

三维直流电场数值模拟的拟解析近似法:张量近似

张金会^{1,2}, 孙建国^{1,2}

(1. 吉林大学 地球探测科学与技术学院, 吉林 长春 130026;

2. 国土资源部应用地球物理综合解释理论开放实验室, 吉林 长春 130026)

摘要:拟解析近似方法是一种解决电磁场散射问题的快速求解积分方程的近似方法,它绕开了传统数值方法中的求解大型代数方程组或大型矩阵问题,适用于强散射和大扰动问题。本文应用孙建国提出的求解异常电场积分方程的张量拟解析近似理论公式,研究用其求解直流电场积分方程。利用接近实际的地电模型对异常电场进行模拟,研究了均匀场中异常球体的张量拟解析近似解;并对均匀场中的立方体异常体进行了数值计算。效果良好并具有很高的计算速度。研究结果为三维直流电场快速正反演模拟打下基础。

关键词:积分方程;拟解析近似;直流电场;张量;并矢格林函数

中图分类号: P613.3

文献标识码: A

文章编号: 1000-0844(2009)02-0103-07

The Quasi-analytical Method for the 3D D. C. Electrical Field Modelling: the Tensor Approximation

ZHANG Jin-hui^{1,2}, SUN Jian-guo^{1,2}

(1. College of Geoexploration Science and Technology, Jilin University, Changchun 130026, China;

2. Laboratory of Integrated Geophysical Interpretation Theory, Ministry of Land and Resources, Changchun 130026, China)

Abstract: The quasi-analytical method is a fast way used to solve integration equations about electromagnetic scattering problems, and is applicable to the strong scattering or large perturbation problems. In this paper the tensor quasi-analytical method for anomalous electric field which was introduced by Sun in 2005, is applied to the D. C. electrical field. The tensor quasi-analytical method about the anomalous spherite in the uniform field is studied, and the models which are approaching the reality are selected. The anomalous electric field caused by anomalous cube in the uniform field is calculated also. It is proved that the results is good and the method is precisional with high speed. It paves way for the quasi-analytical method using in forward and inverse modelings of 3D D. C. electrical field.

Key words: Integration equation; The quasi-analytical method; D. C. electrical field; Tensor; Dyadic Green's function

0 引言

直流电法勘探是地球物理勘探的一个重要分支,在油气勘探、金属矿勘探、工程物探、寻找地下水和天然地震预测^[1-3]等领域有重要的应用。利用数值方法对地电模型进行模拟是一种常见的直流电场

研究方法,现在已经有很多的数值方法应用于直流电场模拟^[4-6],例如有限元方法、有限差分方法、边界元方法和积分方程法。但在研究三维问题时这些方法各有其利弊:有限元方法对计算机内存和计算速

收稿日期: 2008-10-20

基金项目: 国家高技术研究发展计划(863) 2006AA06Z109; 国家自然科学基金项目(40574052); 国家重点基础研究发展计划(973)课题(2007CB209603)

作者简介: 张金会(1980-),男,河北衡水人,博士研究生,研究方向为直流电场模拟。

度的要求使现在的计算机硬件还无法满足;有限差分方法和边界单元方法中都要求解大型的线性代数方程组和处理大型矩阵;体积分方程法在研究三维问题时仅需对异常体进行计算^[7],因此在模拟有限大小的三维体时更有效。对在电磁场领域运用体积分方程法前人进行了大量的研究,也提出了很多的近似方法,如 Born 近似方法等。Habashy T. M. 等在 1993 年对电磁场问题进行研究时提出了局部非线性近似方法^[8]。Zhdanov 等在 1996 年受到 Habashy T. M. 的局部非线性近似思想的启发,提出了用拟线性近似方法来求解电磁波散射场的积分方程^[9]。这种方法假设异常电场 $E_a(r)$ 与正常电场 $E_0(r)$ 之间是拟线性关系,由电反射张量 $\hat{\lambda}(r)$ 联系起来,即: $E_a(r) = \hat{\lambda} \cdot E_0(r)$,通过这一假设简化了计算电磁场散射的积分方程,提高了计算速度,其中电反射张量 $\hat{\lambda}(r)$ 由最优化的方法得到。并于 2000 年将拟线性近似方法应用于电磁场反演方法的研究^[10],在对美国新墨西哥州的 CSAMT 数据进行反演时取得了很好的效果。但是在拟线性近似方法中仍要求解线性代数方程组。因此于 2000 年 Zhdanov 经过研究,假设电反射张量 $\hat{\lambda}(r)$ 在异常体内为缓变函数,对拟线性近似公式进行了简化,这种方法称为拟解析近似方法^[11],并在此基础上给出了拟解析近似序列。

孙建国在这一领域进行了大量的研究,提出将拟线性近似方法和拟解析近似方法应用到直流电场模拟及声波散射模拟中,其中所用到的格林函数为磁并矢格林函数,与前人在研究电磁问题时用到的格林函数不同^[7,12-13]。孙建国在 2001 年将拟线性近似方法用于 2.5 维直流电阻率正演^[14];2002 年将拟线性近似方法用于地球物理反演问题中^[15];2003 年研究了稳定电流场的电位反射函数^[16];2004 年对稳定电流场中的拟线性近似方法进行了分析^[17-18],给出了直流电位场数值模拟的拟解析方法^[19];2005 年研究了直流电场中的电反射张量,推导了直流电场中的拟线性近似方法及拟解析近似方法的理论公式,并对电反射张量相关的面电流等问题进行了详细的分析^[20];又对稳定电流场拟解析近似方法进行精度分析^[21];2006 年对稳定电流场拟解析近似方法进行了数值评价^[22]。笔者于 2008 年进行了直流电场拟解析近似精度分析与评价^[23]。

本文的目的是在孙建国 2005 年推导出直流电场的张量拟解析近似的理论公式基础上对其进行实

现。通过选取存在理论解的全空间均匀场中异常球体进行计算,将张量拟解析近似解与理论解进行对比,分析张量拟解析近似的精度,验证其可实现性。根据实际地电模型用球体模拟地下矿体;由于实际地下矿体可以利用立方体的组合进行近似,又可对立方体异常体模型进行模拟并成图。

1 直流电场张量拟解析近似基本方程

孙建国在 2005 年给出了异常体内部直流电场的积分方程^[20]

$$E_a(r) = \int_{\Omega} \frac{\hat{G}(r', r) \cdot j_a(r')}{\mu \sigma_0(r')} dr' - \frac{\sigma_a(r)}{\sigma_0(r)} E_0(r) \quad (1)$$

和异常体外部异常电场的积分方程^[20]

$$E_a(r) = \int_{\Omega} \frac{\hat{G}(r', r) \cdot j_a(r')}{\mu \sigma_0(r')} dr' \quad (2)$$

式中 Ω 为异常体; $j_a(r)$ 为二次电流密度; $E_a(r)$ 为异常电场; $\hat{G}(r', r)$ 为全空间磁并矢格林函数; μ 为真空磁导率; σ_0 为背景介质电导率; σ_a 为异常电导率; $E_0(r)$ 为背景电场。其中 $j_a(r)$ 由下式给出:

$$j_a(r) = \sigma_a(r) E(r) = \sigma_a(r) [E_0(r) + E_a(r)] \quad (3)$$

$\hat{G}(r', r)$ 为源在 r' 的全空间磁并矢格林函数。

令 $E_a(r) = \hat{\lambda}(r) \cdot E_0(r)$, $\hat{\lambda}(r)$ 为电反射张量,并将 $E_a(r)$ 与式(3)代入方程(1)中进行整理可以得到^[20]

$$\hat{\lambda}(r) \cdot E_0(r) = \frac{\sigma_0(r)}{\sigma(r)} E_{Ba}(r) - \frac{\sigma_a(r)}{\sigma(r)} E_0(r) + \frac{\sigma_0(r)}{\sigma(r)} L_V \left[\frac{\sigma_a(r') \hat{\lambda}(r') \cdot E_0(r')}{\mu \sigma_0(r')} \right] \quad (4)$$

其中

$$L_V = \int_{\Omega} dr' \hat{G}(r', r) \quad (5)$$

$$E_{Ba}(r) = L_V \left[\frac{\sigma_a(r')}{\mu \sigma_0(r')} E_0(r') \right] \quad (6)$$

$E_{Ba}(r)$ 为 $E_a(r)$ 的 Born 近似。 $\hat{G}(r', r)$ 由下式给出:

$$\hat{G}(r', r) = \nabla \times \nabla \times \hat{G}_0(r', r) \quad (7)$$

其中 $\hat{G}_0(r', r)$ 为下面矢量位方程全空间位并矢格林函数:

$$\nabla^2 A_a(r) = -\mu j_a(r') \quad (8)$$

$A_a(r)$ 为异常矢量位。

由全空间位并矢格林函数推导出 $\hat{G}(r', r)$ 的形式为

$$\hat{G} = \frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} -\frac{2}{r_s^3} - \frac{3(y-y')^2 + 3(z-z')^2}{r_s^5} & \frac{3(x-x')(y-y')}{r_s^5} & \frac{3(x-x')(z-z')}{r_s^5} \\ \frac{3(x-x')(y-y')}{r_s^5} & -\frac{2}{r_s^3} - \frac{3(z-z')^2 + 3(x-x')^2}{r_s^5} & \frac{3(y-y')(z-z')}{r_s^5} \\ \frac{3(x-x')(z-z')}{r_s^5} & \frac{3(y-y')(z-z')}{r_s^5} & -\frac{2}{r_s^3} - \frac{3(x-x')^2 + 3(y-y')^2}{r_s^5} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中 $r_s = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}$ 。

假设电反射张量为2阶张量^[20],令

$$\hat{\lambda}(r) = \lambda(r)I \quad (10)$$

I 为单位张量。得到了方程(4)的解:

$$\begin{aligned} \lambda(r) \cdot E_0(r) &\approx \frac{\sigma_0(r)}{\sigma(r)} E_{Ba}(r) - \frac{\sigma_a(r)}{\sigma(r)} E_0(r) + \\ &\lambda(r) \frac{\sigma_0(r)}{\sigma(r)} E_{Ba}(r) \end{aligned} \quad (11)$$

通过对式(11)进行整理得到

$$\lambda(r) \approx \frac{g(r) - \sigma_a(r)/\sigma(r)}{1 - g(r)} \quad (12)$$

其中

$$g(r) = \frac{\sigma_0(r) E_{Ba}(r) \cdot E_0(r)}{\sigma(r) E_0(r) \cdot E_0(r)} \quad (13)$$

将式(12)代入到式(1)中得到^[20]

$$\begin{aligned} E_a(r) &= \int_a \frac{1}{1 - g(r)} \frac{\sigma_a(r') \hat{G}(r', r) \cdot E_0(r')}{\mu \sigma_0(r')} dr' - \\ &\frac{\sigma_a(r)}{\sigma(r)} \frac{1}{1 - g(r)} E_0(r) \end{aligned} \quad (14)$$

将式(14)得到的 $E_a(r)$ 代入式(3)得到 $j_a(r')$, 代入式(2)中即可得到异常体外部的异常电场

$$E_a(r) = \int_a \frac{\hat{G}(r', r) \cdot j_a(r')}{\mu \sigma_0(r')} dr' \quad (15)$$

2 张量拟解析近似球体异常体电场数值模拟

在直流电法勘探中,两个距离较远的异性点电源产生的地中电流场在供电电极附近分布极不均匀,其场值也趋于无穷大;而在两个供电电极的中部区域场的分布较均匀,其量值变化也比较平缓,可以近似为均匀电流场进行研究。本文选取最简单的且有实际工作依据的均匀电场进行模拟。

为对直流电场张量拟解析近似方法进行研究,并对其可行性近似验证,我们选取具有理论解的球异常体的地电模型进行计算。根据张量拟解析近似的公式,采用场源为沿 x 方向的均匀场,强度为 10

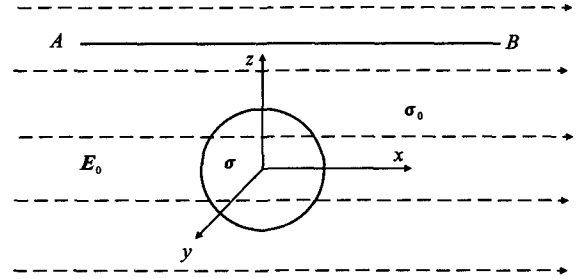


图1 均匀场中异常球体模型示意图(模型中 E_0 沿 x 轴方向的直流电场,均匀全空间背景介质电阻率为 $\rho_0 = 1/\sigma_0$,球体异常体电阻率为 $\rho = 1/\sigma$, AB 为 $y = 0$ m, $z = 400$ m, $-2\,000$ m $< x < 2\,000$ m 处测线)

Fig. 1 Model of anomalous spherite in the uniform field.

V/m;采用的异常球体半径为 100 m,球心坐标为(0 m, 0 m, 0 m)。通过改变异常球体电阻率和围岩电阻率得到一组地电模型,异常电场计算点分布于关于球心对称 $z = 400$ m 处的球体主剖面上(图1)。在这组模型中第一、二模型为验证张量拟解析近似而设置,第三、四和五模型是根据实际工作中的电阻率变化而设置的,兼顾了理论验证和接近实际工作的数值模拟研究。针对五种不同背景介质电导率与球体电导率的模型分别计算均匀场中的不同电导率的外部电场。

图2(a)为 $\rho_0 = 100 \Omega \cdot m$, $\rho = 150 \Omega \cdot m$ 时异常电场的 x 分量和 z 分量的张量拟解析近似解、Born 解与理论解^[24]对比。看出当异常体电导率与背景介质电导率相差很小时,拟解析近似解与 Born 近似解平均误差都很小,张量拟解析近似与 Born 近似都可以用于该模型的模拟;拟解析近似解曲线比 Born 近似解曲线更能与理论曲线吻合。

图2(b、c)为 $\rho_0 = 100 \Omega \cdot m$, $\rho = 150 \Omega \cdot m$ 和 $\rho_0 = 400 \Omega \cdot m$, $\rho = 200 \Omega \cdot m$ 时异常电场的 x 分量和 z 分量的三种解对比。看出当异常体电阻率与背景介质电阻率相差增大时张量拟解析近似解与 Born 近似解与理论解的误差都变大,但很明显张量拟解析近似解误差比 Born 近似解曲线更能与理论曲线相拟和。

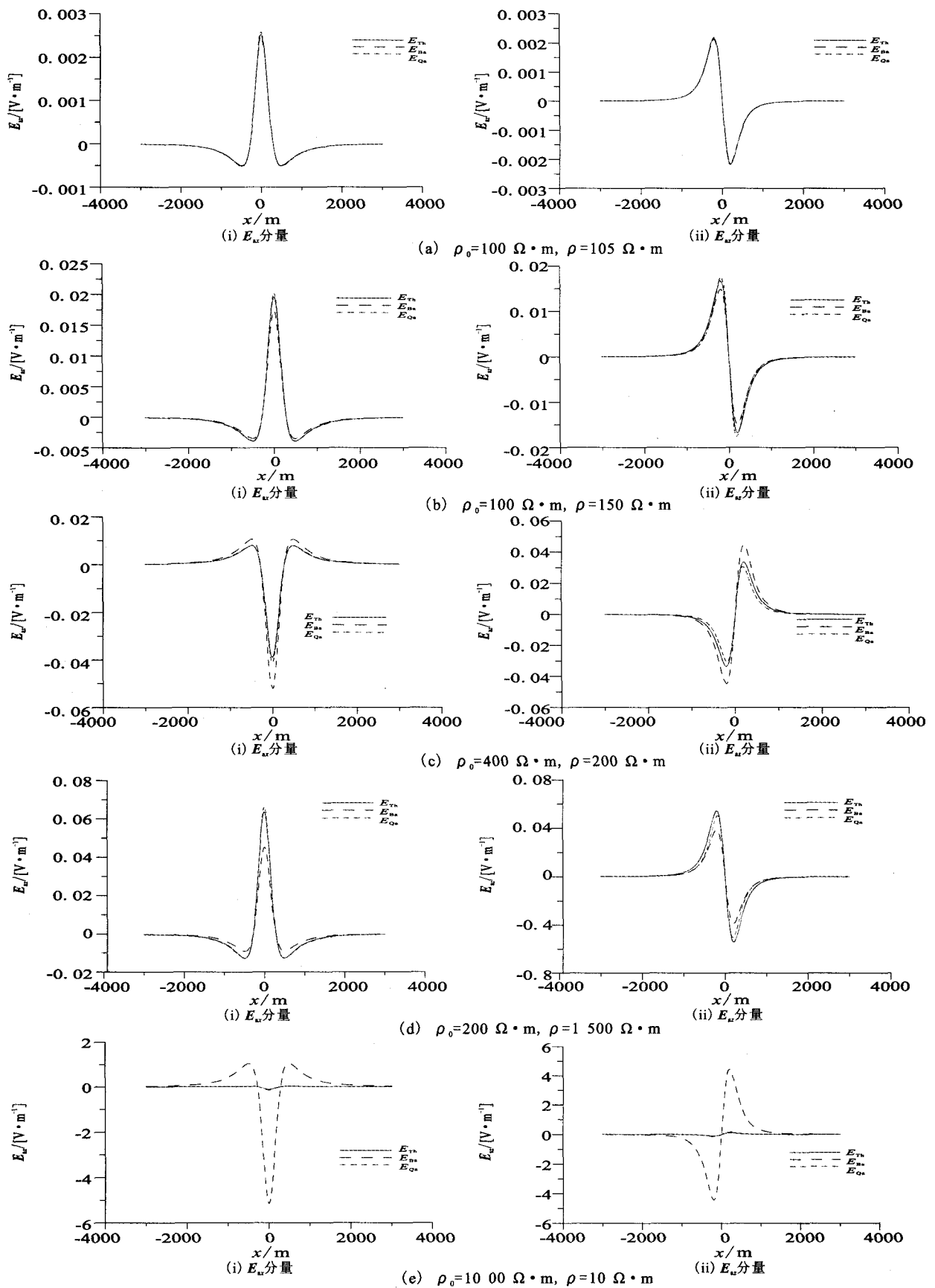


图2 不同电导率时异常电场3种解的曲线图(E_{Tn} 为理论解, E_{Ba} 为Born近似解, E_{Qa} 为拟解析近似解)
Fig. 2 The anomalous electrical field curves of three methods in different background/spherite electric conductivities.

图2(d、e)为 $\rho_0 = 200 \Omega \cdot m$, $\rho = 1500 \Omega \cdot m$ 和 $\rho_0 = 1000 \Omega \cdot m$, $\rho = 10 \Omega \cdot m$ 时异常电场的 x 分量和 z 分量的三种解对比。当异常体电阻率与背景介质电阻率相差继续增大时,Born近似解与理论解的误差显著变大,但张量拟解析近似解误差比理论解曲线仍能较好的吻合。对于 $\rho_0 = 1000 \Omega \cdot m$, $\rho = 10 \Omega \cdot m$ 时,Born近似解与理论解相差已经达到两个数量级,其对模型的数值模拟已没有实际意义,而张量拟解析近似解曲线仍能与理论曲线相拟和,经迭代之后误差小于5%。可以看出张量拟解析近似解适用于电阻率扰动较大模型的模拟。

3 张量拟解析近似立方体异常体电场计算

对异常体为立方体的模型的研究有很大的实际意义,因为矿体可以通过多个立方体的空间组合进行模拟。对均匀场场源中的立方体电阻率异常体进行计算,立方体边长为160 m,中心坐标为(0 m, 0 m, 0 m)(图3);选取与上面球体模型相同的五种背景介质和异常电阻率的模型,计算关于立方体中心对称分布在 $z = 400$ m处沿 x 方向上的异常体外部异常电场。

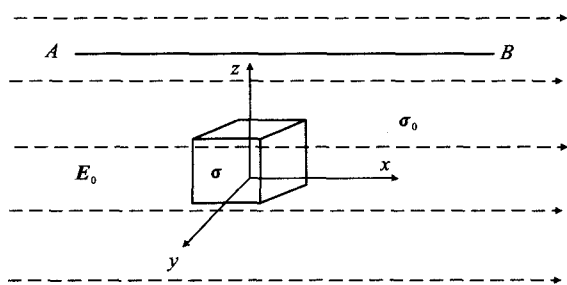


图3 均匀场中异常立方体模型示意图(模型中 E_0 (V/m)沿 x 轴方向,大小为(10,0,0)。背景介质为均匀全空间,AB为 $y = 0$ m, $z = 400$ m, $-2000 \text{ m} < x < 2000 \text{ m}$ 处的测线)

Fig.3 Model of anomalous cube in the uniform field.

图4(a、b)分别为 $\rho_0 = 100 \Omega \cdot m$, $\rho = 105 \Omega \cdot m$ 和 $\rho_0 = 100 \Omega \cdot m$, $\rho = 150 \Omega \cdot m$ 时模型的张量拟解析近似解和Born近似解曲线图。可以看出张量拟解析近似解与Born近似解相差较小,其差别随着电阻率变化增大而增大,所得到的曲线与球体异常体表现出的现象相吻合。图4(c、d)分别为低阻和高阻立方体模型计算得到的曲线,异常体的电阻率变化较大,由异常体引起的电场的拟解析近似解

与Born近似解相差也增大。

图4(e)是异常电阻率相对于背景电阻率变化剧烈时得到的结果。其中 $\rho_0 = 1000 \Omega \cdot m$, $\rho = 10 \Omega \cdot m$,由异常体引起的电场的通过张量拟解析近似方法解与Born近似方法得到的结果相差也很大。其规律与球体模型中电阻率变化剧烈的情况相同。

4 结论

在对直流电场异常电场的研究中,利用张量拟解析近似方法对异常体的响应得到近似积分公式,对近似公式进行直接数值积分,避免了求解大型线性代数方程组和大型矩阵的问题,也就避免了求解代数方程组的大量耗时,因此大大提高了计算速度。本文对异常体为球体、立方体的多组模型分别进行了异常电场的张量拟解析近似数值模拟得到了很好的结果。文中通过对可以求得理论解的均匀场中的异常球体进行的张量拟解析模拟,表明标量拟解析近似方法具有很高的精度,当异常体电导率变化较大时,张量拟解析近似仍可以达到很很好得与理论解相拟和。通过立方体异常体的空间组合分布可以近似模拟不同的地下矿体形态,表明了在处理复杂地电结构时该方法具有可行性和优越性。本文结果为三维直流电场的快速正反演模拟提供了快速的精确度高的数值模拟方法,为加速电法勘探的发展奠定了基础。

[参考文献]

- [1] 汪忠德. 中国大陆自然电场的前兆机理与特征[J]. 西北地震学报, 2008, 30(4): 360-365.
- [2] 沈红会, 冯志生, 燕明芝, 等. 地电场震前变化的探讨[J]. 西北地震学报, 2006, 28(1): 74-77.
- [3] 范小平, 杨从杰, 李情河, 等. 远场地震电磁辐射强度与孕震震级关系[J]. 西北地震学报, 2008, 30(3): 208-213.
- [4] 连玉平, 张锦福, 林松建, 等. 高分辨率浅层人工地震勘探探测隐伏断裂实例[J]. 西北地震学报, 2007, 29(3): 260-263.
- [5] 黄翼坚. 非均匀 TI 介质 P-SV 波传播交错网格高阶有限差分数值模拟[J]. 西北地震学报, 2008, 30(1): 11-16.
- [6] 兰晓雯, 晏信飞, 王成虎. 地震正演模拟在高分辨率隐伏断层地震勘探中的应用[J]. 西北地震学报, 2008, 30(4): 354-359.
- [7] 徐凯军, 李桐林, 张辉, 等. 利用积分方程法的大地电磁三维正演[J]. 西北地震学报, 2006: 104-107.
- [8] Habashy T M, Groom W R, Spies R B. Beyond the Born and Rytov Approximations; A Nonlinear Approach to Electromagnetic Scattering[J]. Journal of geophysical research. 1993, 98 (B2): 1759-1775.

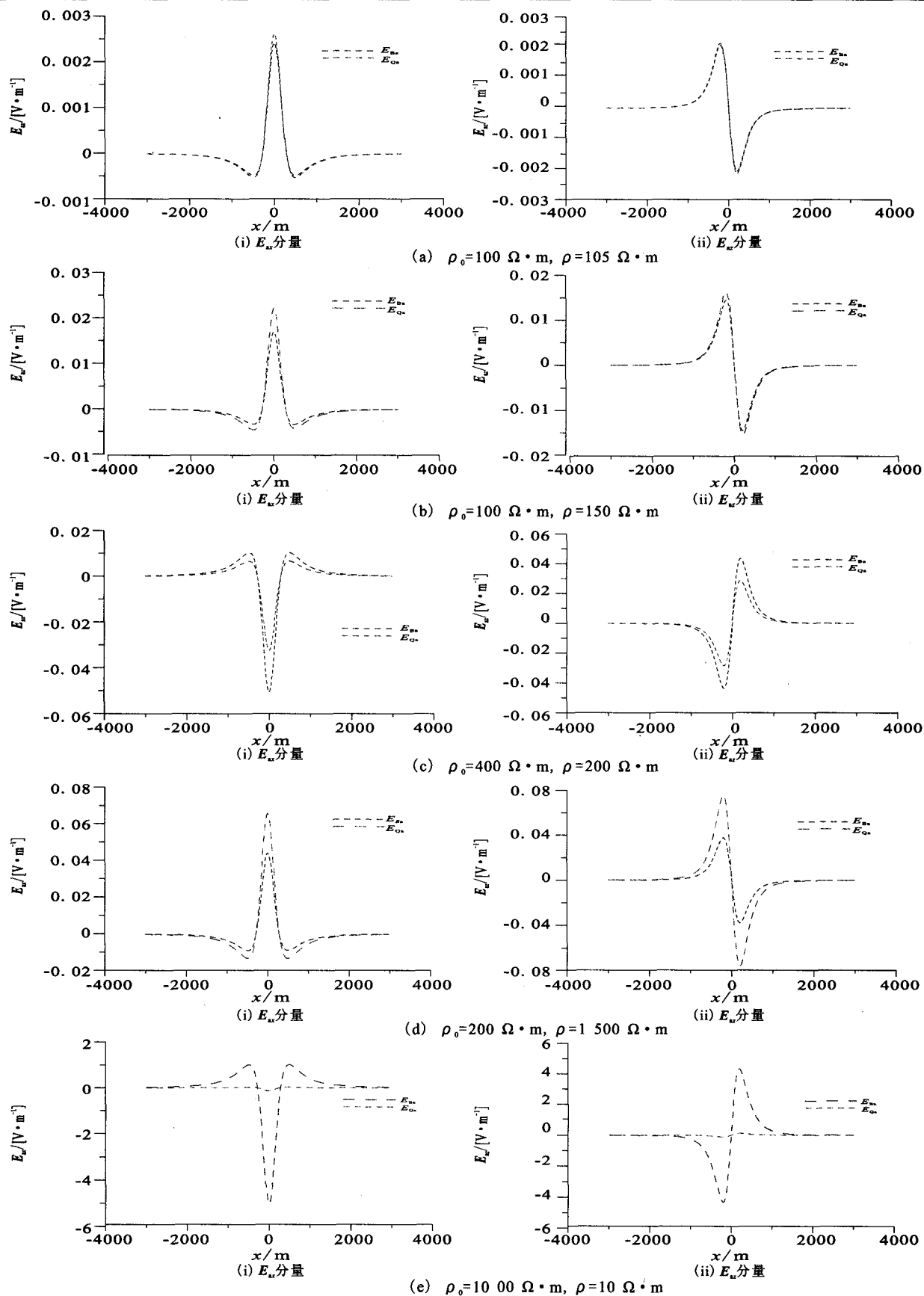


图4 不同电阻率时异常电场曲线图

Fig. 4 The anomalous electrical field curves in different background/cube electric conductivities.

- [9] Zhdanov M S, Fang S. Quasi-linear approximation in 3-D electromagnetic modeling[J]. *Geophysics*, 1996, 61(3): 646-665.
- [10] Zhdanov M S, Fang S, Hursan G. Electromagnetic inversion using quasi-linear approximation[J]. *Geophysics*, 2000, 65(5): 1501-1513.
- [11] Zhdanov M S, Dmitriev V I, Fang S, et al. Quasi-analytical approximations and series in electromagnetic modeling[J]. *Geophysics*, 2000, 65(6): 1746-1757.
- [12] 韩德胜, 赵和云. 非均匀半无线介质中振荡电偶极子地表电场的理论公式和计算方法[J]. *西北地震学报*, 2001, 23(4): 346-353.
- [13] 翁爱华, 王雪秋. 利用数值积分提高一维模型电偶源电磁测深响应计算精度[J]. *西北地震学报*, 2003, 25(3): 193-197.
- [14] 陈丽虹, 孙建国, 王忠仁. 拟线性近似方法在 2_5 维电阻率正演中的应用[A]//中国地球物理第十七届年会论文集[C]. 昆明: 云南科技出版社, 2001: 420.
- [15] 陈丽虹, 孙建国, 等. 地球物理反演的拟线性近似方法综述[J]. *地球物理学进展*, 2002, 17(3): 464-472.
- [16] 孙建国. 稳定电流场的电位反射函数[A]//中国地球物理第十九届年会论文集[C]. 南京: 南京师范大学出版社, 2003: 592.
- [17] 孙建国. 稳定电流场数值模拟的拟线性近似[A]//中国地球物理第二十届年会论文集[C]. 西安: 西安地图出版社, 2004: 558-559.
- [18] 陈丽虹, 孙建国. 稳定电流场的拟线性近似方法研究[J]. *石油地球物理勘探*, 2004, 39(5): 589-593.
- [19] 孙建国. 直流电位场数值模拟的拟解析法[A]//中国地球物理第二十届年会论文集[C]. 西安: 西安地图出版社, 2004: 557.
- [20] Sun J. On the electrical reflectivity tensor in d. c electric field modelling[J]. *Geophysical Prospecting*, 2005, 53: 411-421.
- [21] 孙建国. 稳定电流场拟解析近似精度分析[A]//中国地球物理第二十一届年会论文集[C]. 长春: 吉林大学出版社, 2005: 639.
- [22] 孙建国. 稳定电流场拟解析近似的数值评价[A]//中国地球物理第二十二届年会论文集[C]. 成都: 四川科学技术出版社, 2006: 650.
- [23] 张金会, 孙建国. 直流电场拟解析近似精度分析与评价[A]//中国地球物理第二十四届年会论文集[C]. 北京: 中国大地出版社, 2008: 533.
- [24] 傅良魁. 电法勘探教程[M]. 北京: 地质出版社, 1983.