青藏铁路高温多年冻土区列车行驶路 基长期永久变形数值模拟研究◎

田立慧^{1,2},凌贤长^{1,4},王立娜³,张 锋¹

(1. 哈尔滨工业大学,黑龙江哈尔滨 150090; 2.黑龙江科技大学矿业工程学院,黑龙江哈尔滨 150022;

3. 云南农业大学建筑工程学院,云南 昆明 650201;

4.中国科学院寒区旱区环境与工程研究所,冻土工程国家重点实验室,甘肃 兰州 73000)

摘要:基于动三轴试验建立的冻结、融化状态青藏铁路粉质黏土的累积塑性应变模型,考虑路基上 体动应力的作用,二次开发适用于青藏铁路高温极不稳定多年冻土区路基长期永久变形的蠕变法 则,并在既有的黏弹塑性本构模型将其引入,计算列车荷载作用下青藏铁路路基的永久变形。分析 结果显示:(1)列车荷载作用下距离路基顶面不同埋深土体的累积动力永久应变随着等效振次的增 加而增加,并且先期的增长速度较快,最终趋于稳定,长期沉降在路基中心处最大,最终在路基距离 轨道最远处几乎为零;(2)随着列车速度的增加,路基中心永久变形逐渐增大;(3)随着列车轴重的 增加,路基中心永久变形逐渐增大,并且随着埋深的增加,列车轴重对路基永久变形的影响逐渐变 小;(4)随着冻结深度的增加,路基表面累积塑性变形呈降低趋势;随着融化深度的增加,路基表面 累积永久变形增加。

Numerical Simulation of Permanent Deformation of Embankment Induced by Train Load in Permafrost Regions Along the Qinghai—Tibet Railway

TIAN Li-hui^{1,2}, LING Xian-zhang^{1,4}, WANG Li-na³, ZHANG Feng¹

(1. Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150090, China;

2.School of Mining Engineering, Heilongjiang University of Science and Technology, Harbin, Heilongjiang 150022, China;
3.College of Architecture and Civil Engineering, Yunnan Agricultural University, Kunming, Yunnan 650201, China;
4.State Key Laboratory of Frozen Soil Engineering, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou, Gansu 730000, China)

Abstract: With the completion of the Qinghai — Tibet Railway (QTR), several types of damage induced by traffic loads have occurred in the permafrost embankment; therefore, the safe-operation demand and speed-increasing scheme of the railway will be severely affected. Permafrost is an important engineering characteristic of the QTR and is the main reason for the settlement deformation of the embankment. The embankment deformation induced by trains includes elastic and plastic deformation. Although the residual plastic deformation will ultimately become accumulative permanent deformation with an increase in load number, plastic deformation might be only a small proportion of the total deformation in the embankment induced by a single train load. Une-

ven deformation in an embankment is caused by excessive post-construction settling and creates a severe negative influence on the service period of a train and on the safety and comfort of its passengers. Therefore, the accumulated settlement of embankment under the traffic load is an important influence factor of embankment stability. Making an accurate estimate of permanent embankment deformation is of great significance for guaranteeing the stability of trains and the design of railway embankments. In this study, a Duo test section is analyzed, and on the basis of dynamic triaxial tests with samples taken from the QTR, an empirical accumulative plastic strain model is created in frozen and molten states. The CREEP subroutine is used to provide a theoretical foundation for calculation of permanent deformation of the QTR embankment. The results indicate that when the depth is 2.5 m or less, the accumulative permanent deformation of the embankment increases with an increase in train speed. However, when the depth is 8.2 m, the accumulative permanent deformation decreases as the train speed increases. The cumulative plastic strain increases gradually and maintains a constant level with an increase in depth to the top of the embankment under traffic loading and increases to maximum at the embankment center. Moreover, permanent deformation increases with an increase in train speed. Further, the maximum deformation of the embankment increases from 8.9 mm to 47 mm when the axle load increases from 8 t to 25 t.Because axle load has a significant influence on embankment deformation, controlling the axle load of a train may be effective in slowing the uneven deformation of the embankment.Permanent deformation increases with an increase in train axle load, and the influence of the train axle load is reduced with an increase in depth.In addition, long-term settlement in the embankment center increases with an increase in the equivalent vibration. Permanent deformation increases from 31.8 mm to 35.8 mm, or 13%, when the equivalent vibration of the train is 50 000 times and 100 000 times. After that, however, accumulative permanent deformation increased by 5.9%, 3.7%, and 2. 5% for each respective 50 000 times increase in vibration. The accumulation of permanent deformation of the embankment increases rapidly in the early train run and then gradually slows. Therefore, protection and repair of the embankment should be conducted early. Finally, the freeze-thaw condition has a significant effect on the accumulated permanent deformation of the embankment. The cumulative plastic deformation on the embankment surface decreases with an increase in frozen depth and increases with an increase in thawed depth. The work provides experimental data for further research on the dynamic characteristics of frozen soil.

Key words: Qinghai — Tibet Railway; embankment in permafrost regions; permanent deformation; numerical simulation; CREEP subroutine

0 引言

高原多年冻土是青藏铁路重要的工程特征之一,也是引起路基沉降变形等病害的主要根源。路基各结构层在列车荷载长期反复作用下产生的变形 主要包括在列车经过之后迅速回弹、恢复的弹性变 形和在列车驶过之后无法恢复的塑性变形。尽管在 单次列车荷载作用下,塑性残余变形仅占路基结构 层总变形的一小部分,但由于列车荷载的长期多次 反复作用,塑性残余变形会随作用次数的增加不断 增大乃至变成累积永久变形。过大的路基沉降会导 致路基的不均匀变形等病害现象,严重影响铁路路 基的服役期限以及列车行驶的安全性和舒适度。综 上所述,交通荷载作用下路基的累积沉降是决定路 基稳定性的重要影响因素,合理准确地估计由于列 车荷载造成的路基永久变形,对于保证列车的安全 行驶以及指导铁路路基的设计有着至关重要的意 义^[1-2]。

1 路基断面的选择

本文针对青藏铁路安多试验段某断面进行分 析,如图1所示。安多试验段地处唐古拉山南坡70 km,位于尕勒布曲河谷区,青藏高原腹地的多年冻 土区内,平均海拔在4800m以上。该地区夏季短暂,冬季漫长,无明显的春秋过渡季节,年平均地温值 大约安多试验段在一0.3℃附近,属于多年冻土高温 极不稳定区,多年冻土厚度大约在15m左右^[3]。安 多试验段按照I级铁路重型轨道类型标准设计路基 面,基床分上下两层,上层厚0.6m,下层厚1.9m。

2 列车荷载引起路基沉降计算方法

目前计算动荷载引起的路基沉降的方法有三 种^[4-5]:一是解析法,该法基于弹性理论和太沙基固 结理论,具有一定理论基础而又简单实用,缺点是不 能考虑列车荷载实际的传力机制,无法反应列车荷 载的动力特性,导致结果偏小;二是数值分析方法, 常采用弹塑性或者黏弹塑性本构模型,该方法最合 理,但因为列车荷载为长期反复荷载,时间长达数十 年,振次多达上万次,而该方法又需要对每一循环振 次进行分析,致使计算量大,对硬件要求高,不易实 现;三是数值模拟方法,利用数值模拟所得的振动反 应等分析结果结合经验拟合公式计算铁路路基的永 久变形,该方法易于实现,在实际中应用广泛。因此 本文选用数值模拟方法计算列车荷载下路基累积变 形。



图 1 青藏铁路安多段路基断面图(单位:m) Fig.1 The subgrade diagram of the Anduo section of the Qinghai-Tibet Railway(unit: m)

具体的计算步骤分为如下四个步骤:

(1) 计算铁路路基不同深度处路基土体附加动 偏应力。

动偏应力是路基长期沉降的主要影响因素^[6], 故本文首先计算路基中动偏应力,动偏应力用 q_d表 示,由式(1)计算。

$$q_{\rm d} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_{\rm d1} - \sigma_{\rm d2})^2 + (\sigma_{\rm d2} - \sigma_{\rm d3})^2 + (\sigma_{\rm d3} - \sigma_{\rm d1})^2 \right]}$$
(1)

式中,J₂为第二应力不变量;σ_{d1}、σ_{d2}、σ_{d3}为路基在列 车行驶振动荷载单独作用下引起的单元的第一、二、 三动主应力,可通过数值模拟结果^[7]来确定。

将计算得到的动偏应力作为一种初始场变量, 通过状态变量 Statev 将单元的动应力传递给 CREEP 子程序,以此来计算单元的残余应变。

(2) 初始静应力计算

路基土体地层在列车荷载作用下尚未产生沉降 时便已具有一定的初始地应力。将路基地层土体中 初始应力状态进行平衡之后,即可得到路基地层土 体初始的固结条件。

(3) 根据经验公式开发与以 Drucker-Prager 准则为屈服标准的黏弹塑性本构模型接口的 CREEP 子程序。

(4)由静应力条件、动应力条件计算青藏铁路 列车荷载下累积动力永久变形。

3 CREEP 子程序二次开发

本文基于动三轴试验建立的冻结、融化状态青 藏铁路粉质黏土的累积塑性应变模型,即式(2)和式 (3)。考虑计算得到的路基土体动应力的作用,二次 开发适用于青藏铁路高温极不稳定多年冻土区路基 长期永久变形的蠕变法则,并在既有的黏弹塑性本 构模型将其引入。

冻土累积塑性应变预测模型:

 $\varepsilon_{\rm p} = AN^{\rm B} = (0.016S_{\rm cr} - 0.006)N^{(0.016S_{\rm cr} - 0.001)}$

(2)

融土累积变形预测模型:

 $\varepsilon_{p} = AN^{B} = (0.001 + 0.002S_{cr})N^{(0.008+0.208S_{cr})}$

(3)

3.1 蠕变模型

(1) 蠕变应力

采用 Drucker-Prager 屈服准则所用的蠕变势 函数为双曲线。假定模型中存在由应力点构成的蠕 变等倾面,该等倾面上具有相同的蠕变强度,通过等 效蠕变应力来衡量。当材料发生塑性变形时,需要 等效蠕变面与屈服面一致,因此等效蠕变面可由屈 服面等比例缩小得到。在 *p-q* 平面上,蠕变等倾面 与屈服面平行,如图 2。通过单轴压缩试验测定定 义材料的蠕变性能时,等效蠕变应力为式(4):

$$\bar{\sigma}^{\rm cr} = \frac{(q - p \tan\beta)}{(1 - \frac{1}{2} \tan\beta)} \tag{4}$$

式中, σ^{er} 为等效蠕变应力; β 为材料的内摩擦角。

(2) 蠕变流动

本文采用双曲线流动势函数来反应蠕变应变率 的蠕变流动问题。即:

$$G_s^{\rm cr} = \sqrt{\left[0.1 \frac{d}{(1 - \tan\beta/3)} \tan\beta\right]^2 + q^2} - p \tan\beta$$
(5)

式中,d为黏聚力。



图 2 p-q 面屈服面和双曲线流动势函数 示意图

Fig. 2 Schematic diagram of yield surface and hyperbola flow potential function on p-qplane

(3) 蠕变法则

常用的蠕变特性描述方式有两种:时间硬化蠕 变模型和应变硬化蠕变模型。本文采用时间硬化的 蠕变模型对路基填土部分进行蠕变分析。

对于黏聚蠕变机理,蠕变法则可采用时间硬化 幂函数法则,即:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\,\mathrm{cr}} = A \, (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\,\mathrm{cr}})^n \, t^m \tag{6}$$

式中: ϵ^{cr} 蠕变应变率; σ^{cr} 为等效蠕变应力;t为总时间;A,n,m为蠕变参数,可为温度和场变量的函数。

3.2 自定义蠕变模型引入

将实验得到的冻土、融土累积塑性应变模型接 口到 Abaqus 有限元软件的黏弹性模型中。在本文 的分析中将列车动荷载引起路基土体动应力的最大 值^[7]做为路基土的恒应力,其作用时间与列车荷载 的等效振动次数有关。则列车荷载的等效振动次数 与振动总时间的关系为 $N = t/t_0$, t_0 为一次的作用 时间。则青藏铁路粉质黏土的累积塑性应变模型可 表示成式(7)。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\rm cr} = A N^B = A \left(t / t_0 \right)^B \tag{7}$$

式(7)中假设与动应力有关的参数 A、B 均不随时 间变化,则有

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\rm cr} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathrm{d}t} = A \cdot B \cdot t_0^{-B} \cdot t^{(B-1)} \tag{8}$$

式(8)即是根据青藏铁路粉质黏土累积塑性应变模型建立的蠕变法则。其中参数 A、B 分别经实验得出,见式(9)~(12)。将上述公式写成符合格式要求的 Creep 子程序,即可计算出列车荷载长期作用下路基的永久变形。

冻土状态下:

$$A = 0.016S_{\rm cr} - 0.006, R = 0.81 \tag{9}$$

$$B = 0.016S_{\rm cr} - 0.01, R = 0.73$$
 (10)

融土状态下:

- $A = 0.001 + 0.002S_{\rm cr}, R = 0.78$ (11)
- $B = 0.008 + 0.208S_{\rm cr}, R = 0.77$ (12)

4 材料参数

经分析^[7]可知,当振动传递到 10 m 之后应力 值已经非常小,因此本文对路基填土和粉质黏土层 进行动蠕变分析。其中粉质黏土参数 A、B 为式 (9)~(12)预测表达式;路基填土层采用时间硬化蠕 变模型见式(6),具体参数的取值见表 1。

表 1 不同温度时路基填土蠕变参数 A、n、m

Table 1 The value of A, n, m at different temperatrues

	正温	-5	-10	-15
Α	2E-12	6E-13	3.836E-18	5.15E-11
n	1.88	1.68	2.86	1.07
m	-0.9	-0.883	-0.805	-0.876

5 路基动力永久变形计算方案

根据得到的路基土体的累积塑性应变模型,综 合考虑固结围压和动力分析得到的地层动应力,开 发接口于黏弹塑性本构模型的 CREEP 子程序,然 后建立青藏铁路多年冻土区路基二维模型,进而计 算出列车行车荷载作用下青藏铁路路基的永久变 形。

运行阶段的列车荷载对轨道-路基的作用是呈 动态变化的,最符合实际的分析方法应采用动力有 限元法^[8]。但相对于静态分析,动力分析需要耗费 大量的计算时间,故根据计算首先得到路基土体动 应力的最大值^[7],并将其假设成作用在土体的恒应 力,并且把单次的作用时间乘上等效作用振次作为 列车荷载作用的总时间,如图 3。

假设列车荷载一个转向架通过一次的时间为: $t_0 = L/V$ (13)

为了计算安全,其中 L 近似为 2 倍转向架距 离,对于不同类型的列车,转向架的距离不同,见表 2。



图 3 轨枕作用力简化图

Fig. 3 Simplified diagram of track-sleeper dynamic interactive forces

表 2 不同类型列车转向架轴距

Table 2 Truck wheelbase of each type of train

车辆类型	客车	货车	客车机车	货车机车
转向架轴距/m	2.4	1.75	4.3	3.6

一节列车有两个转向架,即作用两次,当有 N 个 转向架时,等效为列车荷载振动 N 次,荷载作用的总 时间为:

$$T = t_0 \times N = \frac{L}{v} \times N \tag{14}$$

路基的动力永久变形与列车轴重、运行速度、等 效振动次数和路基冻融状态有关。本文分成四种方 案:

(1) 车速为 100 km/h、等效振动次数为 10 万次, 分析列车轴重对路基永久变形的影响规律(表 3)。

表 3 列车轴重对路基永久变形影响工况表

Table 3 Conditions of testing effect of train axle load on permanent deformation of embankment

冻融	车速/ (km・h ⁻¹)	转向架 距离/m	单次作用 时间/s	等效振 次/万次	等效荷 载时间/s
			0.126	8	12 600
			0.126	13	12 600
全部融作	化 100	1.75	0.126	17	12 600
			0.126 21	21	12 600
			0.126	25	12 600

(2) 对等效振动 10 万次,列车速度对累积永久 变形的影响进行分析。不同行使速度对应等效作用 时间如表 4。

表 4 列车速度对路基永久变形影响工况表

 Table 4
 Conditions of testing effect of velocity on permanent

 deformation of embankment

冻融	车速/	转向架	单次作用	等效振	等效荷
状态 (1	$m \cdot h^{-1}$)	距离/m	时间/s	次/万次	载时间/s
	60		0.516	10	51 600
	80		0.387	10	38 700
全部融化	100	4.3	0.309	10	30 900
	120		0.258	10	25 800
	150		0.207	10	20 700

(3) 对于客车车速为100 km/h时,计算与振动 次数对应的等效作用时间,分析处车辆振次对路基 动力永久变形的影响规律。不同振动次时的等效作 用时间如表5。

表 5 等效振动次数对路基永久变形影响工况表

 Table 5
 Conditions of testing effect of number of cycle on permanent deformation of embankment

冻融 状态	车速/ (km・h ⁻¹)	转向架 距离/m	单次作用 时间/s	等效振 次/万次	等效荷 载时间/s
			0.309	5	$15 \ 450$
			0.309	10	30 900
全部融化	化 100	4.3	0.309	15	46 350
			0.309	20	61 800
			0.309	25	77 250

(4) 对于客车车速为 100 km/h,等效振动 10 万次,路基冻融状态对路基动力永久变形的影响规 律(表 6)。

表 6 冻融状态对路基永久变形影响工况表

 Table 6
 Conditions of testing effect of thaw cycle on permanent deformation of embankment

冻融	车速	转向架	单次作用	等效振	等效荷载
状态	$(/km \cdot h^{-1})$	距离/m	时间/s	次/万次	时间/s
融化4	m				
全部融	化 100	4.0	0.200	10	20.000
冻结4	m 100	4.3	0.309	10	30 900
冻结 6	m				

6 路基动力永久变形计算结果分析

图 4 给出了行车速度为 60、80、100 和 150 km/ h 时,不同深度路基测点的累积动力永久应变随等 效振动次数的变化曲线。图 5 给出了货车以 100 km/h 速度运行时,不同轴重下各路基测点的累积 动力永久应变随等效振动次数的变化曲线。从图中 可以看出,随着等效振次的增加不同测点处的累积

动力永久应变越小。并且路基通车后一段时间,累 积动力永久应变增加较迅速,随着时间的增长其提 高的幅度不断衰减,最后趋于稳定。



图 4 不同速度下路基测点累积动力永久应变-等效振次曲线

Fig.4 Curves of accumulative plastic permanent strain and equivalent vibration cycle of points on embankment at different speeds



图 5 不同列车轴重下路基测点累积动力永久应变-等效振次曲线

Fig.5 Curves of accumulative plastic permanent strain and equivalent vibration cycle of points on embankment at different axle loads

图 6 对比了列车速度为 100 km/h,等效振动 次数为 10 万次时,冻融状态不同时对路基表面中心 点累积动力永久变形的影响。显然,路基土体的冻 融状态对路基内累积动力永久变形有显著地影响。 随着冻结深度的增加路基表面累积塑性变形呈降低 趋势。随着融化深度的增加,路基表面累积塑性变 形增加。



图 6 不同冻融状态路基中心永久变形与等效 振动次数的关系

Fig.6 Relationship between equivalent vibration cycle and permanent deformation of embankment center under different freeze-thawing conditions

7 结论

本文通过上述研究,得到的主要结论如下:

(1)列车荷载作用下,距离路基顶面不同埋深 土体的累积动力永久应变随着等效振次的增加均呈 增加的趋势,但是先期的增长速度较快,当累积塑性 应变增长到一定阶段之后发展速度减缓,最终趋于 稳定。在长期荷载作用下,路基表面沿横向长期沉 降呈中部大两边小,即长期沉降在路基中心处最大, 并随着路基两侧距路基轨道距离的增加而呈逐渐递 减,最终在路基距离轨道最远处的长期沉降几乎为 零。

(2) 当埋深小于 2.5 m 时随着列车运行速度的 增加,路基土体的累积动力永久应变增加;当路基振 动传到 8.2 m 处时列车运行速度越大,则累积动力 永久应变越小。随着列车速度的增加,路基中心永 久变形逐渐增大。

(3)随着列车轴重的增加,路基中心永久变形 逐渐增大;并且随着埋深的增加,列车轴重对路基永 久变形的影响逐渐变小。当轴重从 8 t 增加到 25 t 时,路基最大变形从 8.9 mm 增加到 47 mm,可见列 车轴重对路基变形影响显著,因此控制列车的轴重 可以有效地减缓路基的不均匀变形病害。

(4) 路基中心处长期沉降随着等效振动次数的 增加而增加,在列车等效振动 5 万次和 10 万次时, 对应的永久变形为 31.8 mm 和 35.8 mm,增加了 4 mm;之后振动次数每增加 5 万次,累积动力永久变 形分别增加了 2.1 mm、1.4 mm 和 1.0 mm。列车运 行初期累积永久变形增加较快,随着列车运行时间 的增长,其增长速率逐渐减慢。因此由于路基顶面 前期永久变形发展较快,应及时对前期路基进行防 护和修护。

(5)路基土体的冻融状态对路基内累积动力永 久变形有显著的影响。随着冻结深度的增加路基表 面累积塑性变形呈降低趋势。随着融化深度的增 加,路基表面累积永久变形增加。

参考文献(References)

[1] 王小军,米维军,武小鹏,等.青藏铁路多年冻土区路堤人为上
 限的主要影响因素分析研究[J].岩土工程学报,2010,32(8):
 1221-1227.

WANG Xiao-jun, MI Wei-jun, WU Xiao-peng, et al. Main Factors Influencing Artificial Upper Table for Embankment of Qinghai — Tibet Railway in Permafrost Region [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(8); 1221-1227. (in Chinese)

[2] 吴志坚,陈拓,马巍.青藏铁路多年冻土区机车荷载传递特性分析[J].岩土工程学报,2013,35(增刊1):9-13.

WU Zhi-jian, CHEN Tuo, MA Wei. Characteristics of Load Transmission of Trains in Permafrost Regions Along Qinghai-Tibet Railroad[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(8):1221-1227. (in Chinese) [3] 薛强.青藏铁路安多段高温极不稳定冻土斜坡路基稳定性分析
 [D].北京:北京交通大学,2007.
 XUE Qiang. Analysis of Stability of Embankment Upon the

Slope in the Extremely Instable Permafrost Area at Anduo Section of Qinghai — Tibet Railway[D].Beijing:Beijing Jiaotong University, 2007.(in Chinese)

[4] 仇敏玉.交通荷载对道路工后沉降影响的研究[D].杭州:浙江 大学,2011.

QIU Min-yu. Study on Post-construction Settlement of Road under Traffic Load[D].Hangzhou.Zhejiang University,2011.

- [5] 董亮,蔡德钩,叶阳升,等.列车循环荷载作用下高速铁路路基 累积变形预测方法[J].土木工程学报,2010,43(6):100-108. DONG Liang, CAI De-gou, YE Yang-sheng, et al. A Method for Fredicting the Cumulative Deformation of High-speed Railway Subgrades under Cyclic Train Loads[J].China Civil Engineering Journal,2010,43(6):100-108.(in Chinese)
- [6] 刘伟,汤连生,张庆华.车辆动载下路基土坚向动应力及扩散规 律[J].重庆交通大学学报:自然科学版,2012,31(4):799-823. LIU Wei, TANG Lian-sheng, ZHANG Qing-hua. Research on Dynamic Stress of Subgrade Soil Under Vehicle Loads and Its Diffused Rule[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University: Natural Science, 2012, 31(4):799-823. (in Chinese)
- [7] 王立娜.青藏铁路多年冻土区列车行驶路基振动反应与累积永 久变形[D].哈尔滨.哈尔滨工业大学,2013.
 WANG Li-na.Train-induced Dynamic Response and Permanent Deformation of Embankment in Permafrost Reging along Qinghai—Tibet Railway[D].Harbin:Harbin Institute of Technology,2013.(in Chinese)
- [8] 黄俊杰,苏谦,钟彪,等.多年冻土斜坡路基失稳变形影响因素 及特征研究[J].岩土力学,2011,34(3):703-710.
 HUANG Jun-jie, SU Qian, ZHONG Biao, et al. Deformation Failure Characteristics and Influential Factors of Subgrade Upon Slope in Permafrost Area[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011,34(3):703-710.(in Chinese)