非均匀TI介质P-SV波传播交错网格高阶有限差分数值模拟①

黄翼坚
(长安大学地质工程与测绘学院,陕西 西安 710054)

摘 要:给出了在非均匀横向各向同性(TI)介质情况下,四阶时间精度、高阶空间精度的一阶速度-应力P-SV波的波动方程交错网格有限差分解法。首先根据一阶速度(应力)波动方程把速度(应力)对时间的一阶和三阶导数转换为应力(速度)对空间的导数,从而在使用四阶时间精度有限差分格式计算某一时刻的波场时只需要前面两个时间步的波场值;然后在空间上采用高阶有限差分格式以提高数值模拟的精度。数值模拟结果和实测垂直地震剖面(VSP)记录符合得很好,说明该方法是可行的。

关键词:非均匀TI介质;P-SV波;交错网格;高阶有限差分;数值模拟
中图分类号:P315.3+1 文献标识码:A 文章编号:1000-0844(2008)01-0011-06

High-order Staggered-grid Finite Difference Numerical Modeling for P-SV Wave Propagation in Heterogeneous Transversely Isotropic Media

HUANG Yi-jian
(*College of Geology Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an 710054, China*)

Abstract: A set of stagger-grid finite-difference operations with 4-order temporal accuracy and high order spatial accuracy to one-order velocity-stress P-SV wave equations is presented in heterogeneous transversely isotropic (TI) media. First using the one-order velocity-stress P-SV wave equations, the first and third order temporal derivatives of particle velocity/stress are transformed into spatial derivatives of stress/particle velocity, thus only two former time-step wave fields are needed to compute wave fields for the current time step with the 4-order temporal accuracy finite-differente approximation. Then the high-order spatial finite-difference approximation is used to improve numerical modeling precise. High consistency between the modeling vertical seismic profiles (VSP) records and the field ones demonstrates well feasibility of the present technique.

Key words: **Heterogeneous transversely isotropic media; P-SV wave; Staggered-grid; High-order finite difference; Numerical modeling**

0 引言

一阶速度-应力波动方程交错网格有限差分数值模拟方法是一种非常有效的弹性波数值模拟方法。该方法最早由Madariaga[1]提出,其优点是二阶时间精度差分算子不需要对空间的微分。随后Virieux[2-3]采用交错网格有限差分方法模拟SH和

① 收稿日期:2007-08-30
作者简介:黄翼坚(1978-),男,广西隆安人,在读博士,主要研究方向为地球物理信号分析及井中地震数据成像.

© 1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

P-SV 波在非均匀各向同性介质中的传播; Levander[4] 又把该方法的空间有限差分精度提高到四阶; Dai 等[5] 给出了非均匀孔隙介质中速度- 应力波动方程四阶空间精度有限差分弹性波模拟方法。以上几种方法在空间上采用了高阶精度的有限差分算子, 但是其时间有限差分精度仍然是二阶的。董良国等[6] 给出了一阶弹性波方程交错网格任意偶数阶时间精度差分解法, 并考虑了各向异性, 但其给出的四阶时间精度差分格式没有考虑弹性常数的空间变化, 因而理论上只适用于均匀介质的情况。王秀明等[7] 利用高阶交错网格有限差分法模拟地震波在非均匀孔隙介质中的传播; 裴正林和牟永光[8] 研究了非均匀介质中地震波传播的交错网格高阶有限差分方法; 裴正林[9] 给出了三维双相各向异性介质中弹性波传播的交错网格高阶有限差分模拟方法; 裴正林和王尚旭[10] 给出了任意倾斜各向异性介质中弹性波传播的交错网格高阶有限差分模拟方法。这几种方法时间精度也是二阶的。

本文是在文献[6] 给出的一阶弹性波方程交错网格高阶差分解法基础上, 考虑了弹性常数和介质密度的空间变化, 将该方法推广到非均匀 TI 介质情况下的 P-SV 波数值模拟, 给出了这种情况下四阶时间精度、高阶空间精度的差分格式。同时保持了该方法的优点, 即在不增加内存的情况下, 可以选择更大的空间步长, 从而提高数值模拟的效率。

1 一阶速度- 应力 P-SV 波波动方程的高精度差分近似

二维横向各向同性(TI) 介质一阶速度- 应力 P-SV 波波动方程(假设体力为零) 为

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial V_x}{\partial t} = \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \\ \rho\dfrac{\partial V_z}{\partial t} = \dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = C_{11}\dfrac{\partial V_x}{\partial x} + C_{13}\dfrac{\partial V_z}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = C_{13}\dfrac{\partial V_x}{\partial x} + C_{33}\dfrac{\partial V_z}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = C_{44}\dfrac{\partial V_x}{\partial x} + C_{44}\dfrac{\partial V_z}{\partial z} \end{cases} \tag{1}$$

其中, σ_{ij} 为应力; C_{ij} 为弹性常数; V_x 和 V_z 分别表示弹性体中质点速度在 x 轴和 z 轴两个方向上的分量; ρ 为弹性体密度。在均匀各向同性介质的情况下, $C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu$, $C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu$, $C_{12} = C_{13} = C_{21} = C_{23} = C_{31} = C_{32} = \lambda$, λ和 μ 为 Lamé 常数。

1.1 四阶时间精度差分近似

董良国等[6] 给出了一阶速度- 应力波动方程 $2M$ 阶时间精度差分格式的构造方法, 并给出了均匀 TI 介质四阶时间精度差分近似公式, 即不考虑密度和弹性参数在空间上的变化。该方法比常规方法频散小, 在保证一定精度的情况下可以使用更大的空间步长。但是由于实际介质往往是非均匀的, 或者是分层均匀的, 因此有必要将此方法推广到非均匀介质的情况。下面在其工作的基础上给出非均匀 TI 介质四阶时间精度的差分近似公式, 即在推导的过程中考虑密度和弹性常数在空间上的变化。

若函数 $f(t)$ 具有直到 $2M-1$ 阶的导数, 根据 Taylor 公式, 其 $2M$ 阶时间精度的差分近似式可表示为

$$f\left(t+\frac{\mathrm{d}t}{2}\right) = f\left(t-\frac{\mathrm{d}t}{2}\right) + 2\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{(2m-1)!}\left(\frac{\mathrm{d}t}{2}\right)^{2m-1}\frac{\partial^{2m-1}f}{\partial^{2m-1}t} + 0(\mathrm{d}t^{2M}) \tag{2}$$

其中 $\mathrm{d}t$ 为时间步长。当 $M=1$ 时公式(2) 即为传统的二阶精度差分格式。用于交错网格数值模拟时, 公式(2) 中的函数 $f(t)$ 对应为速度函数或应力函数。

由公式(2) 易知: ①公式中时间偏导数项的阶数都是奇数; ②所用差分格式的精度越高, 则公式中所含时间偏导数项的阶数也越高, 此时在计算当前时刻的速度(或应力) 场时所需的速度(或应力) 场对应的时间步就越多。但是如果利用方程组(1) 中速度与应力之间的关系, 可以将速度对时间的任意奇数阶偏导数转嫁到应力对空间的偏导数上去, 也可以将应力对时间的任意奇数阶偏导数转嫁到速度对空间的导数上去, 这样在计算某个时刻的速度(应力) 场时只需两个时刻的速度(或应力) 场, 而不需要涉及过多的时间层, 从而节省了内存, 这是该方法的优点之一。下面以方程组(1) 中第一个方程的四阶时间精度差分格式的推导为例来说明以上过程。

对函数 $V_x(t)$, 据式(2), 取 $2M=4$, 有

$$V_x\left(t+\frac{\mathrm{d}t}{2}\right) \approx V_x\left(t-\frac{\mathrm{d}t}{2}\right) + \mathrm{d}t\frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}t^3}{24}\frac{\partial^3 V_x}{\partial t^3} \tag{3}$$

利用方程组(1) 中的第一个方程, 把式(3) 中的速度偏导数项用应力的偏导数来表示, 并整理, 得

© 1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$V_x\left(t+\frac{\mathrm{d}t}{2}\right)=V_x\left(t-\frac{\mathrm{d}t}{2}\right)+\frac{\mathrm{d}t}{\rho}\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}\right)+\frac{\mathrm{d}t^3}{24\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial t^2}\right)\right] \tag{4}$$

再利用方程组(1)中的第三和第五个方程, 把式(4)中的应力偏导数项用速度的偏导数来表示, 并整理, 得

$$V_x\left(t+\frac{\mathrm{d}t}{2}\right)=V_x\left(t-\frac{\mathrm{d}t}{2}\right)+\frac{\mathrm{d}t}{\rho}\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}\right)+\frac{\mathrm{d}t^3}{24\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[C_{11}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_x}{\partial t}\right)+C_{13}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[C_{44}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}\right)+C_{44}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}\right)\right]\right\} \tag{5}$$

再次利用方程组(1)中的第一和第二个方程, 把式(5)中的速度偏导数项用应力的偏导数来表示, 并整理, 得

$$\begin{aligned}V_x\left(t+\frac{\mathrm{d}t}{2}\right)=&V_x\left(t-\frac{\mathrm{d}t}{2}\right)+\frac{\mathrm{d}t}{\rho}\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}\right)+\frac{\mathrm{d}t^3}{24\rho}\left[C_{11}\frac{\partial^3\sigma_{xx}}{\partial x^3}+(C_{11}+C_{13}+C_{44})\frac{\partial^3\sigma_{xz}}{\partial x^2\partial z}+C_{44}\frac{\partial^3\sigma_{xx}}{\partial z^2\partial x}\right.\\&\left.+C_{44}\frac{\partial^3\sigma_{xz}}{\partial z^3}+(C_{13}+C_{44})\frac{\partial^3\sigma_{zz}}{\partial x\partial z^2}\right]+\frac{\mathrm{d}t^3}{24\rho}\left\{\rho^{-1}\left[\frac{\partial C_{11}}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{zz}}{\partial x\partial z}\right)+\frac{\partial C_{13}}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\sigma_{zz}}{\partial z^2}\right)\right.\right.\\&\left.+\frac{\partial C_{44}}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\sigma_{zz}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\sigma_{xz}}{\partial z^2}\right)\right]+\left(C_{11}\frac{\partial^2\rho^{-1}}{\partial x^2}+\frac{\partial C_{11}}{\partial x}\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial x}+C_{44}\frac{\partial^2\rho^{-1}}{\partial z^2}+\frac{\partial C_{44}}{\partial z}\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial z}\right)\\&\left.\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}\right)+\left[(C_{13}+C_{44})\frac{\partial^2\rho^{-1}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial C_{13}}{\partial x}\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial z}+\frac{\partial C_{44}}{\partial z}\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial x}\right]\left(\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)\right\}\end{aligned} \tag{6}$$

此时, 公式(6)已不再包含时间的偏导数项, 用于数值模拟时只涉及两个时间层。方程组(1)中其余四个方程相应的四阶时间精度有限差分公式可通过类似方法推导得到。由于篇幅所限, 下面仅再给出方程组(1)中最后一个方程的四阶时间精度有限差分公式:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}(t+\mathrm{d}t)=&\sigma_{xz}(t)+\mathrm{d}t\left[C_{44}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\right]+\frac{\mathrm{d}t^3}{24\rho}\left[C_{44}^2\frac{\partial^3V_x}{\partial z^3}+C_{44}^2\frac{\partial^3V_z}{\partial x^3}+C_{44}(C_{11}+C_{44}+C_{13})\frac{\partial^3V_x}{\partial z\partial x^2}\right.\\&\left.+C_{44}(C_{33}+C_{44}+C_{13})\frac{\partial^3V_z}{\partial x\partial z^2}\right]+\frac{C_{44}\mathrm{d}t^3}{24\rho}\left\{\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial x}\left[C_{44}\frac{\partial^2V_z}{\partial x^2}+(C_{13}+C_{44})\frac{\partial^2V_x}{\partial x\partial z}+C_{33}\frac{\partial^2V_z}{\partial z^2}\right]\right.\\&+\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial z}\left[C_{11}\frac{\partial^2V_x}{\partial x^2}+(C_{13}+C_{44})\frac{\partial^2V_z}{\partial x\partial z}+C_{33}\frac{\partial^2V_x}{\partial z^2}\right]+\left[\rho^{-1}\left(\frac{\partial^2C_{11}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2C_{13}}{\partial z\partial z}\right)+\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial z}\frac{\partial C_{11}}{\partial x}\right.\\&\left.+\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial x}\frac{\partial C_{13}}{\partial z}\right]\frac{\partial V_x}{\partial x}+\left[\rho^{-1}\left(\frac{\partial^2C_{13}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2C_{33}}{\partial z\partial z}\right)+\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial z}\frac{\partial C_{13}}{\partial x}+\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial x}\frac{\partial C_{33}}{\partial z}\right]\frac{\partial V_z}{\partial z}\\&\left.+\left[\rho^{-1}\left(\frac{\partial^2C_{44}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2C_{44}}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial x}\frac{\partial C_{44}}{\partial x}+\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial z}\frac{\partial C_{44}}{\partial z}\right]\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}+\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\right\}\end{aligned} \tag{7}$$

对比文献[6]给出的四阶时间精度有限差分公式可知, 这里的公式增加了弹性常数和密度对空间的偏导数项, 即考虑了弹性常数和密度在空间上的变化, 因此适用于非均匀 TI 介质中弹性波传播的数值模拟。

1.2　高阶空间精度差分近似

函数 $f(x)$ 一阶空间偏导数的 $2N$ 阶精度差分近似可表示为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\mathrm{d}x}\sum_{i=1}^{N}C_i^{(N)}\left\{f\left[x+\frac{\mathrm{d}x}{x}(2i-1)\right]-f\left[x-\frac{\mathrm{d}x}{2}(2i-1)\right]\right\}+O(\mathrm{d}x^{2N}) \tag{8}$$

其中 $\mathrm{d}x$ 为空间步长。差分权系数 $C_i^{(N)}$ 的取值如下: 当 $2N=2$ 时, $C_1^1=1$; 当 $2N=4$ 时, $C_1^{(2)}=\frac{9}{8}$, $C_2^{(2)}=-\frac{1}{24}$; 当 $2N=6$ 时, $C_1^{(3)}=\frac{75}{64}$, $C_2^{(3)}=-\frac{25}{384}$, $C_3^{(3)}=\frac{3}{640}$; 当 $2N=8$ 时, $C_1^{(4)}=\frac{1225}{1024}$, $C_2^{(4)}=-\frac{245}{3072}$, $C_3^{(4)}=\frac{49}{5120}$, $C_4^{(4)}=-\frac{5}{7168}$, …。更高阶空间精度差分近似公式的差分权系数 $C_i^{(N)}$ 可参考文献[6], 这里不再赘述。

2　速度–应力波动方程交错网格格式

在对差分方程求解域进行网格剖分时采用了交错网格。对空间中的任一网格, 质点速度定义在网格的一条对角线上, 应力定义在该网格的另一条对角线上。水平速度分量 V_x 定义在网格结点(m, n)上; 垂直速度分量 V_z 定义在网格结点$(m+1/2, n+1/2)$上; 正应力 σ_{xx}、σ_{zz} 定义在网格结点$(m+1/2, n)$上; 切应力 σ_{xz} 定义在网格结点$(m, n+1/2)$上。在对空间进行交错网格差分的同时, 在时间上也进行交错网格差分。即质点速度分量 V_x 和 V_z 定义在离散时间 $k-1/2$ 和 $k+1/2$ 上; 应力分量 σ_{xx}、σ_{zz} 和

© 1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

σ_{xz} 定义在离散时间 k 和 $k+1$ 上。这与 Levander[4] 给出的交错网格格式是一样的。

设 $U_{i,j}^{k+1/2}$、$V_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2}$、$R_{i+1/2,j}^{k}$、$T_{i+1/2,j}^{k}$、$H_{i,j+1/2}^{k}$ 分别是速度 V_x 和 V_z 与应力 σ_{xx}、σ_{zz} 和 σ_{xz} 的离散值, 设 X 轴和 Z 轴方向的网格大小分别为 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}z$, 根据公式(6), 方程组(1)中第一个公式精度为 $O(\mathrm{d}t^4+\mathrm{d}x^8)$ 的差分格式为

$$\begin{aligned}U_{i,j}^{k+1/2}=&U_{i,j}^{k-1/2}+\mathrm{d}t\cdot\rho^{-1}\cdot(E_x(i+1/2,j)+G_z(i,j+1/2))+\mathrm{d}t^3\cdot\rho^{-1}\cdot\{\rho^{-1}\cdot[q_{11}\cdot E_{xxx}(i+1/2,j)\\&+(q_{11}+q_{13}+q_{44})\cdot G_{xxz}(i,j+1/2)+q_{44}\cdot(E_{xzz}(i+1/2,j)+G_{zzz}(i,j+1/2))\\&+(q_{13}+q_{44})\cdot F_{xz}(i+1/2,j+1/2)_z]+\rho^{-1}\cdot[q_{11x}\cdot(E_{xx}(i+1/2,j)+G_{xz}(i,j+1/2))\\&+q_{13x}\cdot(G_{xz}(i,j+1/2)+F_{zz}(i+1/2,j+1/2))+q_{44z}\cdot(G_{xx}(i,j+1/2)+E_{xz}(i+1/2,j)\\&+F_{xz}(i+1/2,j+1/2)+G_{zz}(i,j+1/2))]+(q_{11}\cdot\rho_{xx}+c_{11x}\cdot\rho_x+q_{44}\cdot\rho_{zz}+q_{44z}\cdot\rho_z)\\&\cdot(E_x(i+1/2,j)+G_z(i,j+1/2))+[(q_{13}+q_{44})\cdot\rho_{xz}+q_{13x}\cdot\rho_z+q_{44z}\cdot\rho_x]\cdot(G_x(i,j+1/2)\\&+F_z(i+1/2,j+1/2))\}/24\end{aligned}\tag{9}$$

其中,

$q_{mn}=C_{mn}$; $q_{mnx}=(C_{mn\,i+1/2,j}-C_{mn\,i-1/2,j})/\mathrm{d}x$; $q_{mnz}=(C_{mn\,i,j+1/2}-C_{mn\,i,j-1/2})/\mathrm{d}z$ $(m=1,3,4;n=1,3,4)$;

$\rho_x=(1/\rho_{i+1/2,j}-1/\rho_{i-1/2,j})/\mathrm{d}x$; $\rho_z=(1/\rho_{i,j+1/2}-1/\rho_{i,j-1/2})/\mathrm{d}z$; $\rho_{xx}=(1/\rho_{i+1/2,j}-2/\rho_{i,j}+1/\rho_{i-1/2,j})/\mathrm{d}x^2$;

$\rho_{zz}=(1/\rho_{i,j+1/2}-2/\rho_{i,j}+1/\rho_{i,j-1/2})/\mathrm{d}z^2$; $\rho_{xz}=(1/\rho_{i,j+1/2}-2/\rho_{i,j}+1/\rho_{i-1/2,j})/\mathrm{d}x/\mathrm{d}z$;

$$E_x(i,j)=\left[\sum_{n=1}^{4}C_i^{(4)}(R_{i+(2n-1)/2,j}^{k}-R_{i-(2n-1)/2,j}^{k})\right]/\mathrm{d}x;\quad E_{xx}(i,j)=(R_{i+1)/2,j}^{k}-2R_{i,j}^{k}+R_{i-1)/2,j}^{k})\mathrm{d}x^2;$$

$$E_{xz}(i,j)=(R_{i+1/2,j+1/2}^{k}-R_{i+1/2,j-1/2}^{k}-R_{i-1/2,j+1/2}^{k}+R_{i-1/2,j-1/2}^{k})/\mathrm{d}x/\mathrm{d}z;$$

$$E_{xzz}(i,j)=(R_{i+1/2,j+1/2}^{k}-2R_{i+1/2,j}^{k}+R_{i+1/2,j-1/2}^{k}-R_{i-1/2,j+1/2}^{k}+2R_{i-1/2,j}^{k}-R_{i-1/2,j-1/2}^{k})/\mathrm{d}x/\mathrm{d}z^2;$$

$$E_{xxx}(i,j)=(R_{i+3/2,j}^{k}-3R_{i+1/2,j}^{k}+3R_{i-1/2,j}^{k}+R_{i-3/2,j}^{k})/\mathrm{d}x^3;$$

$$F_z(i,j)=\left[\sum_{n=1}^{4}C_i^{(4)}(T_{i+(2n-1)/2,j}^{k}-T_{i-(2n-1)/2,j}^{k})\right]/\mathrm{d}z;\quad F_{zz}(i,j)=(T_{i,j+1/2}^{k}-2T_{i,j}^{k}+T_{i,j-1/2}^{k})/\mathrm{d}x^2;$$

$$F_{xz}(i,j)=(T_{i+1/2,j+1/2}^{k}-T_{i+1/2,j-1/2}^{k}-T_{i-1/2,j+1/2}^{k}+T_{i-1/2,j-1/2}^{k})/\mathrm{d}x/\mathrm{d}z;$$

$$F_{xzz}(i,j)=(T_{i+1/2,j+1/2}^{k}-2T_{i+1/2,j}^{k}+T_{i+1/2,j-1/2}^{k}-T_{i-1/2,j+1/2}^{k}+2T_{i-1/2,j}^{k}-T_{i-1/2,j-1/2}^{k})/\mathrm{d}x/\mathrm{d}z^2;$$

$$G_x(i,j)=\left[\sum_{n=1}^{4}C_i^{(4)}(H_{i+(2n-1)/2,j}^{k}-H_{i-(2n-1)/2,j}^{k})\right]/\mathrm{d}x;\quad G_z(i,j)=\left[\sum_{n=1}^{4}C_i^{(4)}(H_{i,j+(2n-1)/2}^{k}-H_{i,j-(2n-1)/2}^{k})\right]/\mathrm{d}z;$$

$$G_{xx}(i,j)=(H_{i+1/2,j}^{k}-2H_{i,j}^{k}+H_{i-1/2,j}^{k})/\mathrm{d}x^2;\quad G_{zz}(i,j)=(H_{i,j+1/2}^{k}-2H_{i,j}^{k}+H_{i,j-1/2}^{k})/\mathrm{d}x^2;$$

$$G_{xz}(i,j)=(H_{i+1/2,j+1/2}^{k}-H_{i+1/2,j-1/2}^{k}-H_{i-1/2,j+1/2}^{k}+H_{i-1/2,j-1/2}^{k})/\mathrm{d}x/\mathrm{d}z;$$

$$G_{xxz}(i,j)=(T_{i+1/2,j+1/2}^{k}-2T_{i,j+1/2}^{k}+T_{i-1/2,j+1/2}^{k}-T_{i+1/2,j-1/2}^{k}+2T_{i,j-1/2}^{k}-T_{i-1/2,j-1/2}^{k})/\mathrm{d}x^2/\mathrm{d}z;$$

$$G_{xxx}(i,j)=(H_{i+3/2,j}^{k}-3H_{i+1/2,j}^{k}+3H_{i-1/2,j}^{k}+H_{i-3/2,j}^{k})/\mathrm{d}x^3;$$

$$G_{zzz}(i,j)=(H_{i,j+3/2}^{k}-3H_{i,j+1/2}^{k}+3H_{i,j-1/2}^{k}+H_{i,j-3/2}^{k})/\mathrm{d}x^3.$$

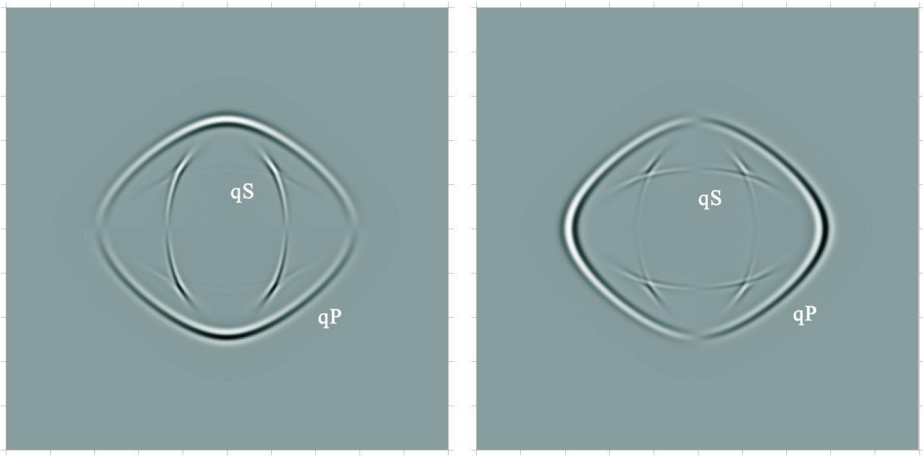
方程组(1)中另外四个方程的有限差分公式可由此类推得到。

3 数值模拟算例

前人工作已经说明, 高阶时间精度交错网格有限差分数值模拟方法比低阶时间精度方法具有更高的计算效率[6]。为了探讨其正确性和可行性, 我们首先把本文给出的四阶时间精度方法得到的数值模拟结果与前人工作给出的、已确定比较可靠的二阶时间精度方法得到的结果作比较, 以说明本文所给出方法的正确性, 然后再通过数值模拟结果与实测垂直地震剖面(VSP)数据的对比来说明给出方法的可行性。

图 1 是利用本文所述方法模拟得到的均匀横向各向同性(TI)介质的波场快照, 所用弹性常数和密度的取值分别为: $C_{11}=2.55\times10^{10}$ Pa, $C_{13}=0.5\times10^{10}$ Pa, $C_{33}=1.84\times10^{10}$ Pa, $C_{44}=0.56\times10^{10}$ Pa, $\rho=2\,440$ kg/m^3。由图可见: 速度较快的拟纵波(qP)波波前形态近似为一菱形; 速度较慢的拟横波(qS)波在两个对角线方向上出现同相轴交叉现象。这个特征与文献[10]给出的数值模拟结果是一致的, 说明本文给出的方法是正确的。

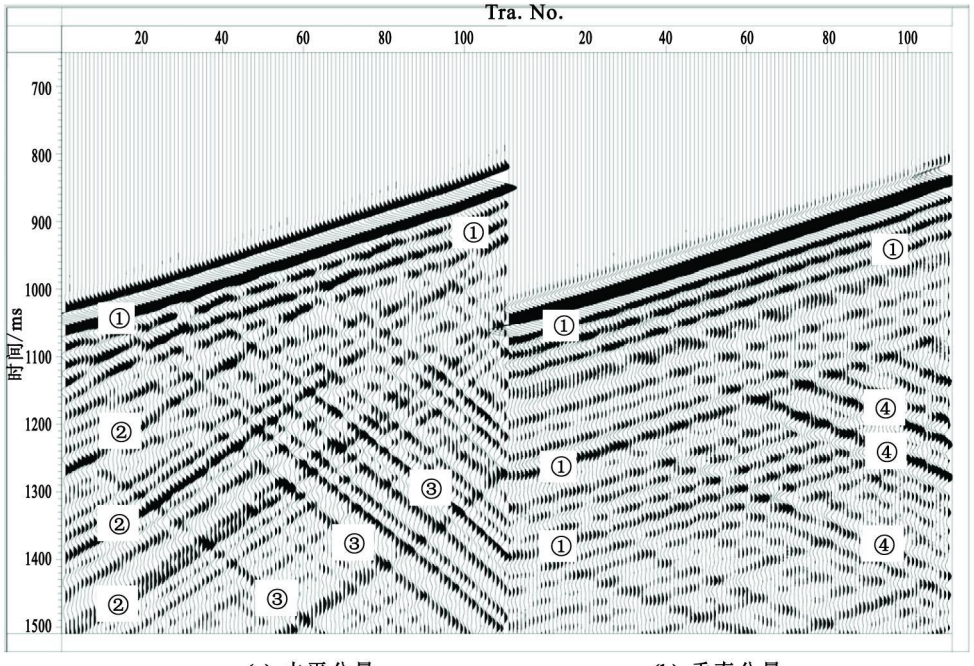
© 1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net



(a) 水平分量　　(b) 垂直分量

图 1　TI 介质数值模拟波场快照

Fig. 1　Modeling snapshots in TI media.



(a) 水平分量　　(b) 垂直分量

图 2　VSP 数值模拟记录

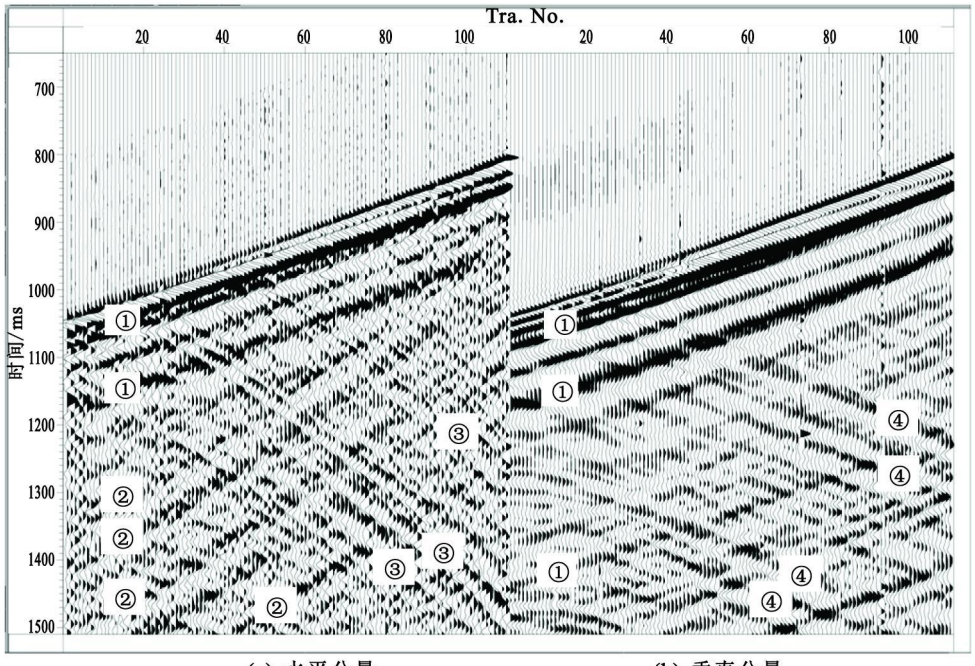
Fig. 2　VSP numerical modeling records.

图 2 和图 3 分别是一个非零井源距 VSP 波场的数值模拟记录和对应的实测地震记录。数值模拟所用的速度模型是根据该井的零井源距 VSP 估算得到的一维速度模型。VSP 井源距离为 600 m; 激发井深为 30 m; 接收点深度范围是 2 110~ 3 100 m; 接收点间距为 10 m; 采用纵波震源。从图 2 的数值模拟结果可以看出: (1) 在水平和垂直分量上, 都有明显的基本平行于初至波同相轴的多次波(同相轴 ①) ; (2) 下行和上行转换横波(同相轴 ②和 ③) 的能量主要分布在水平分量上; (3) 上行 P 波(同相轴 ④) 的能量主要分布在垂直分量上, 而下行 P 波和其它类型的转换波能量在两个分量上都很弱。这些特征与图 3 所示实测地震记录的特征相一致, 由此可见本文所述的数值模拟方法是可靠的。

4　结论

前人工作已经证明, 高阶时间精度交错网格有限差分数值模拟方法比常规方法具有更高的计算效率。本文是在现有一阶弹性波方程交错网格高阶有限差分解法基础上, 考虑弹性常数的空间变化, 将该方法推广到非均匀 TI 介质情况下的 P-SV 弹性波

© 1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net



(a) 水平分量 (b) 垂直分量

图 3 VSP 实测记录

Fig. 3 VSP field records.

数值模拟,给出了四阶时间精度、高阶空间精度交错网格有限差分数值模拟的差分格式。同时保持了该方法的优点,即在不增加内存的情况下,可以选择更大的空间步长,从而提高数值模拟的效率。数值模拟得到垂直地震剖面(VSP)地震记录和实际观测记录具有相一致的波场特征,说明该地震波数值模拟方法是可行的。

[参考文献]

[1] Madariaga R. Dynamic of an expanding circular fault [J]. Bull. Seism. Soc. Amer., 1976, 66: 639-667.

[2] Virieux J. SH-wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method[J]. Geophysics, 1984, 49(11): 1933-1942.

[3] Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite difference method [J]. Geophysics, 1986, 51(4): 889-901.

[4] Levander A R. Fourth-order finite-difference P-SV seismograms[J]. Geophysics, 1988, 53(11): 1 425-1436.

[5] Dai N, Vafidis A, Kanasewich E R. Wave propagation in heterogeneous, porous media: A velocity-stress, finite-difference method[J]. Geophysics, 1995, 60(2): 327-340.

[6] 董良国, 马在田, 曹景忠, 等. 一阶弹性波方程交错网格高阶差分解法[J]. 地球物理学报, 2000, 43(3): 411-419.

[7] 王秀明, 张海澜, 王东. 利用高阶交错网格有限差分法模拟地震波在非均匀孔隙介质中的传播[J]. 地球物理学报, 2003, 46(6): 842-849.

[8] 裴正林, 牟永光. 非均匀介质地震波传播交错网格高阶有限差分法模拟[J]. 石油大学学报(自然科学版), 2003, 27(6): 17-21.

[9] 裴正林. 三维双相各向异性介质中弹性波方程交错网格高阶有限差分法模拟[J]. 石油大学学报(自然科学版), 2004, 28(5): 23-29.

[10] 裴正林, 王尚旭. 任意倾斜各向异性介质中弹性波波场交错网格高阶有限差分法模拟[J]. 地震学报, 2005, 27(4): 441-451.

[11] 董良国, 马在田, 曹景忠. 一阶弹性波方程交错网格高阶差分解法稳定性研究[J]. 地球物理学报, 2000, 43(6): 856-864.

© 1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net