

# 重载货车作用下基床表层应力状态及破坏影响因素分析<sup>①</sup>

时 瑾, 杨 雪

(北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)

**摘要:**重载货车作用下线路破坏问题与基床表层应力状态密切相关。通过建立货车-线路动力分析模型,分析货车通过时基床表层应力状态变化规律,研究道床厚度、轴重、速度、基床表层模量等因素对基床表层破坏的影响规律。结果表明:基床表层在车辆作用下遵循从纯剪到三轴剪切再回到纯剪状态的变化规律,主应力轴连续旋转 180°;道床厚度低于 0.5 m、速度超过 70 km/h、基床表层模量低于 160 MPa、轴重超过 27 t 都有可能造成基床表层塑性变形;当应力路径超过破坏线情况下,路基弹性假设将不再适用。

**关键词:**重载铁路;基床表层;动力响应;应力状态

中图分类号: U213

文献标志码: A

文章编号: 1000-0844(2015)03-0851-06

DOI: 10.3969/j.issn.1000-0844.2015.03.0851

## Analysis of Subgrade Stress State and Factors Contributing to Subgrade Damage From Heavy Haul Freight Cars

SHI Jin, YANG Xue

(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** The damage of railway lines during heavy haul freight train passage is closely related to the stress state of the subgrade surface. In order to study the stress path in subgrade soils under moving trains, this study utilized a dynamic freight-railway model to analyze such stress on during freight train operations. The study investigated the effects of ballast layer thickness, axle load, speed, and other factors contributing to subgrade surface damage. The extent of subgrade stress and related damage were obtained using the Euler beam model to analyze the elastic half-space under one moving load. The stress path in soils under the moving load was analyzed. Based on the modeling, it was determined that the stress state changes from pure shear to triaxial shear and back to pure shear in one cycle. According to the stress path curves for different moving speeds, it was determined that, when the moving load is high, the horizontal shear stress increases dramatically. The results further indicate that the stress state changes from the initial state to pure shear, to triaxial shear, and back to pure shear. The principle axis of stress rotates 180°. However, it is more complex due to the interaction of the wheels. A ballast layer deeper than 0.5 m, train speeds exceeding 70 km/h, the modulus of the subgrade materials less than 160 MPa, and an axle load higher than 27 t, all of these factors may result in the plastic deformation within the subgrade surface. If the stress path reaches the failure line, the hypothesis of elasticity will be invalid.

**Key words:** heavy-haul railway; subgrade surface; dynamic response; stress state

① 收稿日期: 2014-08-20

基金项目: 北京高等学校青年英才计划项目(YETP0560); 上海市科技人才计划项目(13XD1401800)

作者简介: 时瑾(1980-), 男, 副教授, 研究方向为轨道交通线路系统动力学。E-mail: jshi@bjtu.edu.cn。

## 0 引言

近年来我国重载运输取得了快速发展,目前既有重载线路已普遍开行 25 t 轴重万吨列车,27 t、30 t 大轴重列车也已上线运行。随着重载列车轴重、密度的提高,列车对线路的动力影响愈加显著,线路运营条件也愈加恶化。基床表层直接承受道床传来的动载,是运营过程中产生病害的薄弱环节。随着轮轴移动,基床动应力重复变化,应力状态与线路破坏密切相关,开展重载货车作用下基床表层应力变化规律,可为有针对性地拟定加强措施提供科学指导。

国内外学者在列车对轨道、路基动力作用方面开展了大量研究,也对移动载荷情况下应力变化问题进行分析。Heath, D.L. 采用单轴试验研究了路基材料的特性<sup>[1]</sup>。Grabe, P.J 分析了列车通过时主应力轴旋转问题<sup>[2]</sup>,提出了可以通过室内试验估计由列车通过时产生的应力变化模式<sup>[3]</sup>。王常晶,陈云敏<sup>[4-6]</sup>利用移动荷载作用下地基的应力解答,分别分析了单个轮轴荷载和列车移动荷载作用下地基内不同位置土单元应力路径变化特点;发现列车经过时在地基中产生的动应力是一种以压应力为主的循环荷载;动应力的空间分布与地基表面作用静力荷载产生的应力分布相似,但随列车运动而呈动态变化;还研究了列车速度对应力的影响,发现列车速度对应力分布的影响很大。边学成和胡婷等<sup>[7]</sup>采用 2.5 维有限元分析方法,研究列车轮轴荷载作用过程中地基内部土单元的应力路径和主应力轴旋转现象,分析了列车速度、土的剪切波速对应力路径的影响;研究发现:当列车速度低于地基剪切波速时,不同速度的荷载作用下不同地基深度处的土单元应力路径曲线形状都很相似,而当荷载速度增大到接近或者超过地基剪切波速时,土单元应力路径曲线和应力分布均发生很大改变。陈建国、李前进等<sup>[8]</sup>采用列车-轨道耦合动力模型研究不同列车编组和速度条件下路基的动力响应,表明列车速度提高对路基动力响应的有限,但轴重影响很大。

上述研究从理论方面完善了移动荷载作用对土单元应力的影响,为有针对性的分析重载货车作用下有砟轨道-路基应力状态提供了基础。本文以货车-线路动力有限元模型为基础,研究车辆通过时基床表层应力变化规律,分析不同影响因素对基床表层破坏的影响关系。

## 1 货车-线路动力分析模型

车线动力学模型与分析对象密切相关,许多学者发展了二维及三维车线动力分析模型。根据应用条件及研究问题不同,对模型简化程度有所不同。本文主要关注荷载垂向传递问题,采用二维车线动力模型有助于突显主要影响因素,能更好把握科学问题。本文以 ABAQUS 有限元平台为基础建立分析模型。

目前我国重载运输采用车型主要有 C64、C70、C80 等,大多采用三大件式转向架结构,主要包括轮对、侧架、摇枕、车体等。动力学建模时考虑车体、构架和轮对三部分,均考虑为刚体。车体和构架间采用二系悬挂,考虑到货车一系悬挂环节刚度较大,轮对和构架连为一体。车体和构架考虑沉浮和点头运动。车轨之间采用赫兹非线性接触。货车悬挂参数如表 1 所示。

表 1 货车车辆参数<sup>[11]</sup>

名称	单位	数值
车体质量	kg	2×45 900
构架质量	kg	2×1 510
轮对质量	kg	1 295
车体点头惯量	kg·m <sup>2</sup>	4.22×10 <sup>6</sup>
构架点头惯量	kg·m <sup>2</sup>	1 560
悬挂刚度	N/m	1.028×10 <sup>7</sup>
悬挂阻尼	N·s/m	1.0×10 <sup>5</sup>

有砟轨道由钢轨、扣件、轨枕、道床组成,扣件采用弹簧和阻尼器单元模拟,轨枕和道床材料特性采用线弹性模型,采用 4 节点减缩积分单元模拟,钢轨采用离散弹性点支承 Timoshenko 梁模拟。路基分为基床表层、基床底层和路堤本体三部分,采用 4 节点减缩积分单元模拟(图 1)。各部分特性参数如表 2 所示。

由于列车荷载沿纵向作用,在基床表面上的应力可近似视为均匀的,同时每根轨枕受到相同振动荷载的概率相等,线路本身是半无限结构性质,所以可以按平面应变问题进行计算,又由于结构对称,故取线路横断面 1/2 进行动力分析。边界采用黏弹性人工边界,人工边界等效物理系统的弹簧系数  $K_b$  和阻尼系数  $C_b$  分别为<sup>[9-11]</sup>

切向边界

$$K_{BT} = \alpha_T \frac{G}{R}, C_{BT} = \rho c_s \quad (1)$$

法向边界

$$K_{BN} = \alpha_N \frac{G}{R}, C_{BN} = \rho c_P \quad (2)$$

式中  $K_{BT}$ 、 $K_{BN}$  分别为弹簧切向和法向刚度;  $R$  为波源至人工边界点的距离;  $c_S$ 、 $c_P$  分别为 S 波和 P 波的波速;  $G$  为介质剪切模量;  $\rho$  为介质质量密度;  $\alpha_T$ 、 $\alpha_N$  分别为切向和法向黏弹性人工边界参数,取值范围分别为  $[0.35, 0.65]$ 、 $[0.8, 1.2]$ 。

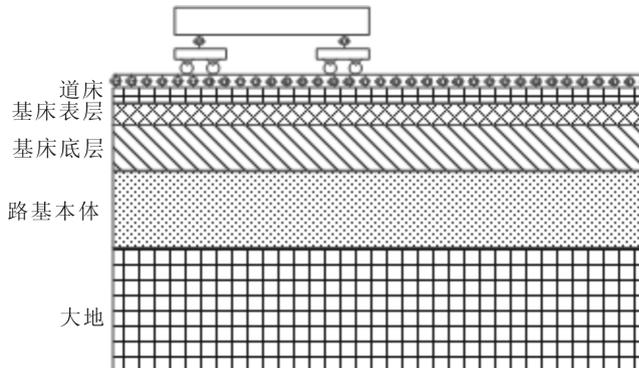


图 1 有限元模型

Fig.1 Finite element model

表 2 轨道和路基材料特性

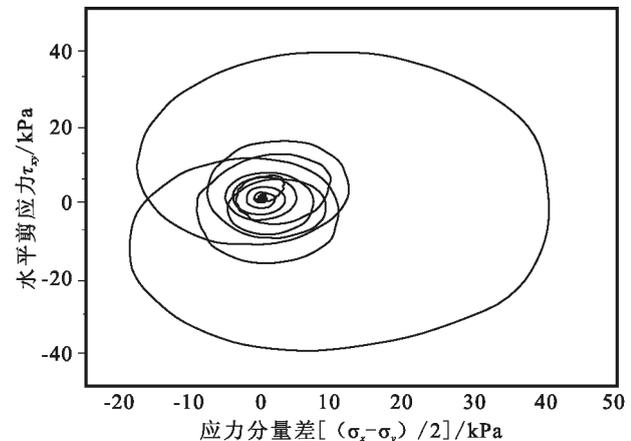
Table 2 Materials properties for the track system and subgrade

组成部分	密度 $\rho$ / ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	泊松比 $\nu$	弹性模量 $E$ /MPa	厚度 /m
钢轨	7 850	0.3	210 000	-
轨枕	2 400	0.2	30 000	0.2
道床	1 800	0.3	180	0.3/0.5/0.8
基床表层	2 100	0.3	160/180/200	0.7
基床底层	2 100	0.3	110	1.8
路基本体	1 800	0.28	50	5
大地	2 300	0.25	27 000	27

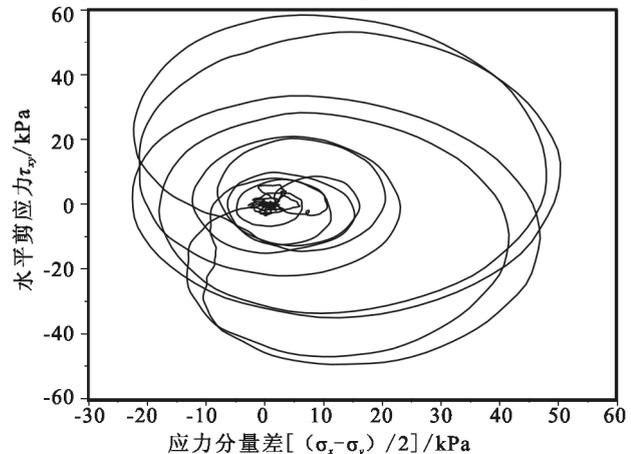
## 2 货车作用下应力状态变化规律

在土力学中通常用应力路径描述土体中的应力随外力变化而演变的过程,为了研究土的强度和变形性质,通常通过三轴试验进行测试,在加压过程中可以由一系列剪应力  $\tau$  和正应力  $\sigma$  形成的应力圆表示土中的应力变化,应力圆可反映土体的破坏特征。但对于复杂的加压方式,这种表示方法会繁杂不清,因此常用土中某一特定截面单元上的应力来表示<sup>[12]</sup>。对于剪裂破坏的土体,其破坏除了与水平切向剪应力  $\tau_{xy}$  有关,还与正应力分量差有关(定义为  $(\sigma_x - \sigma_y)/2$ ,其中  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  分别为水平和垂直方向的正应力分量)。本文为深入分析应力路径,采用应力分量差和剪应力关系来分析基床应力状态。

计算采用表 2 所示参数进行动力分析,根据我国既有重载线路实际情况,道床厚度取 0.5 m,基床表层模量取 180 MPa,轴重取 25 t,运行速度取 70 km/h。图 2 为车辆移动过程中轨道线路正下方土单元的应力路径,由图可以看出车辆运行引起的土单元应力路径曲线并不光滑,形状也不规整,且对同一位置的土单元,即使相同轴重的轮轴荷载通过时引起的应力路径曲线也不完全重合,尤其是当车辆运行速度较低时,这些现象更加显著,这主要是由于车辆运行过程中振动力相互叠加作用的影响。但是土单元的应力路径仍然具有与单个轮轴荷载下的相似的形态特征<sup>[5]</sup>[图 2(b)]。



(a) 单个轮载作用



(b) 一节编组列车作用

图 2 基床表层土单元应力路径

Fig.2 Stress path of soil element at subgrade surface

图 3(a) 为车辆通过时土单元三个方向应力变化情况。由图可见,车辆运行引起的动应力具有循环特性,根据土单元与列车的相对位置可将一节列车通过土单元的应力曲线分为 I、II 两个阶段,分别对应车辆前转向架通过土单元和后转向架通过土单元。

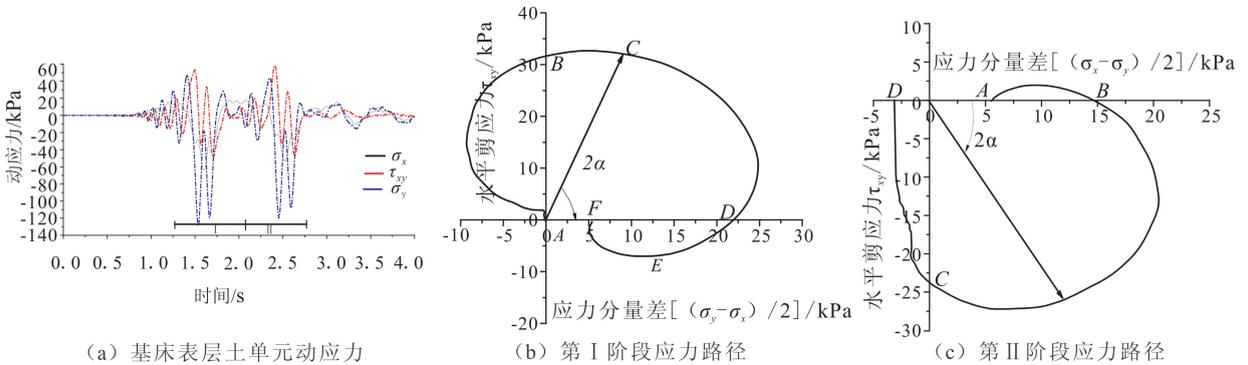


图3 基床表层土单元不同阶段的应力路径

Fig.3 Stress path of soil element at subgrade surface in different stages

图3(b)为第一阶段应力路径变化情况,由图可见,第I阶段A点为车辆距土单元较远时动应力为零,大主应力方向接近水平,随着车辆移动,水平剪应力和应力分量差逐渐增加,且应力分量差为负,表明 $\sigma_x$ 大于 $\sigma_y$ ,并且大主应力轴顺时针旋转,到达B点时应力分量差重新为零,土单元的应力状态为纯剪切状态,大主应力轴旋转了 $\pi/4$ ;当到达点C时水平剪应力达到最大值,土单元处于三轴剪切状态;至D点时第一组轮轴荷载刚好移动到土单元正上方,此时水平剪应力减小到零,且应力分量差达最大值,土单元处于只受正应力作用的纯三轴剪切状态,大主应力旋转了 $\pi/2$ 。第一组轮轴远离土单元的过程中,应力状态刚好呈相反的过程,但受后续轮轴荷载的影响,其应力路径不再恢复到初始应力状态,如图中F点所示,此时主应力轴旋转了 $180^\circ$ 。

图3(c)为第二阶段的应力路径变化情况,起始点A对应于第一阶段的F点,受相邻轮轴荷载的影响,大主应力轴继续在Y轴附近作微小摆动,最后大主应力方向再次与Y轴重合(B点),当大主应力跨越Y轴后,大主应力顺时针旋转到水平方向,如图中D点所示,此时车辆已远离分析位置。

### 3 不同因素对表层破坏的影响

实际服役情况下基床表层土单元容易出现剪切破坏,国内外学者对路基破坏有多种方法预测,如累积应变法、塑性变形法、摩尔-库伦破坏准则等。

Clayton等<sup>[2]</sup>对路基土进行了大量固结不排水三轴试验,确定了摩尔-库伦破坏线及相关参数,即:

$$t = s \times \sin\phi \quad (3)$$

其中: $t = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ ;  $s = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ ;  $\phi = 37^\circ$ 。式中 $\sigma_1$ 和 $\sigma_3$ 分别为大、小主应力,其计算式为:

$$\sigma_1 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_3 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

值得指出的是,当应力路径超过上述破坏线时,土单元的受力达到屈服点,即将进入塑性阶段,此时该破坏准则只起到说明作用,不再作为评判标准。另外,土体的初始应力状态对移动荷载引起的路基内部土单元的应力路径变化、主应力轴旋转影响很大,对于初始状态为静水压力(侧向土压力系数 $K_0 = 1$ )的情况,应力状态变化只取决于动应力<sup>[6]</sup>。本文的初始应力状态为自重应力的静水压力状态,结合文献<sup>[2]</sup>饱和填料的实验,孔压力取30 kPa。

为分析不同因素对路基破坏影响规律,模型基础模拟参数根据我国既有重载线路实际情况选取,其中道床厚度取0.5 m,基床表层模量取180 MPa,轴重取25 t,运行速度取70 km/h。

已有研究资料表明<sup>[8]</sup>:动应力在基床范围内沿深度的衰减速度非常快,即理想情况下当基床表层土单元受力状态偏于安全时,基床底层土单元的受力也会趋于安全。所以本文仅选取基床表层应力状态进行分析。

#### 3.1 道床厚度的影响

道床作为将钢轨、轨枕传来的机车车辆动荷载均匀分布在路基基床面的重要部分,其材料特性及厚度对基床表层的受力影响至关重要。表3为不同道床厚度条件下基床表层应力峰值统计结果,由表可见,道床厚度对基床表层垂向动应力有显著影响。当道床厚度分别为0.5、0.8 m时,基床表层垂向动应力分别比道床厚度为0.3 m时减少约14.06%、29.74%。道床厚度对剪应力影响较小,最大剪应力值约在50 kPa左右。

图4为不同道床厚度条件下基床表层土单元应力路径。由图可见,道床厚度为0.3 m时,基床表层

土单元在车辆荷载作用下受到较大的动应力作用,其最大剪应力已经超过破坏线;道床厚度为 0.5 m 时,最大剪应力几乎达到破坏线。所以随着道床厚度降低,应力路径逐渐接近并超过破坏线,土单元进入塑性状态。对于我国既有重载线路,日常维护中道床厚度应维持在 0.5 m 以上,以降低基床表层破坏风险。

表 3 道床厚度对基床动应力的影响

Table 3 Changes of dynamic stress with different thickness of ballast bed

道床厚度/m	水平应力 $\sigma_x$ /kPa	剪应力 $\tau_{xy}$ /kPa	垂向应力 $\sigma_y$ /kPa
0.3	75.698	53.327	150.075
0.5	63.752	49.507	128.973
0.8	49.173	47.178	105.449

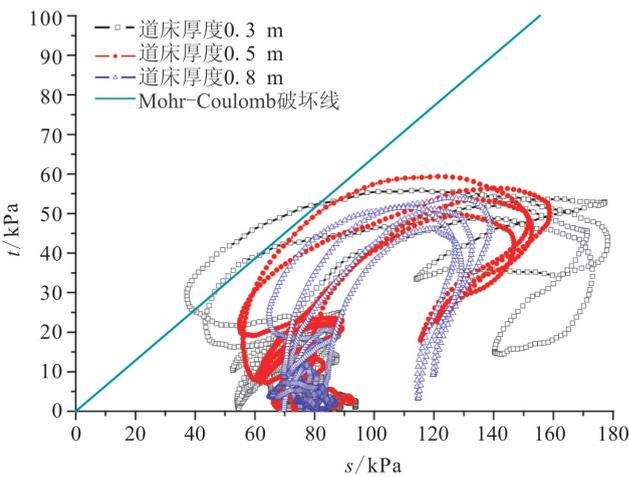


图 4 不同道床厚度条件下的应力路径

Fig.4 Different stress paths with different thickness of ballast bed

### 3.2 轴重的影响

目前我国重载线路上运营或试验的货车轴重类型有 23、25、27 和 30 t 四种类型,表 4 为四种轴重条件下基床表层应力峰值统计结果。由表可见,当轴重分别为 25、27 和 30 t 时,基床表层垂向动应力值比轴重为 23 t 时分别增加了 6.67%、15.29% 和 23.49%,剪应力分别增加了 8.49%、15.32% 和 31.39%。由此可见,随着轴重增加正应力和剪应力呈上升趋势,而且剪应力增量大于垂向动应力增量,这也是迫使最大剪应力增加达到破坏线的原因。

图 5 为不同轴重条件下基床表层土单元应力路径,由图可见,当轴重为 27 t 时,基床表层土单元应力路径曲线已十分接近破坏线;当轴重达到 30 t 时,基床表层土单元应力路径超过破坏线,有发生塑

性变形的趋势。

表 4 轴重对动应力的影响

Table 4 Changes of dynamic stress with different axle loads

轴重/t	水平应力 $\sigma_x$ /kPa	剪应力 $\tau_{xy}$ /kPa	垂向应力 $\sigma_y$ /kPa
23	61.185	45.632	120.908
25	63.752	49.507	128.973
27	70.021	52.622	139.400
30	75.213	59.957	149.312

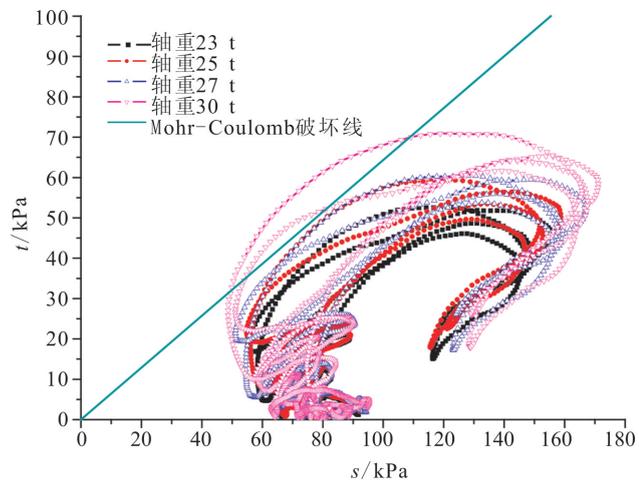


图 5 不同轴重引起的应力路径变化

Fig.5 Different stress paths with different axle loads

### 3.3 速度的影响

分别对 60、70 和 80 km/h 速度下应力状态进行分析,不同速度下应力峰值统计值如表 5 所示。由表可见,速度增加会引起基床表层土单元动应力的急剧增加,尤其是从 70 km/h 增加到 80 km/h 时,剪应力增幅较大。列车速度为 70 km/h 和 80 km/h 时,垂向动应力比 60 km/h 分别增加了 27.87% 和 67.93%,剪应力分别增加了 6.8% 和 72.49%。

表 5 速度对动应力的影响

Table 5 Changes of dynamic stress with different speeds

列车速度 / (km · h <sup>-1</sup> )	水平应力 $\sigma_x$ /kPa	剪应力 $\tau_{xy}$ /kPa	垂向应力 $\sigma_y$ /kPa
60	52.105	46.357	100.865
70	63.752	49.507	128.973
80	77.602	79.963	169.387

图 6 为不同速度条件下的基床表层土单元应力路径,由图可见,当速度为 70 km/h 时,应力路径曲线十分接近破坏线;当速度达到 80 km/h 时,应力急剧增加,最大剪应力远远超过了土单元的抗剪强度,应力路径超过了破坏线。

### 3.4 基床表层刚度的影响

表 6 为不同基床表层刚度条件下基床表层土单

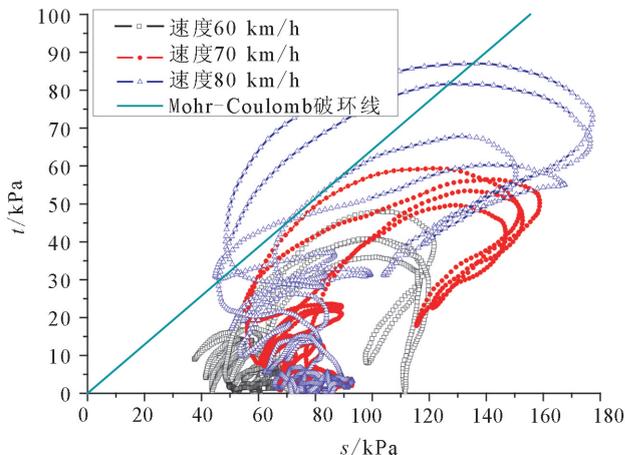


图6 不同速度引起的应力路径变化

Fig.6 Different stress paths with different speeds

元应力峰值统计结果。由表可见,表层刚度对表层土单元的动应力响应影响较小,随着基床表层刚度增加,土单元垂向动应力略有增加,而剪应力呈减少趋势。表层刚度由 160 MPa 增加到 200 MPa 时垂向动应力增加了 0.56%,剪应力减少了 6.38%。

表6 基床表层刚度对动应力的影响

Table 6 Changes of dynamic stress with different stiffness of subgrade surface

基床表层刚度/MPa	水平应力 $\sigma_x$ /kPa	剪应力 $\tau_{xy}$ /kPa	垂向应力 $\sigma_y$ /kPa
160	62.176	51.499	127.484
180	63.752	49.507	128.973
200	64.569	48.215	128.192

图7 是不同基床表层刚度条件下基床表层土单元应力路径。由图可见,模量为 180 MPa 时,土单元应力路径曲线接近破坏线;当模量为 160 MPa

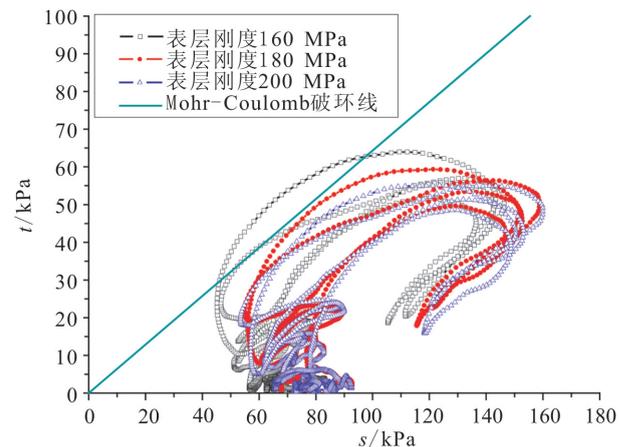


图7 不同基床表层刚度下的应力路径

Fig.7 Different stress paths with different stiffness of subgrade surface

时,基床表层土单元应力路径超过了破坏线,出现塑性变形的风险提高。

## 4 结论

本文从应力路径角度研究重载货车作用下基床表层应力状态规律,研究得到:

(1) 基床表层在车辆作用下遵循从纯剪到三轴剪切再回到纯剪状态的变化规律,整个过程中主应力轴连续旋转 180°。

(2) 既有重载线路速度、道床厚度、轴重和基床表层模量对基床表层剪切破坏有显著影响,道床厚度低于 0.5 m、速度超过 70 km/h、基床表层模量低于 160 MPa、轴重超过 27 t 都有可能造成基床表层塑性变形。

值得指出的是,当应力路径超过破坏线情况下,常见的路基弹性假设将不再适用,需考虑非线性材料特性,这一研究将在后续论文中发表。

## 参考文献(References)

- [1] Heath D L, Shenton M J, Sparrow R W, et al. Design of Conventional Rail Track Foundations[J]. Proc Inst Civ Eng, 1972, 51(2): 251-267.
- [2] Grabe P J, Clayton C R I. The Effects of Principal Stress Rotation on Permanent Deformations in Rail Track Formations[J]. Geotech Geoenviron Eng, 2009, 135(4): 555-565.
- [3] Powrie W, Yang L A, Clayton C R I. Stress Changes in the Ground Below Ballasted Railway Track During Train Passage [J]. Proc Inst Mech Eng, F J Rail Rapid Transit, 2007, 221(2): 247-261.
- [4] 王常晶, 陈云敏. 移动荷载引起的地基应力状态变化及主应力轴旋转[J]. 岩土力学与工程学报, 2007, 26(8): 1698-1704. WANG Chang-jing, CHEN Yun-min. Changes of Stress State and Principle Stress Rotation of Ground under Moving Load [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(8): 1698-1704. (in Chinese)
- [5] 王常晶, 陈云敏. 列车移动荷载在地基中引起的主应力轴旋转 [J]. 浙江大学学报, 2010, 44(5): 950-954. WANG Chang-jing, CHEN Yun-min. Principle Stress Rotation in Ground Under Moving Load [J]. Journal of Zhejiang University, 2010, 44(5): 950-954. (in Chinese)
- [6] WANG Chang-jing, CHEN Yun-min. Analysis of Influencing Factors on Stress Path in Soilelement of Ground Under Moving Load [J]. IEEE, 2010, 7(1): 1-4.
- [7] 边学成, 陈云敏. 列车荷载作用下轨道和地基的动响应分析 [J]. 力学学报, 2005, 37(4): 477-484. BIAN Xue-cheng, CHEN Yun-min. Analysis of Response in Track and Ground under Moving Load [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2005, 37(4): 447-484. (in Chinese)

- [8] 赵成刚,尤昌龙.饱和砂土液化与稳态强度[J].土木工程学报, 2001,34(3):90-96.  
ZHAO Cheng-gang, YOU Chang-long. Liquefaction and Steady State Strength [J]. China Civil Engineering Journal, 2001,34(3):90-96. (in Chinese)
- [9] Zhang J M. Prediction of Liquefaction-induced Residual Deformation[J].Shimizu Technical Research Bulletin 1996, 15:1-29.
- [10] 周云东.地震液化引起的地面大变形试验研究[D].南京:河海大学,2003.  
ZHOU Yun-dong. Laboratory Study on Large Ground Deformation Induced by Earthquake Liquefaction [D]. Nanjing: Hohai University, 2003. (in Chinese)

\*\*\*\*\*  
(上接 856 页)

- [8] 陈建国,李前进,肖军华,等.提速列车荷载下铁路路基动力特性的研究[J].岩土力学,2009,30(7):1944-1950.  
CHEN Jiang-guo, LI Qian-jin, XIAO Jun-hua, et al. Dynamic Response of Existing-railway Subgrade with Train Speed Increasing[J].Chinese Journal of Rock Mechanics, 2009, 30(7): 1944-1950. (in Chinese)
- [9] 董亮,赵成刚,蔡德钩,等.粘弹性一致人工边界及其在高速铁路路基中的应用[J].土木工程学报,2008,41(10):81-86.  
DONG Liang, ZHAO Cheng-gan, JI De-gou, et al. Consistent Viscous-spring Artificial Boundary and Application in Subgrade of High-speed Railways [J]. China Civil Engineering Journal, 2008, 41(10): 81-86. (in Chinese)
- [10] 刘晶波,谷音,杜义欣.一致粘弹性人工边界及粘弹性边界单元[J].岩土工程学报,2006,28(9):1070-1075.  
LIU Jing-bo, GU Ying, DU Yi-xin. Consistent Viscous-spring Artificial Boundary and Viscous-spring Boundary Element [J]. Journal of Rock Engineering, 2006, 28(9): 1070-1075. (in Chinese)
- [11] 翟婉明.车辆-轨道耦合动力学[M].北京:科学出版社,2007: 393.  
ZHAI Wan-ming. Vehicle-track Coupling Dynamics [M]. Beijing: Science Publishing Company, 2007: 393. (in Chinese)
- [12] 刘成宇.土力学[M].北京:中国铁道出版社,2010:157.  
LIU Cheng-yu. Soil Mechanics [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 2010: 157. (in Chinese)