

饱和土中浅埋隧道耦合二维动力响应解答探讨^①

胡文韬¹, 徐长节^{1,2}

(1. 华东交通大学土木建筑学院, 江西 南昌 330013;

2. 软弱土与环境土工教育部重点实验室 浙江大学, 浙江 杭州 310058)

摘要:针对平面波耦合作用下饱和半空间中浅埋隧道二维动力响应的典型问题的解答进行探讨。首先基于 Biot 饱和孔隙介质理论建立饱和土场方程, 并通过中间势函数的代入推导得到饱和土体中的快纵波、慢纵波及横波的 Helmholtz 势函数方程, 随后引入柱坐标系下饱和土体和弹性衬砌的势函数通解, 并代入边界条件中, 建立以第 n 组参数为变量的多元一次齐次线性方程组。采用本文的推导思路, 可以解决饱和土体中的浅埋隧道在地震作用时 P 波和 S 波耦合作用下的响应问题。

关键词: 饱和土; 耦合响应; 二维分析

中图分类号: TU43

文献标志码: A

文章编号: 1000-0844(2015)04-1053-07

DOI: 10.3969/j.issn.1000-0844.2015.04.1053

Solutions for Two-dimensional Dynamic Response of Shallow Tunnels in Saturated Soil under Coupling Interaction of P and S Waves

HU Wen-tao¹, XU Chang-jie^{1, 2}

(1. School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, Jiangxi, China;

2. MOE Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, Zhejiang, China)

Abstract: This study briefly discusses solutions for a typical case concerning the two-dimensional dynamic response of shallow tunnels under the coupled influence of plane waves. The field equation of saturated soil is based on the Biot theory for a saturated porous medium. The Helmholtz equations for the potential functions of a fast P, slow P, and S waves are deduced by introducing additional potentials. By introducing the general solutions of the potential functions into the boundary conditions, the multivariate linear equations are built up in a cylindrical coordinate system. The deduction procedure of this paper can be utilized to solve problems concerning the seismic response of shallow tunnels in saturated soil under the coupled influence of P and S waves during an earthquake.

Key words: saturated soil; coupled response; 2D analysis

0 引言

考虑到施工成本及服务需求, 浅埋隧道广泛应用于城市地铁、城市隧道枢纽等交通网络中, 其工程抗震特性是一个非常值得研究的问题, 这关系到隧道的安全性及工程的可行性论证。上世纪七十年代, 波的折射和散射问题由 Pao 等^[1]开创性地采用

波函数展开法进行分析, 研究了无限空间中洞室在弹性波入射条件下的动应力集中问题。随后 Lee 等^[2]将研究工作拓展开到弹性半空间中洞室对 SH 波的散射问题, 得到了解析解答。在其后期的研究中, Lee 等^[3-4]采用大圆弧假定条件分别研究了地下洞室对更为复杂的 P 波和 SV 波的散射解析解。

① 收稿日期: 2014-08-20

作者简介: 胡文韬(1986—), 男, 讲师, 主要从事交通地基动力分析等方面的教学和科研。E-mail: qqzei@zju.edu.cn。

随着研究的深入,考虑到工程实践的需要,越来越多的学者针对饱和孔隙土体中洞室的动力响应问题进行研究。Lin^[5]基于 Biot 饱和孔隙介质理论研究了 P 波作用下饱和孔隙介质中的圆柱洞室的动力响应。李伟华等^[6-7]通过数值分析方法研究了稳态及瞬态平面 SV 波作用下饱和半空间中的隧洞的动力集中问题。Kattis 等^[8]基于平面应变条件假定,采用边界元法解决了饱和无限半空间中任意形状洞室对平面 P 波和 SV 波的折射问题。Wang 等^[9]采用复变量代换方法分析了饱和土浅埋衬砌隧道的平面波衍射问题,得到了半解析的解答。基于同样的分析方法,Jiang 等^[10]进一步对弹性衬砌厚度、模量比和孔隙率的影响效应进行了探讨。

纵观过去对饱和土体中洞室动力响应的研究工作可以看到,尽管对 P 波和 S 波的散射与折射问题的研究工作比较完备,但是鲜有文献对两种波的耦合作用下饱和土体中的洞室振动问题进行系统分析。而这一问题在地震多发地区的浅埋地下结构抗震设计时,尤其在需要考虑地震的长期作用效应时尤为重要。为完善这一工作,本文将根据 Biot 饱和孔隙介质理论,采用大圆弧假定,针对平面波耦合作用下饱和半空间浅埋隧道的二维动力响应问题的解答进行探讨。

1 基本方程

本研究的几何模型如图 1 所示。饱和土体可假定为饱和半无限空间,内径和外径分别为 R_i, R_o 的圆形衬砌隧洞浅埋在地表以下 H 深处。为便于分析,地表水平面可用一极大的半径为 R_s ($R_s \gg H$) 圆弧的一段来表示。为表示不同波场,定义两套柱坐标系 (r_1, θ_1) 和 (r_2, θ_2) ,两坐标系的中心分别位于隧道的中心 O_1 处和地表圆弧的圆心 O_2 处, d 为 O_1 和 O_2 之间的距离。入射平面波(上标为“0”)的传播方向与垂直方向夹角为 α_0 ,在地表平面处(“i”)和隧道表面(“o”)均形成散射波,同时在衬砌内部形成外壁传向内壁(“i”)和内壁传向外壁(“o”)的散射波。

1.1 饱和土场方程

根据 Biot 饱和孔隙介质理论^[11],饱和土体的本构关系可表示为:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}e - \alpha\delta_{ij}p_f \\ -p_f &= \alpha Me - M\xi = \alpha Mu_{i,i} + Mw_{i,i} \end{aligned} \quad (1)$$

式中: σ_{ij} 为孔隙微元的总应力张量; u_i 为土颗粒的位移分量; w_i 为孔隙流体相对于土颗粒的位移分

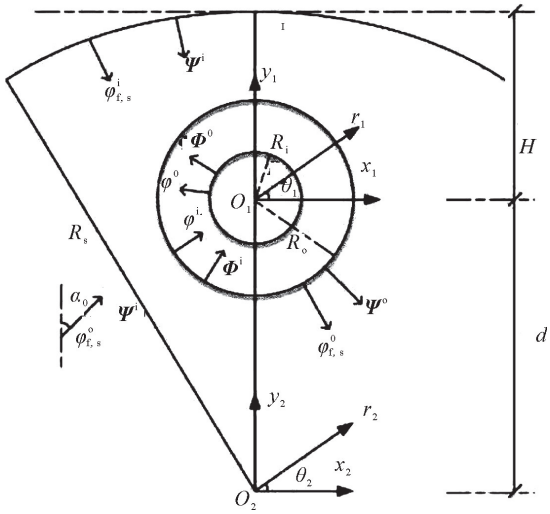


图 1 饱和半空间中衬砌隧道动力模型

Fig.1 Dynamic model of the lined tunnel in saturated half-space

量; ϵ_{ij} 和 e 分别为土颗粒的应变张量和剪胀变形; ξ 为孔隙流体的空间变化率; λ 和 μ 为土体 Lamé 常数; α 和 M 为 Biot 系数; p_f 为孔隙压力; δ_{ij} 为 Kronecker 张量。当孔隙流体满足 Darcy 流体条件时,饱和孔隙介质的运动方程可表示为:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho\ddot{u}_i + \rho_f\ddot{w}_i \\ -p_{f,i} &= \rho_f\ddot{u}_i + \frac{\rho_f}{n}\ddot{w}_i + b\dot{w}_i \end{aligned} \quad (2)$$

式中: $b=nk^{-1}$; ρ 和 ρ_f 分别是微元体密度和孔隙流体密度,且满足关系 $\rho=(1-n)\rho_s+n\rho_f$,其中 ρ_s 为土颗粒的密度, n 为孔隙率; η 为孔隙流体的黏度; k 为渗透系数。将式(1)代入式(2)得到以位移为变量的运动方程表达式:

$$\begin{aligned} \mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda + \alpha^2 M)u_{j,ji} + \alpha M w_{j,ji} &= \rho\ddot{u}_i + \rho_f\ddot{w}_i \\ \alpha M u_{j,ji} + M w_{j,ji} &= \rho_f\ddot{u}_i + \frac{\rho_f}{n}\ddot{w}_i + b\dot{w}_i \end{aligned} \quad (3)$$

方程组(3)的解可用 Helmholtz 理论进行求解,引入标量势函数 ϕ 和 χ ,以及矢量势函数 ψ 和 Θ ,令

$$u_i = \phi_{,i} + e_{ijk}\psi_{k,j}, w_i = \chi_{,i} + e_{ijk}\Theta_{k,j} \quad (4)$$

同时考虑此运动为谐运动状态,谐频率为 ω ,各位移分量与时间的相关性均可表示为参量 $e^{i\omega t}$ 。将式(4)及时间相关参量表达式代入方程组(3)可得到以下方程组:

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda + \alpha^2 M)\phi_{,jj} + \rho\omega^2\phi + \alpha M\chi_{,jj} + \rho_f\omega^2\chi &= 0 \\ \alpha M\phi_{,jj} + \rho_f\omega^2\phi + M\chi_{,jj} + \left(\frac{\rho_f}{n}\omega^2 + i\omega b\right)\chi &= 0 \\ \mu\psi_{i,jj} + \rho\omega^2\psi_i + \rho_f\omega^2\Theta_i &= 0 \end{aligned}$$

$$\rho_f \omega^2 \Psi_j + \frac{\rho_f}{n} \omega^2 \Theta_j + i \omega b \Theta_j = 0 \quad (5)$$

由方程组(5)后两式可得到 Ψ 和 Θ 间的关系表达式:

$$\Theta = \gamma \Psi = -\frac{\rho_f \omega^2}{i \omega b + \rho_f n^{-1} \omega^2} \Psi \quad (6)$$

以及剪切波运动方程

$$\Psi_{i,jj} + k_t^2 \Psi_i = 0, \quad k_t^2 = \mu^{-1}(\rho + \rho_f \gamma) \omega^2 \quad (7)$$

为得到势函数 ϕ 和 χ 之间的关系,引入中间势函数 φ_f 和 φ_s 作为势函数 ϕ 和 χ 的线性表示^[12]:

$$\phi = \varphi_f + \xi_s \varphi_s, \quad \chi = \xi_f \varphi_f + \varphi_s \quad (8)$$

式中: ξ_f 和 ξ_s 为待定常数。将式(8)回代入方程组(5)前两式,经过合并重组可得到如下方程:

$$\begin{aligned} & [(A + \xi_f \alpha M) \nabla^2 + (\rho + \xi_f \rho_f) \omega^2] \varphi_f + \\ & [(\xi_s A + \alpha M) \nabla^2 + (\xi_s \rho + \rho_f) \omega^2] \varphi_s = 0 \\ & [(\alpha M + \xi_f M) \nabla^2 + \rho_f \omega^2 + \xi_f B] \varphi_f + \\ & [(\xi_s \alpha M + M) \nabla^2 + \xi_s \rho_f \omega^2 + B] \varphi_s = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

其中: $A = 2\mu + \lambda + \alpha^2 M$, $B = \rho_f n^{-1} \omega^2 + i \omega b$; ∇^2 表示 Laplace 算子,与张量微分标记“ $,jj$ ”意义相同。方程组(9)成立的条件为:

$$\begin{aligned} \frac{\rho \omega^2 + \xi_f \rho_f \omega^2}{A + \xi_f \alpha M} &= \frac{\rho_f \omega^2 + \xi_f B}{\alpha M + \xi_f M} = k_f^2, \\ \frac{\xi_s \rho \omega^2 + \rho_f \omega^2}{\xi_s A + \alpha M} &= \frac{\xi_s \rho_f \omega^2 + B}{\xi_s \alpha M + M} = k_s^2 \end{aligned} \quad (10)$$

如此,中间势函数 φ_f 和 φ_s 便满足

$$(\nabla^2 + k_{f,s}^2) \varphi_{f,s} = 0 \quad (11)$$

ξ_f 和 ξ_s 的表达式可求解式(10),得到

$$\xi_{f,s} = \frac{1}{2D_{f,s}} \cdot G \quad (12)$$

式中:

$$\begin{aligned} D_f &= M \rho_f \omega^2 - \alpha M B, \quad D_s = (\alpha M \rho - A \rho_f) \omega^2, \\ G &= AB - M \rho \omega^2 \pm \sqrt{(AB - M \rho \omega^2)^2 - AD_f D_s} \end{aligned} \quad (13)$$

式(7)中的 k_t 以及式(10)中的 k_f 、 k_s 分别对应于孔隙介质中的横波、快纵波和慢纵波的复波数。为满足波在土介质中传播的过程中逐渐衰减这一事实,必须始终满足关系式 $\text{Im}(k_{f,s}) > 0$, 同时为确保快纵波的传播始终快于慢纵波,认定关系 $\text{Re}(k_f) < \text{Re}(k_s)$ 成立。根据式(6)和(8),位移表达式(4)可改写为

$$\begin{aligned} u_i &= (\varphi_f + \xi_s \varphi_s)_{,i} + e_{ijk} \Psi_{k,j}, \\ w_i &= (\xi_f \varphi_f + \varphi_s)_{,i} + e_{ijk} \gamma \Psi_{k,j} \end{aligned} \quad (14)$$

1.2 弹性衬砌场方程

假定衬砌为理想弹性材料,其 Lamé 常数为 λ_1

和 μ_1 , 密度为 ρ_1 。令 v_i 为衬砌位移分量,则根据经典弹性理论,弹性衬砌的运动方程表达式为:

$$\mu_1 v_{i,jj} + (\lambda_1 + \mu_1) v_{j,ji} = \rho_1 \ddot{v}_i \quad (15)$$

类似,引入势函数表达式 $v_i = \phi_{,i} + e_{ijk} \Phi_{k,j}$, 方程(15)可表示为 Helmholtz 方程的形式:

$$\nabla^2 \phi + k_{lp}^2 \phi = 0, \quad \nabla^2 \Phi + k_{lt}^2 \Phi = 0 \quad (16)$$

式中: k_{lp} 和 k_{lt} 分别为衬砌中传播的纵波与横波实波数,其值为:

$$\begin{aligned} k_{lp}^2 &= \left(\frac{\omega}{v_p} \right)^2 = \frac{\omega^2}{(\lambda_1 + 2\mu_1) \rho_1^{-1}} \\ k_{lt}^2 &= \left(\frac{\omega}{v_s} \right)^2 = \frac{\omega^2}{\mu_1 \rho_1^{-1}} \end{aligned} \quad (17)$$

其中: v_p 和 v_s 分别代表衬砌中的传播的纵波与横波波速。

1.3 柱坐标系中的运动解答

在柱坐标系中,各位移分量可表示为:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \varphi_f}{\partial r} + \xi_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \theta} \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_f}{\partial \theta} + \frac{\xi_s}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial r} \\ w_r &= \xi_f \frac{\partial \varphi_f}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} + \frac{\gamma}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \theta} \\ u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_z}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial r} \end{aligned} \quad (18)$$

根据式(1)可得到孔隙水压和应力分量:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} - \alpha_f k_f^2 \varphi_f - \alpha_s k_s^2 \varphi_s \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \tau_{rr} &= 2\mu_1 \frac{\partial v_r}{\partial r} - k_{lp}^2 \psi \\ \tau_{r\theta} &= \mu_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

式中: τ_{ij} 表示衬砌中的应力张量,各参数的表达式为

$$\begin{aligned} \alpha_f &= \lambda + \alpha M b_f, \quad \alpha_s = \lambda \xi_s + \alpha M b_s, \\ b_f &= (\alpha + \xi_f) M, \quad b_s = (\alpha \xi_s + 1) M \end{aligned} \quad (20)$$

首先分析饱和土体中传播的波的解答,由方程组(7)和(11)可得到入射纵波和横波的势函数解:

$$\begin{aligned} \varphi_{f,s}^0 &= \varphi_{0f,0s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k_{f,s} r_1) e^{in(\theta_1 - \alpha_0)}, \\ \Psi_z^0 &= \Psi_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k_t r_1) e^{in(\theta_1 - \alpha_0)} \end{aligned} \quad (21)$$

式中: J_n 为 n 阶一类 Bessel 函数; $\varphi_{0f,0s}$ 和 Ψ_0 为相应的入射波的振幅。饱和半空间外表面面向内产生的散

射场势函数表达式为:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{f}}^{\text{i}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{\text{i}}(\omega) H_n^{(2)}(k_{\text{f}} r_2) e^{in\theta_2}, \\ \varphi_{\text{s}}^{\text{i}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{\text{i}}(\omega) H_n^{(2)}(k_{\text{s}} r_2) e^{in\theta_2}, \\ \Psi_z^{\text{i}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{\text{i}}(\omega) H_n^{(2)}(k_{\text{t}} r_2) e^{in\theta_2} \quad (22)\end{aligned}$$

考虑到隧道与饱和土体交界面处边界问题的复杂性,衬砌表面向外产生的散射波可分解为两部分:一部分是假定圆柱形隧道所占空间为完全刚性,向外产生的散射场(上标“o1”表示);另一部分是由隧道的振动产生的散射场(上标“o2”表示)。这样式(18)中的位移可人为划分为自由散射波产生的位移(上标“(1)”表示)和隧道振动产生的位移(上标“(2)”表示)。散射势函数表达式为:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{f}}^{\text{o1,o2}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{\text{o1,o2}}(\omega) H_n^{(1)}(k_{\text{f}} r_1) e^{in\theta_1}, \\ \varphi_{\text{s}}^{\text{o1,o2}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{\text{o1,o2}}(\omega) H_n^{(1)}(k_{\text{s}} r_1) e^{in\theta_1}, \\ \Psi_z^{\text{o1,o2}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{\text{o1,o2}}(\omega) H_n^{(1)}(k_{\text{t}} r_1) e^{in\theta_1} \quad (23)\end{aligned}$$

式中: $A_n^{\text{i}}, B_n^{\text{i}}, C_n^{\text{i}}$ 和 $A_n^{\text{o1,o2}}, B_n^{\text{o1,o2}}, C_n^{\text{o1,o2}}$ 分别代表两组散射场的第 n 维待定散射参数; $H_n^{(1)}(H_n^{(2)})$ 为 n 阶一类(二类)Hankel 函数。式(22)中的函数以 r_2, θ_2 为变量,为统一坐标系,可以通过 Graf 加法定理^[13]将 $\varphi_{\text{f,s}}^{\text{i}}$ 和 Ψ_z^{i} 转换为坐标系 (r_1, θ_1) 中的级数形式:

$$H_n(kr_2) e^{in\theta_2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m-n}(kd) H_m(kr_1) e^{im\theta_1} \quad (24)$$

由此,饱和土体中的纵波的总势能场可表述为

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{f}} &= \varphi_{\text{f}}^{\text{o}} + \varphi_{\text{f}}^{\text{i}} + \varphi_{\text{f}}^{\text{o}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\varphi_{\text{of}} i^n J_n(k_{\text{f}} r_1) + \right. \\ &A_n^{\text{i}*}(\omega) H_n^{(2)}(k_{\text{f}} r_1) + A_n^{\text{o}}(\omega) H_n^{(1)}(k_{\text{f}} r_1) \left. \right] e^{in\theta_1} \\ \varphi_{\text{s}} &= \varphi_{\text{s}}^{\text{o}} + \varphi_{\text{s}}^{\text{i}} + \varphi_{\text{s}}^{\text{o}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\varphi_{\text{os}} i^n J_n(k_{\text{s}} r_1) + \right. \\ &B_n^{\text{i}*}(\omega) H_n^{(2)}(k_{\text{s}} r_1) + B_n^{\text{o}}(\omega) H_n^{(1)}(k_{\text{s}} r_1) \left. \right] e^{in\theta_1} \quad (25)\end{aligned}$$

类似,入射横波的总势能场可表述为:

$$\begin{aligned}\Psi_z &= \Psi_z^{\text{o}} + \Psi_z^{\text{i}} + \Psi_z^{\text{o}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\Psi_{\text{oz}} i^n J_n(k_{\text{t}} r_1) + \right. \\ &C_n^{\text{i}*} H_n^{(2)}(k_{\text{t}} r_1) + C_n^{\text{o}} H_n^{(1)}(k_{\text{t}} r_1) \left. \right] e^{in\theta_1} \quad (26)\end{aligned}$$

式(25)和(26)中: $\varphi_{\text{f}}^{\text{o}}, \varphi_{\text{s}}^{\text{o}}, \Psi_z^{\text{o}}$ 均为式(23)中相应各项

之和,且有

$$\begin{aligned}A_n^{\text{i}*} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{\text{i}}(\omega) J_{m-n}(k_{\text{f}} d), \\ B_n^{\text{i}*} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m^{\text{i}}(\omega) J_{m-n}(k_{\text{s}} d), \\ C_n^{\text{i}*} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^{\text{i}}(\omega) J_{m-n}(k_{\text{t}} d) \quad (27)\end{aligned}$$

弹性衬砌内部的势函数表达式为:

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[D_n^{\text{i}} J_n(k_{\text{lp}} r_1) + D_n^{\text{o}} H_n^{(1)}(k_{\text{lp}} r_1) \right] e^{in\theta_1} \quad (28)$$

$$\Phi_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[E_n^{\text{i}} J_n(k_{\text{lt}} r_1) + E_n^{\text{o}} H_n^{(1)}(k_{\text{lt}} r_1) \right] e^{in\theta_1}$$

式中: $D_n^{\text{i}}, D_n^{\text{o}}, E_n^{\text{i}}, E_n^{\text{o}}$ 为待定常数。

1.4 边界条件

本问题的边界条件如下,假定衬砌完全不透水,且衬砌与土体完全接触。在隧道与饱和土交界处, $r_1=R_0$ 有

$$\begin{aligned}u_r^{(1)} &= 0, u_{\theta}^{(1)} = 0, u_r^{(2)} = v_r, u_{\theta}^{(2)} = v_{\theta}, \\ \omega_r^{(1),(2)} &= 0, \omega_{r,r} = 0, \sigma_{rr} = \tau_{rr}, \sigma_{r\theta} = \tau_{r\theta}\end{aligned} \quad (29)$$

在隧道内壁处, $r_1=R_i$ 有

$$\tau_{rr} = 0, \tau_{r\theta} = 0 \quad (30)$$

在地表处, $r_2=R_s \left(r_1=R_H(\theta_1) = \frac{H}{\sin\theta_1} \right)$ 有

$$\sigma_{rr} = 0, \sigma_{r\theta} = 0 \quad (31)$$

至此所有场方程和边界条件都已全部得到。

2 问题解答

将势能场的表达式(25)、(26)和(28)代入式(18)、(19),并代入边界条件(29)~(31)可得到第组多元一次方程组,其表达式如下:

$$\begin{aligned}&H_n^{(2)'}(k_{\text{f}} R_0) k_{\text{f}} A_n^{\text{i}*} + H_n^{(1)'}(k_{\text{f}} R_0) k_{\text{f}} A_n^{\text{o1}} + \\ &\xi_s H_n^{(2)'}(k_{\text{s}} R_0) k_{\text{s}} B_n^{\text{i}*} + \xi_s H_n^{(1)'}(k_{\text{s}} R_0) k_{\text{s}} B_n^{\text{o1}} + \\ &in R_0^{-1} H_n^{(2)}(k_{\text{t}} R_0) C_n^{\text{i}*} + in R_0^{-1} H_n^{(1)}(k_{\text{t}} R_0) C_n^{\text{o1}} = \\ &-u_{\theta,n}^0 \Big|_{r_1=R_0} \quad (32)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&in R_0^{-1} H_n^{(2)}(k_{\text{f}} R_0) A_n^{\text{i}*} + in R_0^{-1} H_n^{(1)}(k_{\text{f}} R_0) A_n^{\text{o1}} + \\ &in \xi_s R_0^{-1} H_n^{(2)}(k_{\text{s}} R_0) B_n^{\text{i}*} + in \xi_s R_0^{-1} H_n^{(1)}(k_{\text{s}} R_0) B_n^{\text{o1}} - \\ &H_n^{(2)'}(k_{\text{t}} R_0) k_{\text{t}} C_n^{\text{i}*} - H_n^{(1)'}(k_{\text{t}} R_0) k_{\text{t}} C_n^{\text{o1}} = \\ &-u_{\theta,n}^0 \Big|_{r_1=R_0} \quad (33)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&H_n^{(1)'}(k_{\text{f}} R_0) k_{\text{f}} A_n^{\text{o2}} + \xi_s H_n^{(1)'}(k_{\text{s}} R_0) k_{\text{s}} B_n^{\text{o2}} + \\ &in R_0^{-1} H_n^{(1)}(k_{\text{t}} R_0) C_n^{\text{o2}} - J_n'(k_{\text{lp}} R_0) k_{\text{lp}} D_i - \\ &H_n^{(1)'}(k_{\text{lp}} R_0) k_{\text{lp}} D_o - in R_0^{-1} J_n(k_{\text{lt}} R_0) E_i - \\ &in R_0^{-1} H_n^{(1)}(k_{\text{lt}} R_0) E_o = 0\end{aligned} \quad (34)$$

$$in R_0^{-1} H_n^{(1)}(k_{\text{f}} R_0) A_n^{\text{o2}} + in \xi_s R_0^{-1} H_n^{(1)}(k_{\text{s}} R_0) B_n^{\text{o2}} -$$

$$H_n^{(1)'}(k_{\text{t}}R_o)k_{\text{t}}C_n^{\text{o}2} - inR_o^{-1}J_n(k_{\text{lp}}R_o)D_{\text{i}} - \\ inR_o^{-1}H_n^{(1)}(k_{\text{lp}}R_o)D_o + J_n'(k_{\text{lt}}R_o)k_{\text{lt}}E_{\text{i}} + \\ H_n^{(1)'}(k_{\text{lt}}R_o)k_{\text{lt}}E_o = 0 \quad (35)$$

$$\xi_{\text{f}}H_n^{(2)'}(k_{\text{f}}R_o)k_{\text{f}}A_n^{*\text{i}} + \xi_{\text{f}}H_n^{(1)'}(k_{\text{f}}R_o)k_{\text{f}}A_n^{\text{o}1} + \\ H_n^{(2)'}(k_{\text{s}}R_o)k_{\text{s}}B_n^{*\text{i}} + H_n^{(1)'}(k_{\text{s}}R_o)k_{\text{s}}B_n^{\text{o}1} + \\ in\gamma R_o^{-1}H_n^{(2)}(k_{\text{t}}R_o)C_n^{*\text{i}} + in\gamma R_o^{-1}H_n^{(1)}(k_{\text{t}}R_o)C_n^{\text{o}1} \\ = -\mathcal{W}_{r,n}^0 \Big|_{r1=R_o} \quad (36)$$

$$\xi_{\text{f}}H_n^{(1)'}(k_{\text{f}}R_o)k_{\text{f}}A_n^{\text{o}2} + H_n^{(1)'}(k_{\text{s}}R_o)k_{\text{s}}B_n^{\text{o}2} + \\ in\gamma R_o^{-1}H_n^{(1)}(k_{\text{t}}R_o)C_n^{\text{o}2} = 0 \quad (37)$$

$$\xi_{\text{f}}H_n^{(1)''}(k_{\text{f}}R_o)k_{\text{f}}^2 \left[\frac{H_n^{(2)''}(k_{\text{f}}R_o)}{H_n^{(1)''}(k_{\text{f}}R_o)}A_n^{*\text{i}} + A_n^{\text{o}1} + A_n^{\text{o}2} \right] + \\ H_n^{(1)''}(k_{\text{s}}R_o)k_{\text{s}}^2 \left[\frac{H_n^{(2)''}(k_{\text{f}}R_o)}{H_n^{(1)''}(k_{\text{f}}R_o)}B_n^{*\text{i}} + B_n^{\text{o}1} + B_n^{\text{o}2} \right] + \\ in\gamma R_o^{-1}H_n^{(2)'}(k_{\text{t}}R_o)k_{\text{t}} \left[\frac{H_n^{(2)''}(k_{\text{f}}R_o)}{H_n^{(1)''}(k_{\text{f}}R_o)}C_n^{*\text{i}} + C_n^{\text{o}1} + C_n^{\text{o}2} \right] \\ = -\frac{\partial \mathcal{W}_{r,n}^0}{\partial r} \Big|_{r1=R_o} \quad (38)$$

$$\left[H_n^{(2)''}(k_{\text{f}}R_o)k_{\text{f}}^2 - \frac{\alpha_{\text{f}}k_{\text{f}}^2}{2\mu}H_n^{(2)}(k_{\text{f}}R_o) \right] A_n^{*\text{i}} + \\ \left[H_n^{(1)''}(k_{\text{f}}R_o)k_{\text{f}}^2 - \frac{\alpha_{\text{f}}k_{\text{f}}^2}{2\mu}H_n^{(1)}(k_{\text{f}}R_o) \right] (A_n^{\text{o}1} + A_n^{\text{o}2}) + \\ \xi_{\text{s}}k_{\text{s}}^2 \left[H_n^{(2)''}(k_{\text{s}}R_o) - \frac{\alpha_{\text{s}}k_{\text{s}}^2}{2\mu}H_n^{(2)}(k_{\text{s}}R_o) \right] B_n^{*\text{i}} + \\ \xi_{\text{s}}k_{\text{s}}^2 \left[H_n^{(1)''}(k_{\text{s}}R_o) - \frac{\alpha_{\text{s}}k_{\text{s}}^2}{2\mu}H_n^{(1)}(k_{\text{s}}R_o) \right] (B_n^{\text{o}1} + B_n^{\text{o}2}) + \\ inR_o^{-2} \left[k_{\text{t}}R_oH_n^{(2)'}(k_{\text{t}}R_o) - H_n^{(2)}(k_{\text{t}}R_o) \right] C_n^{*\text{i}} + \\ inR_o^{-2} \left[k_{\text{t}}R_oH_n^{(1)'}(k_{\text{t}}R_o) - H_n^{(1)}(k_{\text{t}}R_o) \right] (C_n^{\text{o}1} + C_n^{\text{o}2}) - \\ \left[J_n''(k_{\text{lp}}R_o)k_{\text{lp}}^2 - \frac{k_{\text{lp}}^2}{2\mu}J_n(k_{\text{lp}}R_o) \right] D_n^{\text{i}} - \\ \left[H_n^{(1)''}(k_{\text{lp}}R_o)k_{\text{lp}}^2 - \frac{k_{\text{lp}}^2}{2\mu}H_n^{(1)}(k_{\text{lp}}R_o) \right] D_n^{\text{o}} + \\ inR_o^{-2} \left[k_{\text{lt}}R_oJ_n'(k_{\text{lt}}R_o) - J_n(k_{\text{lt}}R_o) \right] E_n^{\text{i}} + \\ inR_o^{-2} \left[k_{\text{lt}}R_oH_n^{(1)'}(k_{\text{lt}}R_o) - H_n^{(1)}(k_{\text{lt}}R_o) \right] E_n^{\text{o}} \\ = -\sigma_{rr,n}^0 \Big|_{r1=R_o} \quad (39)$$

$$\left[H_n^{(1)''}(k_{\text{f}}R_o)k_{\text{f}}^2 - inR_o^{-2}H_n^{(1)}(k_{\text{f}}R_o) \right] (A_n^{\text{o}1} + A_n^{\text{o}2}) + \\ \xi_{\text{s}} \left[H_n^{(2)''}(k_{\text{s}}R_o)k_{\text{s}}^2 - inR_o^{-2}H_n^{(2)}(k_{\text{s}}R_o) \right] B_n^{*\text{i}} + \\ \xi_{\text{s}} \left[H_n^{(1)''}(k_{\text{s}}R_o)k_{\text{s}}^2 - inR_o^{-2}H_n^{(1)}(k_{\text{s}}R_o) \right] (B_n^{\text{o}1} + B_n^{\text{o}2}) + \\ \left[(in+1)R_o^{-1}H_n^{(2)'}(k_{\text{t}}R_o)k_{\text{t}} - inR_o^{-2}H_n^{(2)}(k_{\text{t}}R_o) \right] C_n^{*\text{i}} + \\ \left[(in+1)R_o^{-1}H_n^{(1)'}(k_{\text{t}}R_o)k_{\text{t}} - inR_o^{-2}H_n^{(1)}(k_{\text{t}}R_o) \right] (C_n^{\text{o}1} + \\ C_n^{\text{o}2}) - \left[k_{\text{lp}}^2J_n''(k_{\text{lp}}R_o) - inR_o^{-2}J_n(k_{\text{lp}}R_o) \right] D_n^{\text{i}} - \\ \left[k_{\text{lp}}^2H_n^{(1)''}(k_{\text{lp}}R_o) - inR_o^{-2}H_n^{(1)}(k_{\text{lp}}R_o) \right] D_n^{\text{o}} + \\ \left[(in+1)R_o^{-1}k_{\text{lt}}J_n'(k_{\text{lt}}R_o) - inR_o^{-2}J_n(k_{\text{lt}}R_o) \right] E_n^{\text{i}} + \\ \left[(in+1)R_o^{-1}k_{\text{lt}}H_n^{(1)'}(k_{\text{lt}}R_o) - inR_o^{-2}H_n^{(1)}(k_{\text{lt}}R_o) \right] E_n^{\text{o}} \\ = -\sigma_{r\theta,n}^0 \Big|_{r1=R_o} \quad (40)$$

$$\left[k_{\text{lp}}^2J_n''(k_{\text{lp}}R_{\text{i}}) - \frac{k_{\text{lp}}^2}{2\mu}J_n(k_{\text{lp}}R_{\text{i}}) \right] D_n^{\text{i}} + \\ \left[k_{\text{lp}}^2H_n^{(1)''}(k_{\text{lp}}R_{\text{i}}) - \frac{k_{\text{lp}}^2}{2\mu}H_n^{(1)}(k_{\text{lp}}R_{\text{i}}) \right] D_n^{\text{o}} + \\ inR_{\text{i}}^{-2} \left[k_{\text{lt}}R_{\text{i}}J_n'(k_{\text{lt}}R_{\text{i}}) - J_n(k_{\text{lt}}R_{\text{i}}) \right] E_n^{\text{i}} + \\ inR_{\text{i}}^{-2} \left[k_{\text{lt}}R_{\text{i}}H_n^{(1)'}(k_{\text{lt}}R_{\text{i}}) - H_n^{(1)}(k_{\text{lt}}R_{\text{i}}) \right] E_n^{\text{o}} = 0 \quad (41)$$

$$\left[k_{\text{lp}}^2J_n''(k_{\text{lp}}R_{\text{i}}) - inR_{\text{i}}^{-2}J_n(k_{\text{lp}}R_{\text{i}}) \right] D_n^{\text{i}} + \\ \left[k_{\text{lp}}^2H_n^{(1)''}(k_{\text{lp}}R_{\text{i}}) - inR_{\text{i}}^{-2}H_n^{(1)}(k_{\text{lp}}R_{\text{i}}) \right] D_n^{\text{o}} + \\ \left[(in+1)k_{\text{lt}}R_{\text{i}}^{-1}J_n'(k_{\text{lt}}R_{\text{i}}) - inR_{\text{i}}^{-2}J_n(k_{\text{lt}}R_{\text{i}}) \right] E_n^{\text{i}} + \\ \left[(in+1)k_{\text{lt}}R_{\text{i}}^{-1}H_n^{(1)}(k_{\text{lt}}R_{\text{i}}) - \right. \\ \left. inR_{\text{i}}^{-2}H_n^{(1)}(k_{\text{lt}}R_{\text{i}}) \right] E_n^{\text{o}} = 0 \quad (42)$$

$$\left[H_n^{(2)''}(k_{\text{f}}R_H)k_{\text{f}}^2 - \frac{\alpha_{\text{f}}k_{\text{f}}^2}{2\mu}H_n^{(2)}(k_{\text{f}}R_H) \right] A_n^{*\text{i}} + \\ \left[H_n^{(1)''}(k_{\text{f}}R_H)k_{\text{f}}^2 - \frac{\alpha_{\text{f}}k_{\text{f}}^2}{2\mu}H_n^{(1)}(k_{\text{f}}R_H) \right] (A_n^{\text{o}1} + A_n^{\text{o}2}) + \\ \xi_{\text{s}}k_{\text{s}}^2 \left[H_n^{(2)''}(k_{\text{s}}R_H) - \frac{\alpha_{\text{s}}k_{\text{s}}^2}{2\mu}H_n^{(2)}(k_{\text{s}}R_H) \right] B_n^{*\text{i}} + \\ \xi_{\text{s}}k_{\text{s}}^2 \left[H_n^{(1)''}(k_{\text{s}}R_H) - \frac{\alpha_{\text{s}}k_{\text{s}}^2}{2\mu}H_n^{(1)}(k_{\text{s}}R_H) \right] (B_n^{\text{o}1} + B_n^{\text{o}2}) + \\ inR_H^{-2} \left[k_{\text{t}}R_HH_n^{(2)'}(k_{\text{t}}R_H) - H_n^{(2)}(k_{\text{t}}R_H) \right] C_n^{*\text{i}} +$$

$$\begin{aligned}
& inR_H^{-2} \left[k_t R_H H_n^{(1)'}(k_t R_H) - H_n^{(1)}(k_t R_H) \right] \left(C_n^{o1} + C_n^{o2} \right) \\
& = -\sigma_{rr,n}^0 \Big|_{r_1=R_H=\frac{H}{\sin\theta_1}} \quad (43) \\
& \left[H_n^{(2)''}(k_t R_H) k_t^2 - inR_H^{-2} H_n^{(2)}(k_t R_H) \right] A_n^{*i} + \\
& \left[H_n^{(1)''}(k_t R_H) k_t^2 - inR_H^{-2} H_n^{(1)}(k_t R_H) \right] \left(A_n^{o1} + A_n^{o2} \right) + \\
& \xi_s \left[H_n^{(2)''}(k_s R_H) k_s^2 - inR_H^{-2} H_n^{(2)}(k_s R_H) \right] B_n^{*i} + \\
& \xi_s \left[H_n^{(1)''}(k_s R_H) k_s^2 - inR_H^{-2} H_n^{(1)}(k_s R_H) \right] \left(B_n^{o1} + B_n^{o2} \right) + \\
& \left[(in+1)R_H^{-1} H_n^{(2)'}(k_t R_H) k_t - inR_H^{-2} H_n^{(2)}(k_t R_H) \right] C_n^{*i} + \\
& \left[(in+1)R_H^{-1} H_n^{(1)'}(k_t R_H) k_t - inR_H^{-2} H_n^{(1)}(k_t R_H) \right] C_n^{o1} \\
& = -\sigma_{r\theta,n}^0 \Big|_{r_1=R_H=\frac{H}{\sin\theta_1}} \quad (44)
\end{aligned}$$

其中与入射波相关的位移参数 $u_{r,n}^0$ 、 $u_{\theta,n}^0$ 和应力参数 $\sigma_{rr,n}^0$ 、 $\sigma_{r\theta,n}^0$ 的表达式为

$$\begin{aligned}
u_{r,n}^0 &= i^n e^{ina_0} \left[k_t J_n'(k_t r_1) \varphi_{f0} + \right. \\
& \left. \xi_s k_s J_n'(k_s r_1) \varphi_{s0} + inr_1^{-1} J_n(k_t r_1) \psi_0 \right] \quad (45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{\theta,n}^0 &= i^n e^{ina_0} r_1^{-1} \left[in J_n(k_t r_1) \varphi_{f0} + \right. \\
& \left. in \xi_s J_n(k_s r_1) \varphi_{s0} - k_t r_1 J_n'(k_t r_1) \psi_0 \right] \quad (46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr,n}^0 &= i^n e^{-ina_0} \left[k_t^2 J_n''(k_t r_1) - \frac{\alpha_f k_t^2}{2\mu} J_n(k_t r_1) \right] \varphi_{of} + \\
& i^n e^{-ina_0} \left[\xi_s k_s^2 J_n''(k_s r_1) - \frac{\alpha_s k_s^2}{2\mu} J_n(k_s r_1) \right] \varphi_{os} + \\
& i^{n+1} e^{-ina_0} nr_1^{-2} \left[k_t r_1 J_n'(k_t r_1) - J_n(k_t r_1) \right] \psi_0 \\
& \quad (47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\theta,n}^0 &= i^n e^{-ina_0} \left[k_t^2 J_n''(k_t r_1) - inr_1^{-2} J_n(k_t r_1) \right] \varphi_{of} + \\
& i^n e^{-ina_0} \xi_s \left[k_s^2 J_n''(k_s r_1) - inr_1^{-2} J_n(k_s r_1) \right] \varphi_{os} + \\
& i^n e^{-ina_0} r_1^{-2} \left[k_t r_1 J_n'(k_t r_1) - in J_n(k_t r_1) \right] \psi_0 \\
& \quad (48)
\end{aligned}$$

至此,本文所讨论的问题可得到精确解答,只需要将相关参数的数值代入到式(32)~(48)中的各待定常数,再将解答回代入式(25)、(26)和(28)中进行级数求和,选取适当的阶数,可最终得到隧洞的动力特征解答。此外,从式(43)和(44)中可以看到,受地表浅埋的影响,隧洞的振动特征与角度参量相关,这是与深埋隧道的分析不同之处,分析时需额外注意。

3 结论与建议

探讨平面波耦合作用下饱和半空间中浅埋隧道二维动力响应的典型问题的解答。从解答过程中可以看到,对于考虑埋深的衬砌隧洞而言,通过对多元一次特征方程组的解答,采用波势函数级数解可对平面波耦合作用下隧道的二维振动求解。本文的研究工作可以作为地下结构抗震设计的理论指导,在工程设计中进行推广。在今后的研究工作中,可以在本文所得结果的基础上进行数值分析,对各参数的影响规律进行分析,对研究工作进一步拓展。

参考文献(References)

- [1] C C Mow, Y H Pao. The Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations[M]. New York: Crane, Russak and Company Inc., 1973.
- [2] V W Lee, M D. Trifunac. Response of Tunnels to Incident SH-waves[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1979, 105(4): 643-659.
- [3] V Lee, J Karl. Diffraction of SV Waves by Underground Circular Cylindrical Cavities[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1992, 11(8): 445-456.
- [4] V Lee, J Karl. On Deformations Near a Circular Underground Cavity Subjected to Incident P Waves[J]. European Earthquake Engineering, 1993, 11: 445-456.
- [5] C Lin. Diffraction of P-waves by Underground Circular Cylindrical Cavities In fluid-saturated Porous Medium[C]// Symposium on the Dynamic Response to Transient Loads, the Mechanics and Materials Summer Conference, 2001.
- [6] 李伟华, 申齐豪, 赵成刚. 饱和土半空间中地下圆形衬砌洞室对平面 SV 波的散射[J]. 防灾减灾工程学报, 2009, (2): 172-178. W H Li, Q H Shen, C G Zhao. An Analytical Solution for Scattering and Diffraction of Plane SV Waves by a Cylindrical Lined Cavity in Half-space of Saturated Soil[J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2009, 29(2): 172-178. (in Chinese)
- [7] 李伟华, 张钊. 饱和土中深埋圆柱形衬砌洞室对瞬态平面波的散射[J]. 地球物理学报, 2013, (1): 325-334. W H Li, Z Zhang. Scattering of Transient Plane Waves by Deep Buried Cylindrical Lining Cavity in Saturated Soil[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2013, 56(1): 325-334. (in Chinese)
- [8] S Kattis, D Beskos, A Cheng 2D Dynamic Response of Unlined and Lined Tunnels in Poroelastic Soil to Harmonic Body Waves[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2003, 32(1): 97-110.
- [9] J H Wang, X L Zhou, J F Lu. Dynamic Stress Concentration Around Elliptic Cavities in Saturated Poroelastic Soil Under Harmonic Plane Waves[J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42(14): 4295-4310.
- [10] L F Jiang, X L Zhou, J H Wang. Scattering of a Plane Wave

by a Lined Cylindrical Cavity in a Poroelastic Half-plane[J]. Computers and Geotechnics,2009,36(5):773-786.

[11] M A Biot.Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media[J].Journal of Applied Physics,1962,33(4):1482-1498.

[12] G S Erjanov,S M Aitaliev,L A Alekseeva.Dynamics of Tunnels and of Buried Pipelines[M].Alma-Ata,1989.

[13] M Abramowitz, I A Stegun. Handbook of Mathematical Functions[M].Dover New York,1972.



(上接 1041 页)

[4] 杨溢,张智宇,庙延钢,等.灰色关联分析在预裂爆破震动分析中的应用[J].云南冶金,2001,30(5):1-3.
YANG Yi,ZHANG Zhi-yu,MIAO Yan-gang,et al.Application of Gray Association Analysis for Analysing Vibration in Pre-splitting Blasting[J].Yunnan Metallurgy,2001,30(5):1-3.(in Chinese)

[5] 沈蔚,徐全军,黄文华,等.用灰色关联分析法确定爆破震动参数的主要影响因素[J].工程爆破,2002,6(4):6-13.
SHEN Wei,XU Qaun-jun,HUANG Wen-hua,et al.Determination of Main Influencing Factors on Blasting Vibration Parameters by Grey Correlation Analysis[J].Engineering Blasting,2002,6(4):6-13.(in Chinese)

[6] 吴子泉,姜早峰,王成虎,等.爆破地震效应数据处理影响因素初步研究[J].西北地震学报,2004,26(1):62-65.
WU Zi-quan,JIANG Zao-feng,WANG Cheng-hu,et al.Primary Research on Effect Factors for the Processing Blasting Vibration Data[J].Northwestern Seismological Journal,2004,26(1):62-65.(in Chinese)

[7] 张雪东,侯瑜京,梁向前,等.水下爆破对大坝影响的离心模拟试验研究[J].西北地震学报,2011,33(增刊1):234-236.
ZHANG Xue-dong,HOU Yu-jing,LIANG Xiang-qian,et al.Centrifuge Modeling Research on the Influence of Underwater Blasting on a Dam[J].Northwestern Seismological Journal,2011,33(Supp1):234-236.(in Chinese)

[8] 李翼祺,马素贞.爆炸力学[M].北京:科学出版社,1992.
LI Yi-qi,MA Su-zhen.The Dynamics of Explosion[M].Beijing: Science Press,1992.(in Chinese)