

# 利用数值积分提高一维模型电偶源 电磁测深响应计算精度

翁爱华, 王雪秋

(吉林大学应用地球物理系, 吉林 长春 130026)

**摘要:** 讨论了直接利用数值积分提高电偶源电磁测深响应计算精度的方法, 具体为对 Hankel 积分进行直接积分, 结合连分式展开方法以提高积分求和的收敛速度. 利用该方法对均匀半空间和层状(两层)模型的电磁测深响应进行了模拟, 结果表明与常规的快速 Hankel 滤波方法相比, 采用直接数值积分能明显提高电偶源频率测深响应计算精度. 从而为获得高精度瞬变测深晚期响应提供算法基础.

**关键词:** 数值积分; 连分式; 电偶源; 电磁测深; 一维模型

**中图分类号:** P631.3<sup>+</sup>25 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-0844(2003)03-0193-05

## 0 引言

电偶源电磁测深的一维地电模型响应的计算涉及到频率域与时间域响应的数值模拟. 电偶源频率测深响应的计算实际是第一类的 0-阶或 1-阶 Hankel 积分变换问题<sup>[1]</sup>. 时间域的电磁响应通常用余弦变换将频率域结果转换到时间域中<sup>[2]</sup>, 因此时间域响应的计算精度取决于频率域电磁场响应的计算精度, 也就是 Hankel 积分计算精度.

在求取电磁场频率域响应中, 通常认为直接数值积分是困难的, 这是因为积分中含有振荡的 Bessel 函数, 因此多采用数字滤波技术计算该积分<sup>[3, 4]</sup>. 当核函数单调、快速衰减, 且发射偶极和接受偶极的收发距合适时, 数字滤波能取得较好的效果. 但数字滤波在有些情况下计算精度不高, 且滤波系数取决于计算方法<sup>[1]</sup>, 因此在采用积分变换将频率域响应转换到时间域得到瞬变电磁响应时, 低精度的频率响应会导致瞬变响应尤其是晚期响应出现振荡, 导致定义的全区视电阻率出现振荡与畸变<sup>[5]</sup>. 同时, 当存在较厚的高导电层时, 电磁场的衰减较慢, 为了观测到较深目的层的电磁感应信号, 也要求采用较长的观测时间. 此外, 在长偏移距电磁测深中为了得到较深处的地电信息, 必须观测较晚期瞬变响应. 因此提高瞬变电磁场, 尤其是晚期电磁场的计算精度很有意义. 本文主要从提高频率响应计算精度出发来提高瞬变电磁场的计算精度. 具体方法是采用高斯求积方法对有限区间积分进行计算, 结合连分式展开方法加快部分积分和的收敛速度<sup>[6]</sup>. 文中以电偶源频率测深垂直分量  $H_z$  为例, 描述 Hankel 变换的上述具体数值积分过程. 该方法在实际的地质地球物理模型中, 瞬变电磁响应时间范围可被扩展到  $10^4$ s 甚至更晚.

## 1 电偶源频率测深垂直磁场表达式

电偶源频率测深装置模型如图 1. 地电模型为水平层状均匀各向同性大地, 各层的电阻率和厚度分别为  $\rho_i$  和  $h_i$ . 在地表面有电偶极子 AB 作发射源, 时间因子取为  $e^{-i\omega t}$ . 坐标系中  $x$  轴沿发射源方向,  $z$  轴垂直向下. 略去推导过程, 在地面任意一点  $(r, \theta)$  处垂直磁场的表达式为<sup>[1, 7]</sup>

收稿日期: 2002-12-04

作者简介: 翁爱华(1969-), 男(汉族), 安徽天长人, 博士, 吉林大学地球探测与信息技术学院讲师, 从事核磁测井与地面核磁共振理论以及电(磁)法勘探的教学与研究工作.

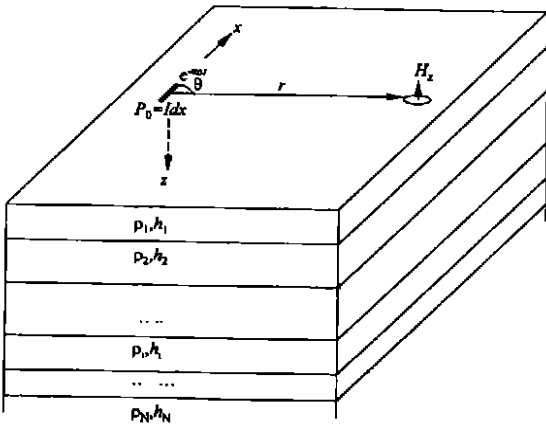


图 1 水平层状介质模型和电偶源测深装置

Fig. 1 Current dipole electromagnetic sounding configuration over layered geoelectrical model

$$H_z(r, \omega) = \frac{P_E \sin \theta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{\lambda + n_1/R_1} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (1)$$

式中  $P_E = Idx$  为发射偶极矩;  $r$  是收发距;  $\theta$  为  $\vec{r}$  与偶极子的夹角;  $n_1 = \sqrt{\lambda^2 + k_1^2}$ ; 在低频近似条件下忽略位移电流,  $k_1^2 = i\omega\sigma\mu_0$ ;  $R_1$  是空间频率特性函数, 其递推关系为

$$R_j = \frac{1 + \text{cth}(n_j h_j) \circ n_j R_{j+1} / n_{j+1}}{\text{cth}(n_j h_j) + R_{j+1} n_j / n_{j+1}} \quad (2)$$

$$R_N = 1$$

通常采用数字滤波方法计算式(1). 由于 Bessel 函数的振荡衰减特征, 数字滤波方法要求被积核函数  $F(\lambda) = \lambda^2/(\lambda + n_1/R_1)$  快速衰减, 以保证在采用有限长度数字滤波器后即可达到要求的精度. 图 2 给出了电阻率为  $100 \Omega \cdot m$  的均匀半空间在收发距  $r = 5000 m$ , 频率  $f$  分别为  $10^{-6}$ 、 $1.5$  与  $10^6 Hz$  时核函数与积分变量  $\lambda$  变化规律. 从图可见, 随着  $\lambda$  的增大核函数的实部单调增加; 虚部则在通

常的滤波积分限  $\lambda < 10$  的范围内, 随着  $\lambda$  的增大先增加后又减小. 同时随着频率的降低, 该虚部的极大值点向小  $\lambda$  方向移动, 甚至在较低频率时, 该虚部极大值点消失, 虚部成为  $\lambda$  的单调降函数. 虽然有利于滤波计算, 但此时数值非常小, 很难保证计算精度. 对于较高频响应, 采用数值滤波直接计算该积分进行效果不佳, 通常对核函数进行修正以提高计算精度<sup>[1]</sup>. 修正虽然能保证在有限的积分区间中积分核能快速衰减, 但修正的结果在频率较小时核函数虚部的计算精度同样难以保证.

## 2 直接数值积分方法

式(1)可表示为如下的更一般的含有第一类  $i$  一阶 Bessel 函数的积分形式:

$$f(r) = \int_0^\infty f(\lambda) J_i(\lambda r) d\lambda \quad (3)$$

为了直接采用数值求积方法计算式(3), 可将该积分写成如下部分积分和:

$$P_n = \int_{z_n}^{z_{n+1}} d\lambda f(\lambda) J_i(\lambda r) \quad (4)$$

其中  $z_n$  为  $J_i(\lambda r)$  的第  $n$  个零点用距离  $r$  归一化后的值. 对于式(4)

可采用 Gauss 求积公式计算:

$$P_n \approx \sum_{j=1}^M h_j f(a_j) J_i(a_j r) \quad (5)$$

其中  $a_j$  为求积节点;  $h_j$  为求积系数;  $M$  为求积节点个数, 一般采用  $M = 7$  点求积公式即可达到计算精度. 这样整个积分可用如下的部分积分和表示:

$$f \approx S = \sum_{i=1}^N P_i \quad (6)$$

由于 Bessel 函数的振荡特征导致对式(6)直接求和收敛很慢. 为了加快数值积分的收敛速度, 将级数式(6)用如下的有限连分式表示:

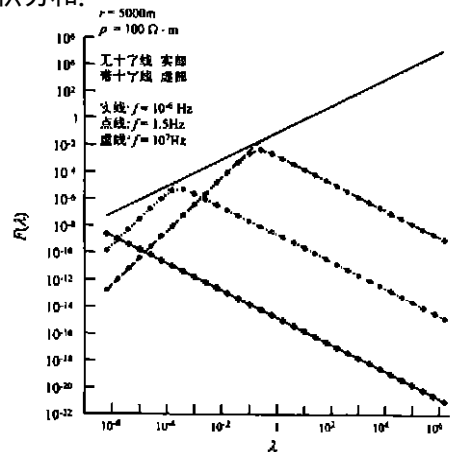


图 2 均匀半空间核函数随积分变量的变化情况

Fig. 2 Variation of kernel function  $F(\lambda)$  in half-space with variation of  $\lambda$ .

$$S = \frac{a_0}{1 + \frac{a_1}{1 + \frac{a_2}{1 + \dots + a_N}}} \quad (7)$$

式中待定系数  $a_j$  与式(6)中的求和项  $P_n$  有递推关系<sup>[8]</sup>, 从而将简单的积分求和转换为用连分式计算. 利用连分式计算级数的一个优点是当新的部分和被累加到式(6)中时, 可利用递推关系, 仅需要计算式(7)最后的系数. 更重要的是, 函数连分式的求解过程是基于对整个级数收敛变化过程的认识, 因此利用连分式代替直接求和收敛速度要快很多. 而且对于慢收敛或者发散型积分, 如式(3), 利用连分式技术可快速得到积分结果.

通常式(7)中有限连分式的项数  $N \leq 30$  即可保证计算的相对误差达到  $10^{-10}$ , 但在计算过程中  $N$  的具体值取决于积分参变量  $r$  以及积分核的振荡特性.

### 3 数值结果

为了验证本文方法精度, 首先对均匀半空间模型进行了模拟. 均匀半空间的电阻率  $\rho$  为  $100 \Omega \cdot m$ ; 收发距  $r = 1000 m$ . 图3(a)给出了计算的垂直磁场频率响应虚部变化规律. 图中虚线为采用数字滤波方法(Filtering)计算的结果; 实线是数值积分(Integration)计算的结果. 从图可见, 在相对高频段两种计算方法获得的结果完全一致; 但在低频段滤波方法计算的频率响应虚部出现明显的振荡, 而数值积分方法稳定变化.

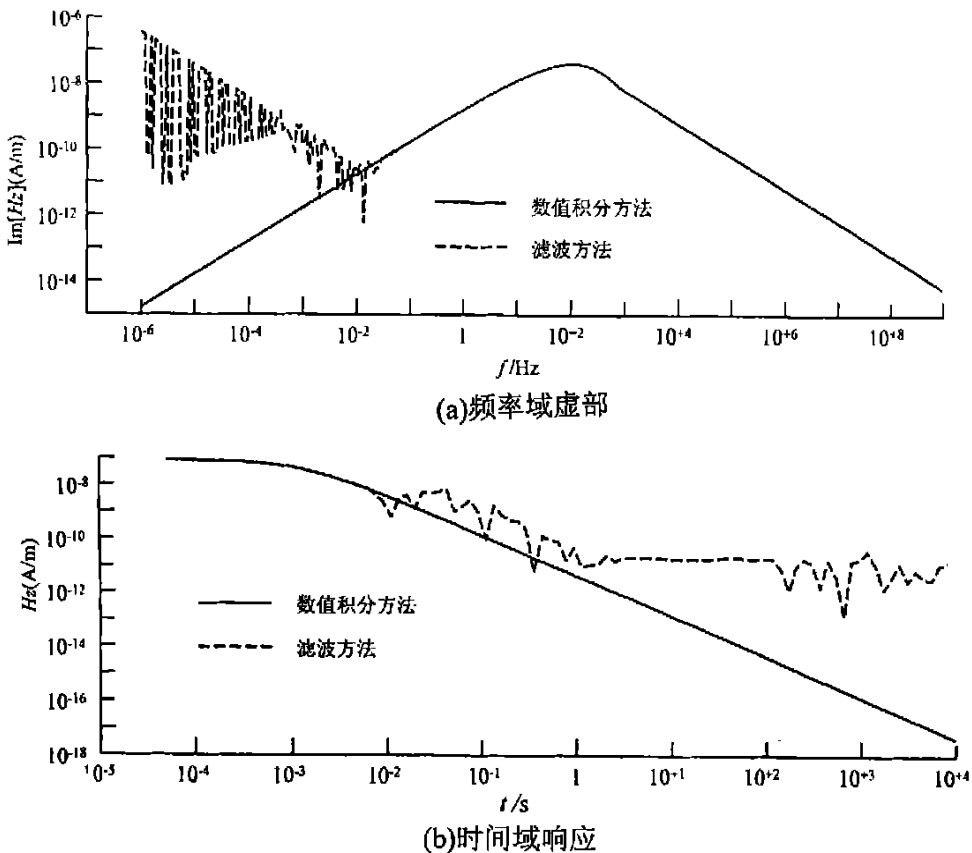


图3 均匀半空间垂直磁场响应特征

Fig. 3  $H_z$  response of current dipole source over half-space.

图 3(b)是由图 3(a)中的频率响应虚部采用余弦变换方法得到的时间域响应<sup>[9]</sup>. 从图可见, 在瞬变场早期由滤波方法和积分方法获得的瞬变响应几乎一致; 但在相对晚期滤波方法计算的瞬变响应出现明显振荡, 不能代表真正的磁场衰减变化规律. 而由积分方法得到的瞬变响应在整个时段都稳定衰减, 甚至在  $10^4$  s 时, 计算的磁场值也是有效的. 因此采用直接积分方法可大大扩展瞬变电磁法晚期的时间定义范围.

实际上, 由滤波方法得到的频率响应计算瞬变磁场响应出现的不稳定性直接与滤波方法在低频段不稳定性有关. 按照电磁测深原理, 在瞬变场衰减的早期电磁场响应主要取决于高频成分; 而在晚期高频成分衰减殆尽, 观测到的电磁场主要与低频感应成分有关! 由于滤波方法得到的低频磁场振荡, 因此晚期瞬变响应也会不稳定.

图 4 给出了两层导电模型电偶源测深垂直磁场响应变化特征. 图中收发距  $r$  为 5 000 m; 覆盖层电阻率为  $100 \Omega \cdot m$ ; 厚度为 100 m; 基岩电阻率为  $10 \Omega \cdot m$ . 同样, 在图 4(a)中采用滤波方法在低频段计算结果发散, 导致在图 4(b)中瞬变响应在晚期也出现振荡. 而数值积分方法则非常精确地给出场的变化特征. 同时结合图 3(b)与图 4(b)可见, 利用常规的滤波方法结合余弦变换得到的较为精确的瞬变电磁响应晚期一般小于数秒<sup>[11]</sup>.

### 4 结论

采用标准的数字滤波计算技术对于低频电磁响应的计算精度不高, 导致在较大时间的晚期计算的瞬变电磁响应不稳定. 本文采用结合数值积分与连分式技术的直接积分方法, 对电偶源全频段、全时段电磁响应进行了计算. 数值计算结果表明:

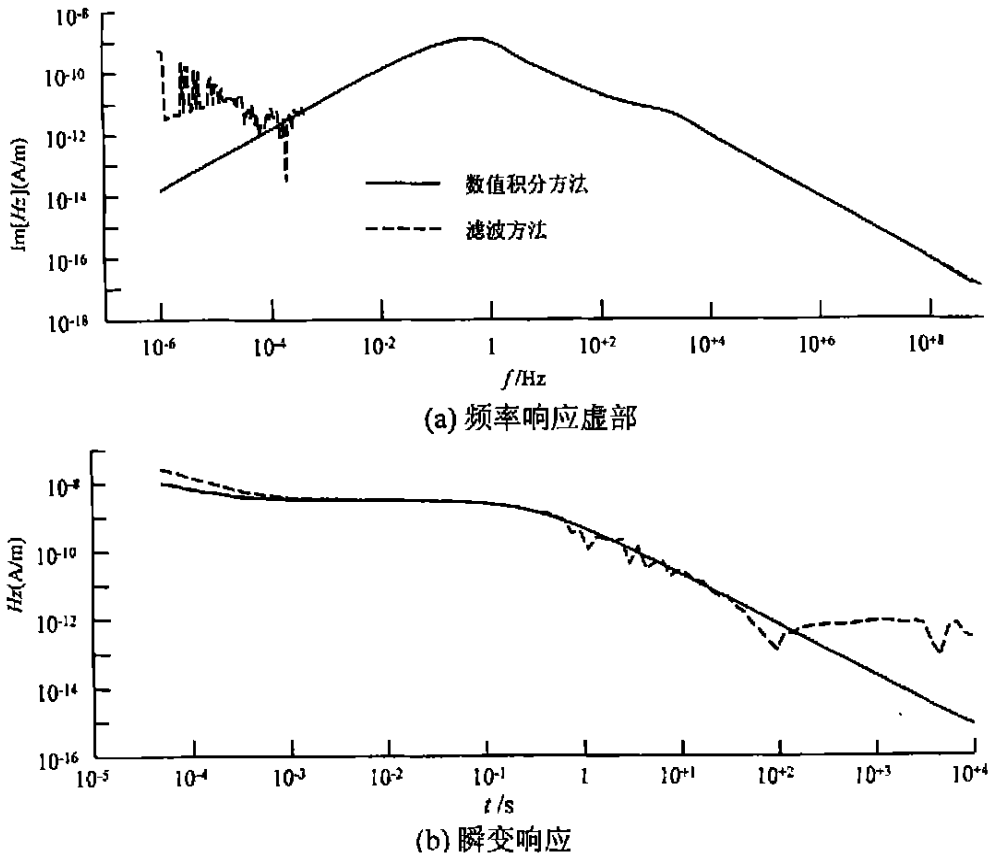


图 4 两层导电模型电偶源测深垂直磁场响应特征

Fig. 4  $H_z$  response of current dipole source over two-layered earth.

采用数值积分方法可明显提高目前频率域电磁场的计算精度;

运用数值积分方法可将瞬变电磁场计算的晚期时间延长到  $10^4$  s, 为进行更深部目标的勘探奠定理论基础。

虽然本文仅对均匀半空间以及简单的两层介质模型进行了数值模拟, 但对于任意层状导电模型, 由于其空间频率响应函数与简单的均匀半空间的响应函数具有相似的形态, 因此文中的数值方法同样可直接运用到任意层状模型上。

### [参考文献]

- [1] 朴化荣. 电磁测深法原理[M]. 北京: 地质出版社, 1990.
- [2] 马特维耶夫 B K 著. 煤炭部地质勘探研究情报所情报室译. 电磁测深解释[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1978.
- [3] Ghosh P P. The application of linear filter theory to the direct integration of geoelectrical resistivity sounding measurements[J]. Geophysical prospecting 1971, 19(2): 192—217.
- [4] Anderson W L. Numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering[J]. Geophysics, 1979, 44(10): 1287—1305.
- [5] 翁爱华. 变形广义逆反演及其在电磁测深解释中的应用(硕士论文)[D]. 长春: 长春地质学院应用地球物理系, 1996.
- [6] Chave A D. Numerical integration of related Hankel transforms by quadrature and continued fraction expansion[J]. Geophysics, 1983, 48(12): 1671—1686.
- [7] 考夫曼 A A, 凯勒 G V 著. 王建谋译. 频率域和时间域电磁测深[M]. 北京: 地质出版社, 1987.
- [8] 邹海. 最优设计中的新算法[M]. 北京: 新时代出版社, 1984.
- [9] 李吉松, 朴化荣. 电偶源瞬变电磁测深一维正演及视电阻率响应研究[J]. 物探化探计算技术, 1993, 15(2): 191—200.
- [10] 傅良魁主编. 应用地球物理教程—电法、放射性、地热[M]. 北京: 地质出版社, 1991.
- [11] Strack K M. Methods in Geochemistry and Geophysics: Exploration with deep transient electromagnetics[M]. Netherlands: Elsevier-Science Publishers, 1992.

## UTILIZING DIRECT INTEGRATION TO ENHANCE CALCULATION ACCURACY OF 1D ELECTROMAGNETIC RESPONSE FOR CURRENT DIPOLE SOURCE

WENG Ai-hua, WANG Xue-qiu

(Department of Applied Geophysics, Jilin University, Changchun 130026, China)

**Abstract:** The direct integration method to enhance the calculation accuracy of electromagnetic responses for current dipole source over layered earth is discussed. In the method Hankel integration in frequency domain is divided into several partial ones and are evaluated with the method which combines Gauss quadrature rule and continued fraction. The utility of continuous fraction can speed up the convergence greatly. Using the method the electromagnetic responses for half-space and two-layered earth models are tested. Compared with traditional numerical filter method, the result shows that the direct integration technique can improve the frequency response simulation accuracy of electromagnetic soundings for 1D earth, and gives calculating base of obtaining the very late time electromagnetic responses with high accuracy.

**Key words:** Numerical integration; Continued fraction; Current dipole source; Electromagnetic soundings; 1D model