。

E_t 关于 c 的导数为:

$$\frac{\partial E_t}{\partial c} = 4K \cdot p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n \left(1 - R_f \frac{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}\right) \times \left(R_f \frac{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{(2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi)^2} \cos \varphi\right) \quad (10)$$

图 6 显示, $\frac{\partial E_t}{\partial c}$ 值在 $c=18$ 左右产生正负符号上的改变。对于某些迭代法将使得迭代过程变得不稳定,找不到收敛序列收敛到目标函数,从而出现第一种不适定问题。

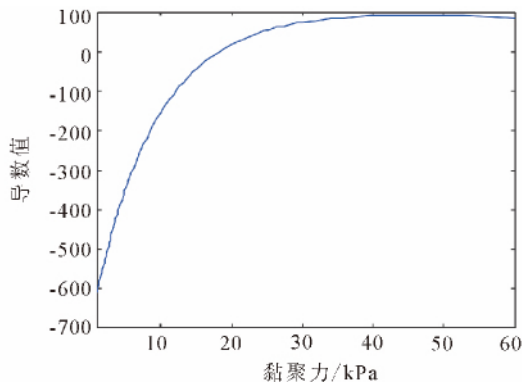


图 6 E_t-c 的导函数曲线

Fig. 6 Curve of derivative function E_t-c

2.3 基于 c, ϕ 反演 E_t 的不适定问题

基于 c, φ 反演 E_t 时,固定 K, n, R_f 三个材料参数为 170, 0.55, 0.78, 取 $\sigma_1=300$ kPa, $\sigma_3=100$ kPa, $P_a=100$ kPa。 c 取值 4~45 kPa, φ 取值 $15^\circ \sim 32^\circ$, 考察不同 c, φ 对应的 E_t 函数曲线,见图 7。

图 7 中,随着 φ 值的不同($\varphi=[15^\circ \sim 32^\circ]$), c 在 4~45 kPa 范围内, E_t-c 曲线形状也不相同。当 $\varphi=[15^\circ \sim 23^\circ]$ 时, E_t-c 曲线存在局部极小点。其他 φ 值的 E_t-c 曲线中, E_t 随 c 的增大而增大。在 $\varphi=[15^\circ \sim 23^\circ]$ 时,明显存在两个相等的 E_t 值对应于不等的 c 值,即出现第二种不适定问题特征。另外,由于在反演分析计算中 c, φ 的取值会不断调整,在调整的过程中如果恰巧在 E_t 出现局部极值的情况,则一般的数值迭代算法难以继续下去,即出现第一种不适定问题。

2.4 基于 K, n, R_f 反演 E_t 的不适定问题

基于 K, n, R_f 反演 E_t 时, c, φ 材料参数固定不变。单独考察 $K \cdot p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n$ 这项, K, n 取值为正

且均大于 0, $\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n$ 为 $\frac{\sigma_3}{p_a}$ 的指数函数,它是定义在

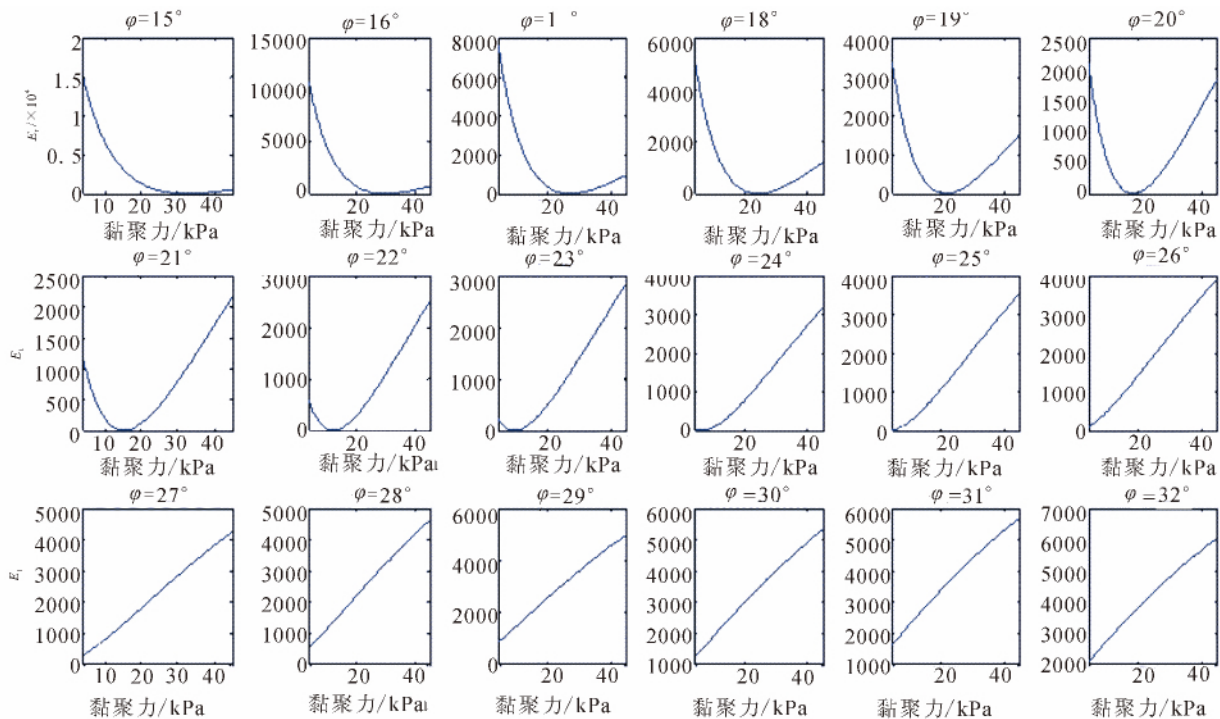


图 7 各 φ 值对应的 E_t-c 曲线

Fig. 7 Curves of E_t-c corresponding to different value of φ

实数域上的单调、下凸、无上界的可微正值函数。故

E_t 是关于 K, n 的单调函数。 E_t 关于破坏比 R_f 的

导数为

$$\frac{\partial E_t}{\partial R_f} = -2K \cdot p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n (1 - R_f \frac{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}) \times \frac{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{(2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi)^2} \quad (11)$$

令 $(1 - R_f \frac{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}) = 0$, 则 $R_f = \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}$, 当 $R_f > \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}$ 时, $\frac{\partial E_t}{\partial R_f} < 0$; 当 $R_f < \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}$ 时, $\frac{\partial E_t}{\partial R_f} > 0$ 。由于 c, φ 已经固定, 故 $\frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}$ 值也固定。式(11)表明, 当利用不利的 c, φ 取值组合对 R_f 进行反演时, 反演过程有可能出现 R_f 的不同值使得 $\frac{\partial E_t}{\partial R_f}$ 的正负符号在反演过程中出现变动的情形, 从而导致产生两种不适定问题。

3 产生不适定问题的原因分析

邓肯-张模型的推导过程中, 对于 E_t 公式, 利用了莫尔-库仑准则。考察其表达式中 $\left[1 - R_f \frac{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}\right]^2$ 这一项, 其随内摩擦角 φ 变化的函数图形见图 8。

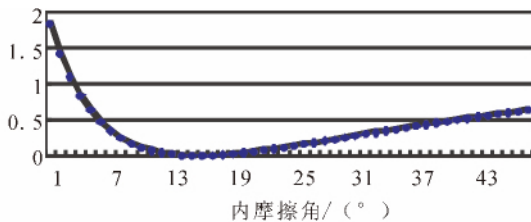


图 8 $\left[1 - R_f \frac{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}\right]^2 - \varphi$ 曲线

Fig. 8 Curve of $\left[1 - R_f \frac{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}\right]^2 - \varphi$

图 8 中 $\left[1 - R_f \frac{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}\right]^2$ 与 φ 值关系中, 存在一个极小点。在极小点两侧, 函数的单调性质相反, 左侧为单调减少, 右侧为单调增加。

实际上, 由于 $\left[1 - R_f \frac{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}\right]^2$ 为关于 c, φ, R_f 的平方函数, 由平方函数的单调性质可以解释, 当邓肯-张模型参数反演策略中包含了 c 、

φ, R_f 这三项中的任意一项时, E_t 表达式的结构导致了反演过程会存在两种不适定问题。

4 消除不适定问题的方法

实际应用中, 当采用实测沉降与计算沉降的最小二乘残差平方和最小来反演邓肯-张模型参数时, 参数反演的两种不适定问题将更加明显。例如路基沉降反演过程中, 一般采用有限元法、有限差分法等数值方法, 结合邓肯-张本构模型来计算沉降量。这个过程中值得注意的是, 切线弹性模型 E_t 值的细微改变对计算沉降量的数值大小几乎毫无影响。诸多文献研究的利用邓肯-张模型反演沉降量时参数的敏感性, 就表明在目前的岩土工程计算方法中第二种不适定问题是普遍存在的, 即相差甚远的不同 c, φ 值却对应了近似相等的 E_t 值, 或不相等的 c, φ 取值对应相等的 E_t 值, 而近似相等的两个 E_t 值对实测沉降与计算沉降的最小二乘残差平方和却没有多大影响。研究消除不适定问题的方法, 有助于更好地分析实测沉降与计算沉降之间的联系。

对于单参数 φ 和 c 的反演, 可以先确定单参数取值区间内的 E_t 变化曲线, 根据变化曲线确定参数的反演区间。如在 2.1 节中, 可以在区间 $\varphi \in [1, 16]$ 和 $\varphi \in [16, 50]$ 内单独进行反演; 2.2 节中, 可以在 $c \in [1, 18]$ 和 $c \in [1, 18]$ 内单独进行反演。如果反演后两个区间均有满足要求的参数取值, 就可以结合试验结果或地区经验确定邓肯-张模型参数的反演取值。当然, 如果事先已经知道参数位于哪个区间, 则整个反演过程变得更简单。

对于双参数反演或多参数反演, 涉及到多元函数的极值问题, 情况比较复杂。本文给出一种双参数反演的适定方法。如图 7 所示, 根据邓肯-张模型试验结果先确定 φ 的大致取值范围, 再对 φ 的每一个可能取值, 绘制 E_t 关于 c 的曲线形状, 从曲线形状上确定 c, φ 反演的稳定区间。此方法由于计算量比较大, 需借助计算机编程实现, 多参数反演的不适定性消除方法比较复杂。

5 结论

本文就邓肯-张模型参数反演存在的不适定问题进行了详细分析, 得出以下结论。

(1) 基于 φ 反演 E_t , 基于 c 反演 E_t , 基于 c, φ 反演 E_t 两种策略, 都会存在第一种不适定和第二种不适定问题;

(2) 邓肯-张模型 E_t 表达式部分项

$\left[1 - R_t \frac{(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}\right]^2$ 为平方函数,平方函数一般具有局部对称或反对称性质,由于部分项 $K \cdot p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n$ 不改变 E_t 函数的局部对称或反对称性质,即在对称轴的两侧存在不同 c, φ 值,其 E_t 值相等。

(3) 可以从分析反演目标函数对参数的导数入手,确定参数反演的适定区间范围,以消除问题的不稳定性。当在不稳定区间内反演参数时,需要结合土工试验结果和地区经验确定邓肯-张模型参数的反演值。

参考文献 (References)

- [1] A H 吉洪诺夫, BЯ 阿尔先宁, 著. 王秉忱, 译. 不适定问题的解法[M]. 北京: 地质出版社, 1979: 1-8.
- [2] 刘继军. 不适定问题的正则化方法及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 5-22.
- [3] 唐利民. 地基沉降预测模型的正则化算法[J]. 岩土力学, 2010, 31(12): 3945-3948.
- [4] 唐利民. 非线性最小二乘问题的不稳定性及算法研究[J]. 测绘学报, 2012, 41(4): 630.
- [5] Duncan J M, Chang C Y. Non-linear Analysis of Stress and Strains in Soils[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 1970, 96(SM5): 1629-1653.
- [6] 胡应德, 叶枫, 陈志坚. 土体邓肯-张非线性弹性模型参数反演分析[J]. 土木工程学报, 2004, 37(2): 54-57.
- [7] 王建, 岑威钧, 张煜, 邓肯-张模型参数反演的不唯一性[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(7): 1054-1057.
- [8] 谭昌明, 徐日庆, 龚晓南. 土体双曲线本构模型的参数反演[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2001, 35(1): 57-61.
- [9] 张云, 薛禹群, 吴吉春, 等. 上海第四纪土层邓肯-张模型的参数研究[J]. 水文地质工程地质, 2008(1): 19-22.
- [10] 杨林德. 岩土工程问题的反演理论与工程实践[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
- [11] 唐利民, 朱建军. 非线性最小二乘问题数值迭代法的统一模型及其不稳定性[J]. 长沙交通学院学报, 2008, 24(2): 39-43.
- [12] 李广信. 高等土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [13] Gioda G, Maier G. Direct Search Solution of an Inverse Problem in Elastoplasticity: Identification of Cohesion, Friction Angle and in Situ Stress by Pressure Tunnel Tests[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1980, 15(12): 1823-1848.
- [14] Sakurai S, Takeuchi K. Back Analysis of Measured Displacements of Tunnels[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 1983, 16: 173-180.
- [15] TANG Yu-Geng, Gordon Tung-Chin Kung. Application of Nonlinear Optimization Technique to Back Analyses of Deep Excavation[J]. Computers and Geotechnics, 2009, 36: 276-290.
- [16] S Morigi, L Reichel, F Sgallari Noise-reducing Cascade Multi-level Methods for Linear Discrete Ill-posed Problems[J]. Numerical Algorithms, 2009, 26(5): 1-22.
- [17] S M Chuiko. Least-squares Method in the Theory of Ill-posed Linear Boundary-value Problems with Pulse Action[J]. Ukrainian Mathematical Journal, 2010, 22(1): 794-803.