

利用积分方程法的大地电磁三维正演

徐凯军, 李桐林, 张辉, 李建平

(吉林大学地球探测科学与技术学院, 吉林 长春 130026)

摘要:利用积分方程法实现了均匀导电半空间三维大地电磁响应的数值模拟。求取张量格林函数积分时,采用二次剖分算法解决计算中奇异值问题,对于含有贝塞尔函数的积分项,利用结合连分式展开的高斯求积代替常规的快速汉克尔变换方法,确保了张量格林函数的正确计算并提高了计算精度。最后通过数值模拟结果的对比及模型试算验证了算法的正确性,所实现的三维大地电磁数值模拟算法为理论研究三维地电构造的大地电磁响应的分布规律提供了有效的工具,也为研究三维反演算法奠定了基础。

关键词: 积分方程; 大地电磁; 三维正演; 张量格林函数

中图分类号: P631.3⁺1 文献标识码: A 文章编号: 1000-0844(2006)02-0104-04

Three Dimensional Magnetotelluric Forward Modeling Using Integral Equation

XU Kai-jun, LI Tong-lin, ZHANG Hui, LI Jian-ping

(College of GeoExploration Science and Technology, Jilin University, Changchun 130026, China)

Abstract: Using integral equation method, the numerical algorithm of 3D magnetotelluric responses in homogeneous half-space is realized. While calculating tensor Green's functions, the algorithm of secondary division is adopted to solve the singular problem. The Gaussian quadrature and continued fraction is adopted to calculate the integral with Bessel function. This method not only can ensure the right calculation of tensor Green's functions but also can get high precision. The correctness of algorithm has been proved by model comparing and analyse. This efficient algorithm will help to study the distributing laws of 3D magnetotelluric responses and to setup basis for reaserch of 3D inversion.

Key words: Integral equation; Magnetotelluric; 3D forward modeling; Tensor Green's function

0 引言

大地电磁测深法是研究地球电性结构的一种地球物理方法。随着目前油气勘探深度和难度的增大,大地电磁测深法已成为解决一些复杂的地质问题的重要工具和有效的勘探手段。目前,大地电磁测深二维正反演已趋于成熟,随着计算机技术的发展,大地电磁测深资料的三维模拟成为研究的重点。大地电磁三维数值模拟主要有积分方程法^[1-3]和有限元、有限差分等^[4-7]数值模拟方法。在利用积分方程法计算三维电磁响应时,仅需在异常体内剖

分,与有限元和有限差分法相比,这种方法在模拟有限大小三维体电磁响应时更为有效,计算速度快,占用内存少。本文在对 Ting、Hohmann 以及 Wannaker 等人工作深入分析的基础上,采用积分方程法实现了均匀导电半空间三维大地电磁响应的数值模拟,并对张量格林函数积分的计算进行了讨论,最后经过验证和模型试算,说明本文算法准确、快速。

1 积分方程法基本理论

在均匀导电半空间中含有一三维异常体,取时

收稿日期:2006-03-17

基金项目:国土资源部十五重点项目(20010212)资助

作者简介:徐凯军(1979—),男(汉族),安徽固镇人,在读博士,主要从事地球物理正反演研究。

谐因子为 $e^{i\omega t}$, 在外加电流 J_p 的场源激励下, 忽略位移电流, 根据 Maxwell 方程、积分方程理论以及相应的电磁张量格林函数, 可以得到均匀大地中三维异常体电磁响应的积分方程^[8-9]:

$$E(r) = E_p(r) + \int_V \Delta\sigma \cdot \bar{G}^E(r, r') \cdot E(r') dV' \quad (1)$$

$$H(r) = H_p(r) + \int_V \Delta\sigma \cdot \bar{G}^H(r, r') \cdot E(r') dV' \quad (2)$$

式中 $E(r)$ 和 $H(r)$ 是 r 处的总电场、总磁场; $E_p(r)$ 和 $H_p(r)$ 是以天然的平面电磁波为场源在大地中产生的一次电场和磁场; $\Delta\sigma = \sigma_b - \sigma$ 是三维异常体与大地电导率差异; $\bar{G}^E(r, r')$ 和 $\bar{G}^H(r, r')$ 为电和磁并矢格林函数; $E(r')$ 为异常体内电场。

为了进行数值计算, 把积分方程(1)、(2)化为矩阵方程。将异常体区域剖分成 N 个小立方体, 且认为每个小单元内场值近似取其中心点的值, 则第 m 块中心的总场近似为

$$E(r_m) = E_p(r_m) + \sum_{n=1}^N \Delta\sigma \left(\int_V \bar{G}^E(r_m, r') dV' \right) \cdot E(r_n) \quad (3)$$

$$H(r_m) = H_p(r_m) + \sum_{n=1}^N \Delta\sigma \left(\int_V \bar{G}^H(r_m, r') dV' \right) \cdot E(r_n) \quad (4)$$

整理式(3)得

$$\sum_{n=1}^N [(\sigma_n - \sigma) \bar{\Gamma}^E(r_m, r_n) - \bar{\delta}] \cdot E(r_n) = -E_p(r_m) \quad (5)$$

式中

$$\bar{\delta}_{mm} = \begin{cases} \bar{I} & m = n \\ \bar{O} & m \neq n \end{cases} \quad (6)$$

这里 \bar{I} 是一个 3×3 的单位张量。将式(5)写为矩阵方程则有

$$[\bar{M}] \cdot [E] = [-E_p] \quad (7)$$

利用计算精度较高的求解复系数方程组的全选主元高斯-约当消去法^[10]求解大型线性方程组(7)即可得到各剖分小块的总电场值 $E(r_n)$, 然后利用式(4)可得到各剖分小块的总磁场值 $H(r_n)$ 。有了异常体各单元处的总电、磁场后, 通过(1)、(2)两式即可求得空间内任意一点的电磁场值, 在求得空间总的电磁场后, 可由下式得到视电阻率

$$\rho_{ij} = \frac{1}{\omega\mu} \left| \frac{E_i}{H_j} \right|^2 \quad (8)$$

其中 $i = x, y, j = x, y$ 。

2 计算张量格林函数

在利用积分方程求解三维电磁响应时, 如何准确快速的求取式(3)和式(4)中的并矢格林函数积分值, 是整个求解过程中的重点和难点, 它直接影响到求解的精度和速度。

异常体内第 n 个小单元散射电流对于第 m (包括 $m = n$) 个小单元效应的并矢格林函数为

$$\bar{\Gamma}^E(r_m, r_n) = \int_{V_n} \bar{G}^E(r_m, r') dV' \quad (9)$$

$$\bar{\Gamma}^H(r_m, r_n) = \int_{V_n} \bar{G}^H(r_m, r') dV' \quad (10)$$

为了提高解的准确性, 且避免当 $m = n$ 时引起的奇异值问题, 我们对剖分后的异常体各单元小块又进行了二次剖分, 剖分每个小单元为 M 个次单元, 求解第 n 个单元中各次单元分别对第 m 单元中心点处的响应, 然后叠加这些响应。设一次剖分后各单元的长、宽、高分别为 a, b, c , 第 n 和 m 单元中心点处的坐标分别为 (x_n, y_n, z_n) 和 (x_m, y_m, z_m) , 二次剖分形成的次单元边长为 Δ , 则二次剖分后各次单元中心点处的坐标 (x_{ni}, y_{nj}, z_{nk}) 值为

$$\left. \begin{aligned} x_{ni} &= x_n + \Delta \left(\frac{(a/\Delta) + 1}{2} - i \right), \quad i = 1, 2, \dots, a/\Delta \\ y_{nj} &= y_n + \Delta \left(\frac{(b/\Delta) + 1}{2} - j \right), \quad j = 1, 2, \dots, b/\Delta \\ z_{nk} &= z_n + \Delta \left(\frac{(c/\Delta) + 1}{2} - k \right), \quad k = 1, 2, \dots, c/\Delta \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

这样式(9)中并矢格林函数值可写为

$$\bar{\Gamma}^E((x_m, y_m, z_m), (x_n, y_n, z_n)) = \sum_{i=1}^{a/\Delta} \sum_{j=1}^{b/\Delta} \sum_{k=1}^{c/\Delta} \bar{\Gamma}^E((x_m, y_m, z_m), (x_{ni}, y_{nj}, z_{nk})) \quad (12)$$

在求解式(12)时, $\bar{\Gamma}^E$ 分为一次部分 $^P\bar{\Gamma}^E$ 和二次部分 $^S\bar{\Gamma}^E$, 即 $\bar{\Gamma}^E = ^P\bar{\Gamma}^E + ^S\bar{\Gamma}^E$ 。对一次部分中的电流项利用解析近似方法求解, 电荷项部分则利用差分近似方法计算^[8]。在计算二次部分 $^S\bar{\Gamma}^E$ 时, 对于含有贝塞尔函数积分的部分, 由于积分核函数不总是随贝塞尔函数 $J_\nu(\lambda r)$ 参数 λ 的增大而趋于收敛, 因此不能用常规的快速汉克尔变换求解, 本文利用结合连分式展开的高斯求积方法计算, 不仅确保了计算的正确性, 而且提高了计算精度^[11-12]。

对于磁张量格林函数, 根据麦克斯韦定理可知, 由散射体本身的散射电流产生的二次扰动场满足如下方程:

$$\nabla \times E_s = -i\omega\mu_0 H_s \quad (13)$$

从而
$$H_s = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla \times E_s = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \int \nabla \times \bar{G}^E(r, r') \cdot J_s(r') dv' \quad (14)$$

所以
$$\bar{G}^H(r, r') = \nabla \times \bar{G}^E(r, r') \quad (15)$$

频率域中磁张量格林函数 \bar{G}^H 的表达式也可以写成一次场 ${}^P\bar{G}^H$ 和二次场 ${}^S\bar{G}^H$ 和的形式, 即 $\bar{G}^H = {}^P\bar{G}^H + {}^S\bar{G}^H$, 其中

$${}^P\bar{G}^H = \begin{vmatrix} 0 & \frac{(z-z')a}{4\pi} & -\frac{(y-y')a}{4\pi} \\ -\frac{(z-z')a}{4\pi} & 0 & \frac{(x-x')a}{4\pi} \\ \frac{(y-y')a}{4\pi} & -\frac{(x-x')a}{4\pi} & 0 \end{vmatrix};$$

$$a = \frac{e^{ikR}}{R} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{ik}{R} \right];$$

$${}^S\bar{G}^H = \nabla \times {}^S\bar{G}^E.$$

最后磁并矢格林函数积分值为

$$\bar{\Gamma}^H = {}^P\bar{\Gamma}^H + {}^S\bar{\Gamma}^H = \int_V {}^P\bar{G}^H + \int_V {}^S\bar{G}^H \quad (16)$$

在求解式(16)时, 一次部分 ${}^P\bar{\Gamma}^H$ 采用三重积分直接积分求得; 计算二次部分 ${}^S\bar{\Gamma}^H$ 时, 先对电张量格林函数二次部分求旋度, 然后再求取 ${}^S\bar{\Gamma}^H$, 最终求得 $\bar{\Gamma}^H$ 。

3 结果验证与模型试算

为了验证本文算法的正确性, 设计了一个 x 方向长 4 km, z 方向长 2 km 二维低阻棱柱体模型, 顶面埋深为 2 km, 走向为 y 方向, 电阻率为 5 Ωm , 围岩电阻率为 100 Ωm 。我们分别用二维有限单元法和本文三维程序对上述模型进行了计算。图 1 为频率分别为 1.0 Hz 和 0.1 Hz 时 TE 模式下两种数值模拟方法的计算结果对比。结果表明两者拟合较吻合, 表明本文算法是正确的。

我们又计算在电阻率为 100 Ωm 的均匀导电半空间, 有一个 1 km \times 4 km \times 2 km 的电阻率为 5 Ωm 低阻长方体时的大地电磁响应。按线性尺寸 200 m 将异常体剖分成 1 000 个小立方体单元, 为了避免求并矢格林函数时引起的奇异值问题, 以提高解的准确性, 我们对剖分后的异常体各单元小块又以线性尺寸 100 m 进行了二次剖分, 剖分每个小单元为 8 个次单元。图 2 为不同频率下 x 轴方向地表中心剖面上各点的视电阻率值 ρ_{yx} 。

对于均匀半空间中同时存在高阻体和低阻体的

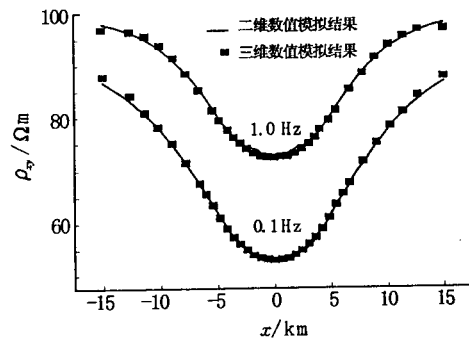


图 1 2D 和 3D 模拟结果比较

Fig. 1 The comparison of responses between 2D and 3D modeling.

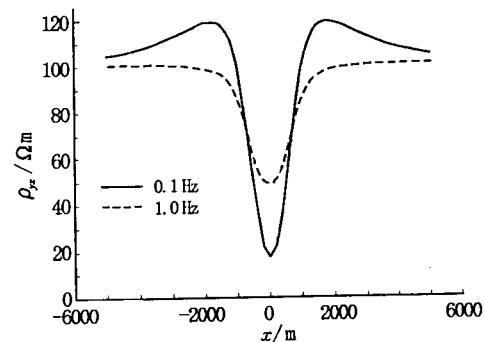


图 2 不同频率时视电阻率剖面图

Fig. 2 The profile map of apparent resistivity having different frequency.

情况, 我们设计了如图 3 所示的模型。在电阻率为 100 Ωm 的均匀半空间中同时存在一电阻率为 300 Ωm 的高阻体和一电阻率为 5 Ωm 的低阻体, 它们在 y 方向的沿伸长度为 4 km, 然后计算了不同频率下 x 轴方向地表中心剖面上各点的视电阻率值 ρ_{yx} (图 4)。从图中可以看出视电阻率反映出地下异常体的分布规律, 而且视电阻率的异常幅度随一次场频率的升高而逐渐变小, 并且越来越接近于背景场的电阻率。这是因为当频率越高时, 视电阻率剖面的曲线特征越接近地表处的电阻率特征。

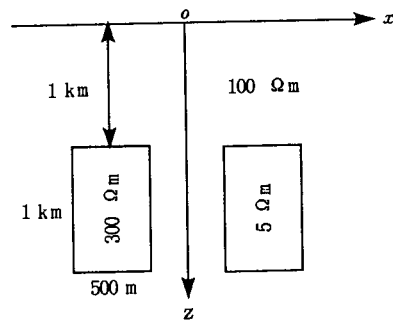


图 3 模型的垂直断面图

Fig. 3 The sectional drawing of model.

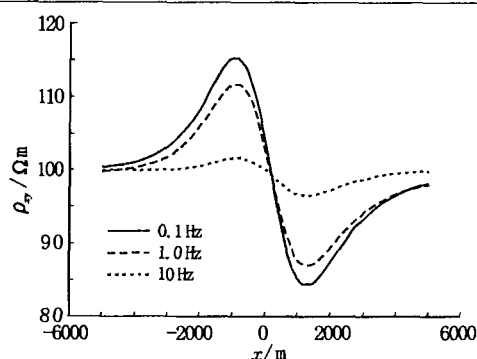


图4 不同频率时视电阻率剖面图

Fig.4 The profile map of apparent resistivity having different frequency.

4 结论

由于积分方程只须对异常体进行剖分和求积,具有计算速度快,物理意义明确等优点。本文采用积分方程法实现了均匀导电半空间三维大地电磁响应的数值模拟。在求取张量格林函数积分这一关键问题时,应用一种差分近似的方法求解张量格林函数电荷源积分项一次部分;采用二次剖分的算法解决了计算中奇异值问题;对于含有贝塞尔函数的积分项,利用一种结合连分式展开的高斯求积代替常规的快速汉克尔变换方法。这样即确保计算正确又提高了计算精度。本文实现的三维大地电磁数值模拟算法为理论研究三维地电构造的大地电磁响应的分布规律和特征提供了有效的工具,同时也为研究三维反演算法奠定了正演基础。

[参考文献]

- [1] Ting S C, Hohmann G W. Integral equation modeling of three dimensional magnetotelluric response[J]. *Geophysics*, 1981, **46**(2): 182 - 197.
- [2] Wannamaker P E. Advances in three dimensional magnetotelluric modeling using integral equations[J]. *Geophysics*, 1991, **56**(11): 1716 - 1728.
- [3] 鲁来玉,张碧星,鲍光淑. 电阻率随位置线性变化时的三维大地电磁模拟[J]. *地球物理学报*, 2003, **46**(4): 568 - 575.
- [4] Mackie R L, Madden T R, Wannamaker P E. Three dimensional magnetotelluric modeling using difference equations - Theory and comparisons to integral equation solutions[J]. *Geophysics*, 1993, **58**(2): 215 - 226.
- [5] Mackie R L, Madden T R. Conjugate gradient relaxation solutions for three dimensional magnetotelluric modeling[J]. *Geophysics*, 1993, **58**(7): 1052 - 1057.
- [6] 谭捍东,余钦范,等. 大地电磁法三维交错采样有限差分数值模拟[J]. *地球物理学报*, 2003, **46**(5): 705 - 711.
- [7] 阮百尧,熊彬. 电导率连续变化的三维电阻率测深有限元模拟[J]. *地球物理学报*, 2002, **45**(1): 131 - 138.
- [8] G W Hohmann. Three dimensional induced polarization and electromagnetic modeling[J]. *Geophysics*, 1975, **40**(2): 309 - 324.
- [9] P E Wannamaker, G W Hohmann, W A SanFilipo. Electromagnetic modeling of three dimensional bodies in layered earths using integral equations[J]. *Geophysics*, 1984, **49**(1): 60 - 74.
- [10] 李建良,蒋勇,汪光先,等. 计算机数值方法[M]. 南京:东南大学出版社,2000.
- [11] 翁爱华,王雪秋. 利用数值积分提高一维模型电偶源电磁测深响应计算精度[J]. *西北地震学报*, 2003, **25**(3): 193 - 197.
- [12] 张辉,李桐林,董瑞霞,等. 利用高斯求积和连分式展开计算电磁张量格林函数积分[J]. *地球物理学进展*, 2005, **20**(3): 667 - 670.