

一维连续导电剖面的反演问题

张莲海, 梁子斌, 周民都

(中国地震局兰州地震研究所, 甘肃 兰州 730000;)

摘要:基于 Schlumberger 装置测得的视电阻率, 在 Coen 理论的基础上对一维连续直流导电剖面的反演问题进行研究。分别给出了导电剖面是常函数、线性函数、幂函数、指数函数、分段函数情况下的精确数据和噪音数据反演结果。利用一个野外场地反演的例子, 把利用该方法进行反演得到的连续模型和 Inman 得到的层状模型进行了相应的比较, 发现该方法在处理实际场地数据也是有效的。

关键词: 电阻率法; 反演问题; 一维; 连续导电剖面; 直流电源; 连续模型

中图分类号: P319.2

文献标识码: A

文章编号: 1000-0844(2010)01-0016-05

Inverse Problem of The One-dimensional Continuous Conductivity Profile

ZHANG Lian-hai, LIANG Zi-bin, ZHOU Min-du

(Lanzhou Institute of Seismology, CEA, Lanzhou 730000, China)

Abstract: Based on the Coen inverse algorithm, the inverse determination of one-dimensional continuous conductivity profile from the measurements of apparent resistivity with Schlumberger array is studied. The inversions of precise data and noise data in different conductivity profiles, such as constant function, linear function, power function, exponential function and piecewise function, are given. Using a real field example in which the conductivity profile is determined with layered model by Inman in 1975, we compare the results between our continuous conductivity profile and Inman's and it is found that the method is valid.

Key words: Resistivity method; Inverse problem; One-dimension; Continuous conductivity profile; Direct current power; Continuous model

0 引言

在一维视电阻率的正反演问题中, 有关层状模型的研究已经比较成熟, 也得到了广泛的应用^[1]。但是对于导电剖面连续的情况, 相关的研究确很少, 进展也很缓慢。Stoyer 和 Wait 得到了半无限介质中电导率随深度呈指数函数变化的视电阻率解析解^[2]; 赵和云等给出了层状介质中电导率随深度呈二次幂变化的有限元解^[3]; Sampaio 研究了半无限介质中导电剖面随深度线性增长和反线性增长的情况, 并给出了其相应的视电阻率计算公式^[4]; Sato 等研究了半无限介质中电导率随深度呈幂函数变化的情况, 并应用该理论来探测孔隙度或孔隙水盐分

随深度的变化^[5]; 梁子斌、钱家栋得出了层状模型中每层电导率随深度按指数函数变化的核函数递推公式^[1]。然而这些模型都局限于电导率随深度变化满足特定函数的情况(如指数函数, 幂函数, 线性函数等), 并不适用于任意的连续函数。

Langer^[6]和 Slichter^[7]证明了任意函数的电导率函数可以通过大地表面的电势唯一地确定, 然而他们给出的办法并不方便应用于实际计算; Coen 详细研究了该问题, 并分别从完整精确的人工数据和野外场地的原始数据进行了实例分析^[8]。本文拟在 Coen 理论的基础上给出 Schlumberger 装置一维连

收稿日期: 2009-09-09

中国地震局兰州地震研究所论著编号: LC2010001

作者简介: 张莲海(1982-), 男(汉族), 山东德州人, 硕士, 主要从事固体地球物理专业地震地电方向。

续导电剖面的数值反演,并结合具体的例子分析算法的优劣。

1 Coen 的理论过程简述

在水平均匀介质中,采用柱坐标系,由麦克斯韦方程组可得电位 Φ 将满足下列方程:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\sigma(z)} \frac{d\sigma(z)}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \right] \Phi(r, z) = 0 \quad (1)$$

$$0 \leq r < \infty, z > 0$$

边界条件:

$$\lim_{\sqrt{r^2+z^2} \rightarrow \infty} \Phi(r, z) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi(r, 0)}{\partial z} = \frac{-I}{2\pi\sigma(0)} \frac{\delta(r)}{r} \quad (3)$$

式中 I 为电源的供电电流; $\sigma(0)$ 是地表电导率; $\delta(r)$ 是狄拉克函数。

Schlumberger 装置测量的视电阻率 $\rho_a(r)$ 与下式确定的地表电位梯度有关

$$\frac{\rho_a(r)}{\rho(0)} = -\frac{2\pi\sigma(0)}{I} r^2 \frac{\partial \Phi(r, 0)}{\partial r}, 0 \leq r < \infty \quad (4)$$

式中 $\rho(0)$ 是地表电阻率。我们的目的是要通过

$\frac{\rho_a(r)}{\rho(0)} (0 \leq r < \infty, z > 0)$ 确定电剖面的 $\sigma(z)$, 这里假设 $\frac{\rho_a(r)}{\rho(0)}$ 是完全已知的。这是一个非线性的反演问题,归结为薛定谔方程的反散射问题,它的解已经由 Weidelt 用修正的 Geifand - Levitan 理论得到^[9-10]。Coen 应用以上理论基础对该反演问题进行了详细的研究,给出了一个反演计算方法^[8]。

(1) 从 $\rho_a(r)/\rho(0), 0 \leq r < \infty$, 我们可以定义辅助函数 $d(r)$ 为

$$d(r) = \frac{1 - \rho_a(r)/\rho(0)}{2}, 0 \leq r < \infty \quad (5)$$

(2) 由下面求解积分方程得到 $B(x)$:

$$d(r) = \int_0^\infty B(x) \frac{r^3}{[r^2 + x^2]^{3/2}} dx, 0 \leq r < \infty \quad (6)$$

(3) 由下面的解积分方程得到 $A(x, y)$:

$$A(x, y) = B(x, y) + \int_{-x}^x A(x, t) [B(y+t) + B(y-t)] dt \quad (7)$$

$$|y| \leq x$$

(4) 用下式,由 $A(x, y)$ 得到函数 $g(z)$:

$$g(z) = 1 + \int_{-z}^z A(z, t) dt, z \geq 0 \quad (8)$$

(5) 最后得到所求的电剖面

$$\sigma(z) = \sigma(0) g^2(z), z \geq 0 \quad (9)$$

这个解是正的实数值。

2 不同电剖面情况的计算

为说明该算法的有效性,本文设定了几种不同电剖面情况,分别给出了精确数据和 1% 干扰的噪音数据的反演结果。

2.1 电剖面是常数

电剖面函数

$$\sigma(z) = \sigma(0), 0 \leq z < \infty \quad (10)$$

地表电位函数^[11]

$$\Phi(r, 0) = \frac{I}{2\pi\sigma(0)r}, 0 \leq r < \infty \quad (11)$$

视电阻率解析式

$$\rho_a(r) = \rho(0), 0 \leq r < \infty \quad (12)$$

令 $\sigma(z) = \sigma(0) = 0.5$, 利用式(12)得到均匀无限半空间的视电阻率解析值,然后对其分别进行精确数据反演和噪音数据反演(图 1)。

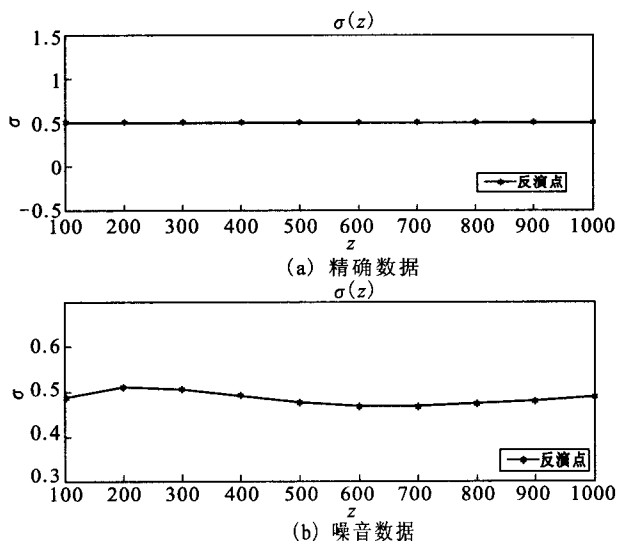


图 1 均匀无限半空间电导率反演

Fig. 1 Conductivity inversion in a uniform infinite half-space.

2.2 电剖面是线性函数

电剖面函数:

$$\sigma(z) = a + bz, 0 \leq z < \infty \quad (13)$$

地表电位函数^[4]

$$\Phi(r, 0) = \frac{I}{2\pi\sigma(0)} \left[\frac{1}{r} + \int_0^L J_0(\lambda r) \left[\frac{K_0(\lambda p)}{K_1(\lambda p)} - 1 \right] d\lambda \right]$$

$$p = \frac{a}{b}, 0 \leq r < \infty \quad (14)$$

视电阻率解析式

$$\frac{\rho(z)}{\rho(0)} = 1 + r^2 \int_0^L J_1(\lambda r) \left[\frac{K_0(\lambda p)}{K_1(\lambda p)} - 1 \right] d\lambda$$

$$p = \frac{a}{b}, 0 \leq r < \infty \quad (15)$$

其中 $J_0(\cdot), J_1(\cdot)$ 分别是零阶、一阶的 Bessel 函数; $K_0(\cdot), K_1(\cdot)$ 分别是零阶、一阶的第二类变型 Bessel 函数。

令 $\sigma(z) = a + bz = 1 + 0.05z$, 利用式(15)得到其相应的视电阻率解析值, 然后对其分别进行精确数据反演和噪音数据反演(图 2)。

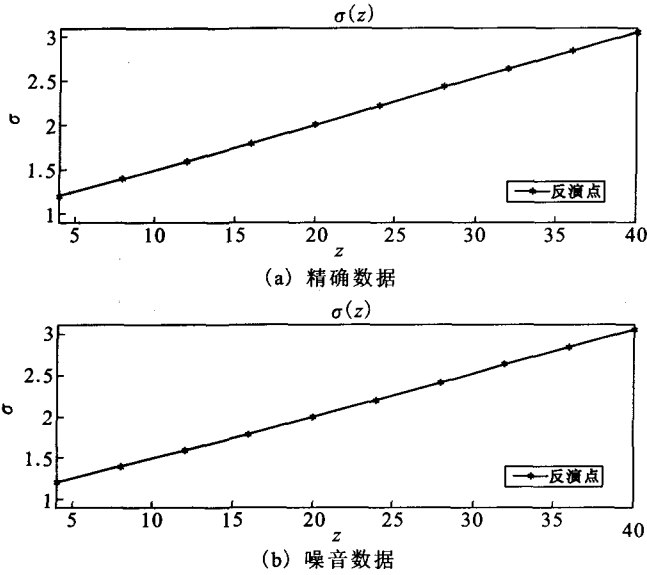


图 2 电导剖面是线性函数的反演

Fig. 2 Inversion on a linear conductivity profile.

2.3 电剖面是指数函数

电阻剖面函数

$$\rho(z) = Ae^{Bz}, 0 \leq z < \infty, A = \sigma(0) \quad (16)$$

地表电位函数^[2]

$$\Phi(r, 0) = \frac{IA}{4\pi} \int_0^\infty \frac{B + \sqrt{B^2 + 4\lambda^2}}{\lambda} - J_0(\lambda r) d\lambda, \quad 0 \leq r < \infty \quad (17)$$

视电阻率解析式

$$\frac{\rho(r)}{\rho(0)} = \frac{Br}{2} + \frac{|B|r}{2} + e^{-\frac{|B|}{2}r}, 0 \leq r < \infty \quad (18)$$

令 $\rho(z) = Ae^{Bz} = 10.0 \times e^{-0.001z}$, 利用式(18)得到其相应的视电阻率解析值, 然后对其分别进行精确数据反演和噪音数据反演(图 3)。

2.4 电剖面是幂函数

电剖面函数

$$\sigma(z) = \sigma(0)(1 + az)^2, 0 \leq z < \infty \quad (19)$$

地表电位函数^[12,5]

$$\Phi(r, 0) = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{a\pi}{2} [H_0(ra) - Y_0(ra)] \right\}, \quad 0 \leq r < \infty \quad (20)$$

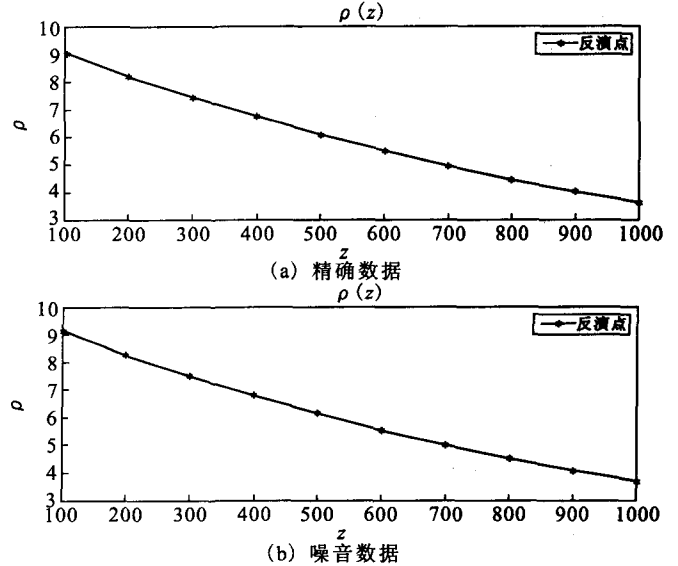


图 3 电导剖面是指数函数的反演

Fig. 3 Inversion on a exponential conductivity profile.

视电阻率解析式

$$\frac{\rho(z)}{\rho(0)} = \left\{ 1 - \frac{a^2\pi}{2} r^2 [H_1(ra) - Y_1(ra)] - \frac{2}{\pi} \right\}, \quad 0 \leq r < \infty \quad (21)$$

其 $H_0(\cdot), H_1(\cdot)$, 分别是零阶、一阶的 Struve 函数; $Y_0(\cdot), Y_1(\cdot)$ 分别是零阶、一阶的 Neuman 函数。

令 $\sigma(z) = \sigma(0)(1 + az)^2 = 1 \times (1 + 0.005 \times z)^2$, 利用式(21)得到其相应的视电阻率解析值, 然后对其分别进行精确数据反演和噪音数据反演(图 4)。

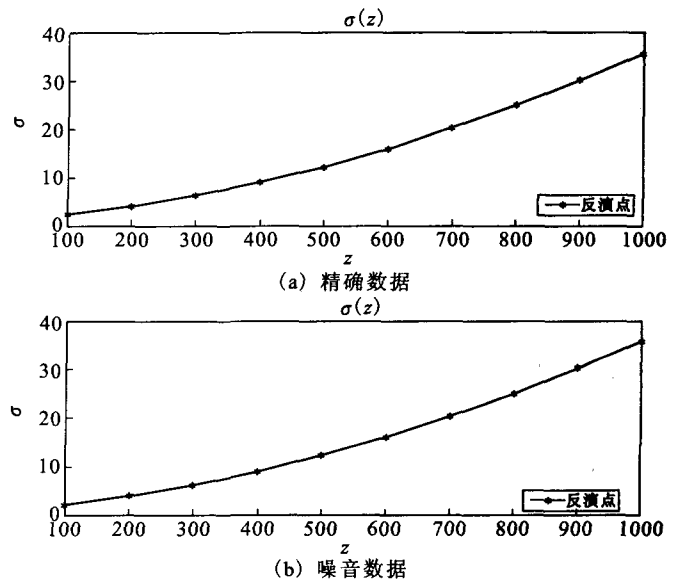


图 4 电导剖面是幂函数的反演

Fig. 4 Inversion on a power conductivity profile.

以上的例子均属于电导剖面连续的情况,从反演图像来看,无论是精确反演还是噪音反演都十分的令人满意,相对误差较小,均控制在 1% 以内(表 1)。

表 1 各种导电剖面的平均相对误差

导电剖面情况	常函数	线性函数	指数函数	幂函数
精确数据反演误差/%	0	0.83	0.033 5	0.038 5
噪声数据反演误差/%	3.68	0.71	0.074 2	0.039 5

2.5 电剖面是分段函数(即层状模型)

对于电导剖面是非连续的情况也有必要进行一下相应的研究。我们以层状模型为例进行反演,观察反演效果。本文分别采用了二层的递增模型、递减模型和三层递减模型。层状模型的视电阻率则由线性滤波法得到。由于层状模型只是一种抽象的理想模型,所以这里我们并没有区分相应的精确数据反演和噪音数据反演。从反演结果来看,该方法能反演出层状模型的大体趋势,但对于层数数特别多和特别薄的高导或低阻层反演效果并不是很好(图 5)。

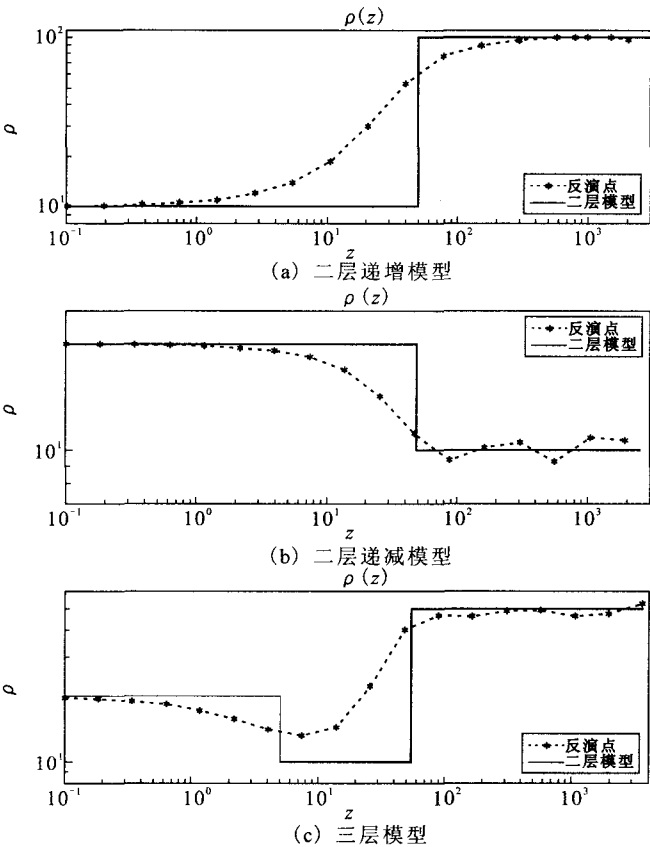


图 5 层状模型反演
Fig. 5 Inversion on layered model.

3 实际场地数据反演

下面是巴西东北部一个冲积河谷进行视电阻率反演的实例,表 2 是关于 schlumberger 装置相应电极距下的实测视电阻率^[11],Inman 在他 1975 年的里程碑式的论文中用岭回归的优化方法对此进行反演过,结果如表 3 所示^[13]。在此我们利用本文介绍的反演方法对其进行反演计算,相应结果见图 6。

表 2 巴西实际场地探测电极距和视电阻率数据

电极距/m	视电阻率 /[Ω·m]	电极距/m	视电阻率 /[Ω·m]	电极距/m	视电阻率 /[Ω·m]
1.0	67.7	10.0	76.1	70.0	44.5
1.5	68.7	15.0	64.9	100.0	43.9
2.0	69.3	20.0	66.8	150.0	51.5
3.0	70.8	30.0	61.2	200.0	68.7
5.0	72.8	40.0	55.3	300.0	109.2
7.0	73.9	50.0	48.6	400.0	159.1

表 3 Inman 反演的结果

电阻值/[Ω·m]	68.5±1.55	84.4±9.9	35.55±3.3	10 000±2 718
层厚度/m	3±1.7	12.2±4.3	94±23.9	∞

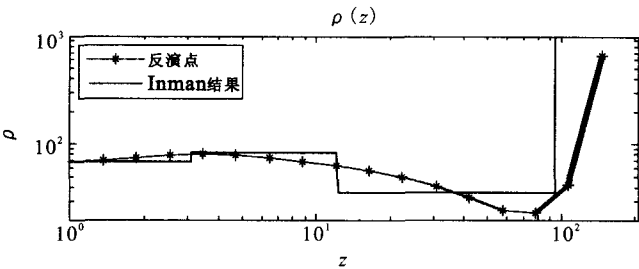


图 6 实际场地数据反演
Fig. 6 Inversion about a real field data.

图中实线是 Inman 给出的反演结果,而虚线是本文给出的结果。二者对比可以发现,虚线能够很好的拟合实线的趋势,而且我们知道地下真实的结构不可能是完全的分层形式,而是更倾向于连续结构。所以我们认为虚线的连续模型更能反映真实的地下结构。

4 结论

- (1) 本文反演方法用于连续的各种模型,无论对于解析数据还是噪音数据相对误差都比较小,控制在 1% 以内,反演效果比较满意;而对于非连续的层状模型也满足于其大致的变化趋势。
- (2) 在实际问题中,地下介质深度的变化不可能是理想层状结构,受温度、湿度、物质成分影响往往表现某一特定连续函数,所以该方法具有相当大的应用价值。
- (3) 以往的反演方法大都首先设置好初始模型

参数,从核函数的角度出发,进行迭代反演;而该方法却是从基本方程进行汉克尔变换得来,比较新颖,而且不要求太多的初始模型参数,只要求地表电阻率即可。

(4) 直流导电剖面的反演问题属于非线性问题,非线性问题牵扯到存在性、唯一性和稳定性。对于该方法的稳定性还没有开展相关的研究,在后续的研究工作中有待进行。

[参考文献]

- [1] 梁子斌,钱家栋. 随深度变化的视电阻率计算核函数法[J]. 高原地震,1998,10(2):2-6.
- [2] Stoyer C H, Wait J R. Resistivity probing of an "Exponential" earth with a homogeneous overburden[J]. Geoeexploration, 1977,15:11-18.
- [3] 赵和云,等. 浅层电导率随深度幂函数增加的水平层状介质上视电阻率的数值解[J]. 甘肃地质科技情报,1993,4:27-31.
- [4] Sampaio E S. Electrical sounding of a half space whose resistivity or its inverse function varies linearly with depth[J]. Geophysical Prospecting,1976, 24:112-122.
- [5] Sato H K, Sampaio E S. Electrical sounding of a half-space with a monotonic continuous variation of the resistivity with depth[J]. Geophysical Prospecting, 1980,28: 967-976.
- [6] Langer R E. An inverse problem in differential equations[J]. Am. Math. Soc. Bull.,1933,39(10):814-820.
- [7] Slichter L B. The interpretation of the resistivity prospecting method for horizontal structures[J]. J. Appl. Phys., 1933, 4:307-322.
- [8] Coen S, Wang-Ho Yu M. The inverse problem of the direct current conductivity profile of a layered earth[J]. Geophysics, 1981,46: 1702-1713.
- [9] Gelfand I M, Levitan B M. On the determination of a differential equation from its spectral function[J]. Am. Math. Soc. Trans. Ser., 1955,2(1):253-304.
- [10] Weidelt P. The inverse problem of geomagnetic induction[J]. Zeit. Für Geophysic., 1972,38:257-289.
- [11] Parker R L. The inverse problem of resistivity sounding[J]. Geophysics, 1984,49: 2143-2158.
- [12] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of mathematical functions[M]. New York: Dover Publication, Inc. 1970.
- [13] Inman J R. Resistivity inversion with ridge regression[J]. Geophysics, 1973,40: 798-817.
- [14] Gilbert F. Ranking and winnowing gross Earth data for inversion and resolution[J]. Geophys. J., Roy. Astr. Soc., 1971,23:125-128.
- [15] Gradstein I S, Ryzhik I W. Table of integrals series and products[M]. New York:Academic Press,1965.
- [16] King L V. On the flow of electric current in semi-infinite stratified media[J]. Proc. Roy. Soc. A., 1933, 139:237-277.
- [17] 钱家栋,赵和云,张文孝. 水平层状介质视电阻率的高精度计算公式及其误差分析[J]. 西北地震学报,1986,8(2):8-19.
- [18] 翁爱华,王雪秋. 利用数值积分提高一维模型电偶源电磁测深响应计算精度[J]. 西北地震学报,2003,25(3):193-197.
- [19] 徐凯军,李桐林,张辉,等. 利用积分方程法的大地电磁三维正演[J]. 西北地震学报,2006,28(2):104-107.