

争鸣园地

# 《毕奥理论中 3 个基本参数的显式解》 一文中的真正错误<sup>\*</sup> ——兼答丁伯阳教授

刘 旭

(中国地震局兰州地震研究所, 甘肃兰州 730000)

摘要: 论述了《西北地震学报》1997 年第 4 期发表的《毕奥理论中 3 个基本参数的显式解》一文中的真正错误所在, 与 丁伯阳教授 1998 年第 4 期《西北地震学报》发表的文章《关于《毕奥理论中 3 个基本参数显式解》一文的错误》中所说的错误有所不同. 指出 教授文中存在着概念性的错误.

关键词: 毕奥理论; 多孔隙弹性材料

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-0844(2002)03-0278-05

## 0 前言

笔者曾在 1997 年第 4 期《西北地震学报》发表了《毕奥理论中 3 个基本参数的显式解》(以下简称《三参数》)一文. 其后丁伯阳教授在 1998 年第 4 期《西北地震学报》发表了《关于《毕奥理论中 3 个基本参数的显式解》一文的错误》(以下简称《丁》)的文章, 指出《三参数》一文中存在着错误. 笔者认真核对了这两篇文章, 发现《三参数》中的确存在着错误, 对此向丁伯阳教授表示感谢. 然而经核查发现《三参数》中的错误与《丁》文中所指出的有出入, 同时发现《丁》文中有明显的概念性的错误. 本着开展学术争鸣、活跃科研气氛的精神, 笔者对两篇文章中的错误同时进行讨论. 澄清这些错误, 对理解与应用 Biot-Geertsma 理论是非常有意义的.

## 1 《三参数》一文中的真正错误

《丁》文一直在强调《三参数》中的“骨架压缩系数  $C_b$ ”的概念是错误的, 并且由此导致了整篇文章的错误. 其实,《三参数》的问题是由公式推导过程中的“—”号引起, 导致了  $\alpha$ 、 $M$  的结论错误.

笔者虽然注意到 Biot(1962)<sup>[1]</sup> 的文章中以孔隙压力为正, 而 Geertsma(1961)<sup>[4]</sup> 以孔隙张力为正, 但是,《三参数》一文的推导过程仍然出现了混乱和部分结论的错误. 最明显的错误结论是: 由式(10)与(11)可以通过对比得出四个等式, 以确定  $\alpha$ 、 $M$  这两个参数时, 出现了多解现象. 这一现象是由推导过程的错误所导致的.

收稿日期: 2001-01-04

作者简介: 刘 旭(1963—), 男(汉族), 河北博野人, 副研究员, 现从事地震波理论和土动力学研究.

\* 中国地震局兰州地震研究所论著编号: LC2002037

## (1) 第(9)式的第二式

$$-P_f = \frac{(1-\beta)}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} e - \frac{1}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} \epsilon \quad (9-2)$$

在没有声明以孔隙压力为正时, 上式是错误的. 应改为

$$P_f = \frac{(1-\beta)}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} e - \frac{1}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} \epsilon$$

这便是 Geertsma(1961)<sup>[4]</sup> 原文中的(9a)式, 它以张力为正值.

## (2) 第(7)式的第二式

$$P_w = -\alpha M e + M \zeta \quad (11-2)$$

是 Biot(1962)<sup>[1]</sup> 原文的(30)式, 这里的  $P_w$  是孔隙压力, 它是以张力为负值的. 如果在推导中选用 Geertsma 的张力为正值约定, 上式中  $P_w$  应取负值, 从而校正文献[1]中以孔隙压力为正值约定.

## (3) 第(6)式如下

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= \varphi(u_i - U_i) \\ \zeta &= -\omega_{i,i} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

文献[1]中定义了  $\zeta = \omega_{i,i}$ . 该定义与孔隙压力的正负约定无关. 因此式(6)的第二式是错误的, 应为  $\zeta = \varphi(e - \epsilon)$ .

(4) 文献[4]中的  $\bar{\sigma}$  是对双相介质施加的总应力, 而不是对骨架施加的应力.《三参数》中的有关论述是错误的, 但从式(7)到式(8)的推导是正确的. 将文献[4 \ II]中的  $\bar{\sigma}$  与文献[1]中的总应力  $\tau_{ij}$  表达式所导出的静水压力  $\bar{\sigma}$  等同起来, 对比各应变量的系数求得  $\alpha$ 、 $M$  表达式, 思路也是正确的. 但是在式(11)  $\bar{\sigma} = \frac{\tau_{ii}}{3}$  之后做  $\zeta \rightarrow \epsilon$  代换时出了推导错误.

将以上错误纠正后《三参数》原文中的思路不变, 所推导的  $\alpha$ 、 $M$  就不再多解(见附录).

另一个错误是理解性的错误.《三参数》原文认为唐应吾(1982)解释的  $\alpha$ 、 $M$  不具有通解性是不正确的. 唐应吾(1982)令骨架拉梅系数为零的目的与得出毕奥理论的  $\alpha$  关系不大.

《三参数》一文还有明显的印刷和效对错误, 如式(7)

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ij} &= 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}((\lambda + \alpha^2 M) - \alpha M \zeta) \\ P_f &= -\alpha M e + M \zeta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中少了  $e$ , 应为下式

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ij} &= 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}((\lambda + \alpha^2 M)e - \alpha M \zeta) \\ P_f &= -\alpha M e + M \zeta \end{aligned} \right\}$$

另外式(9)中的  $\rho$  应该为  $e$ .

## 2 《丁》文中的错误

(1) 《三参数》中明确地将  $C_b$  定义为骨架压缩系数, 这主要是考虑到选用 frame 的  $f$  做为下标会与流体参数的下标相混淆. 并且明确地定义了  $\lambda$ 、 $\mu$  为骨架拉梅系数. 因此在《三参数》中出现  $\frac{1}{C_b} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  是理所当然的. 在本文附录中读者会发现  $C_b$  作为骨架压缩系数也毫无问题. 的确, 本文作者使用的  $C_b$  是指两相多孔介质在排除流体之后单纯固体多孔介质的“固体骨架压缩系数”, 与流体无直接关系, 只与构成固体骨架的固体颗粒及颗粒的排列结构有关. 或者

只与固体材料及这些材料所构成的多孔隙结构有关。

但是,《丁》文中的下段文字,将双相介质的压缩系数与固体骨架压缩系数的概念混淆在一起,应是明显的错误。“这里特别要提到  $C_b$ ,  $C_b$  在拙著《土层波速与地表脉动》第四章第三节曾定义为两相介质压缩系数;其英文含义‘bulk compressibility’,实际上到目前为止国内对此一直都没有用确切的专业名词定义它,有的译为‘块体压缩系数’,有的译为‘体积压缩系数’,有的译为‘松散压缩系数’。但如果把两相介质压缩系数内涵理解为‘两相介质中骨架的压缩系数,两相介质中流体的压缩系数,两相介质中固体的压缩系数’的总称的话,‘bulk compressibility’理解为骨架的压缩系数较好。不过要指出这里的骨架压缩系数是固体多孔介质在流体参与影响下的压缩系数,决不是《三参数》作者所理解的两相多孔介质在排除流体之后单纯固体多孔介质的所谓‘固体骨架压缩系数’”。

从上段文字很难看出  $C_b$  到底是指两相介质压缩系数(固体与流体共同作用,一般直接用  $C$  来表示),还是指骨架压缩系数。在 Biot-Geertsma 理论中,清楚地定义了骨架压缩系数  $C_b$  和固体材料的压缩系数  $C_r$  (在《三参数》中用  $C_s$  表示),它们是双相介质弹性性质的基础参数。如果说  $C_b$  与孔隙中的流体有关,也只能是流体改变了固体骨架的材料性质或结构性质,此时的  $C_b$  便是改变后的骨架压缩系数。那么  $C_b$  仍然单纯是固体骨架的压缩系数。不知《丁》文中所说的  $C_b$  是“流体参与影响下的压缩系数”是什么样的“影响”,什么样的“压缩系数”。《丁》文中“两相介质压缩系数内涵理解为‘两相介质中骨架的压缩系数,两相介质中流体的压缩系数,两相介质中固体的压缩系数’的总称”,是明显的错误。

一般说来,两相介质是指由固体多孔隙骨架与孔隙中的流体共同构成的介质。但是这种材料的体积模量及体积压缩系数  $C$  与排水与否有关,所以它不是基础参数。不少人将双相介质中准静态的纵波速度所对应的体积压缩系数  $C$  就简称为双相介质的压缩系数。双相介质中排除流体就是固体骨架,固体骨架的压缩系数与流体的压缩系数均认为是常数,所以是基本的参数。这是很清楚的,谈不上谁是谁的“总称”,从而混为一谈。

(2)《丁》文中式(30)后的  $\frac{1}{C_b} = K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  式是明显的错误,该文已声明了  $K$  是文献[4]所用的一个参数,见该文式(16)。这个  $K$  不可能等于  $1/C_b$ 。如果  $1/C_b = K_b$ ,  $K_b$  指骨架体积模量倒是的。

(3)值得注意的是,虽然在《丁》文中的式(30)的第二式与《三参数》一文的(9-2)式完全相同,但是《丁》文并没有说清楚式(30)  $P$  前的“-”号是如何而来的。Geertsma(1962)声明他自己的文章中  $P_f$  为孔隙张力,而不是如《丁》文中所称“ $P$  即是孔隙压,Geertsma 称之为‘流体静张力’”。这是明显的错误,二者之间差一负号。如果保留这个“-”号是得不到正确结论的。

(4)《丁》文中式(28)中的  $\sigma_{ii}$  (应为  $\sigma_{ij}$ ) 被认为是“作用于固体物质上的应力,即相当于土力学中的有效应力”是错误的。这里的  $\sigma_{ij}$  是总应力,它可以从式(26)导出,也就是《三参数》中的式(7)与式(8)。笔者在《三参数》中推导式(8)时,明确说明是由式(7)得出,同样说明了式(7)是 Biot(1962)的工作,没有剽窃的嫌疑。《丁》文中称式(28)中的  $\sigma_{ij}$  是有效应力后,又在式(32)称它为总应力,这是难以理解的。

再者,《丁》文推导  $\alpha$ ,  $M$  的过程,仍然沿用《三参数》中原样的思路,没有什么新的内容,读者可以对比。

### 3 结束语

《丁》一文发表后,不少同志对本文作者表示关心,衷心感谢。由于近期工作较忙,答复稍有

拖延. 修正错误就是进步, 作者愿不断地改正自己科研工作中的错误.

## 附录

Biot (1957) 在描述流体的应变时, 将流体平均位移矢量  $U_i$  定义如下: 垂直通过坐标平面单位面积的流体体积为  $\varphi U_i$ . 还定义了平均相对位移 (即流体与固体之间的相对位移) 矢量

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= \varphi (u_i - U_i) \\ \zeta &= \omega_{i,i} = \varphi (e - \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1})$$

Biot (1962) 将双相介质中的应力—应变关系, 写成双相介质中的总应力  $\tau_{ij}$  与应变的关系:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ij} &= 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}((\lambda + \alpha^2 M)e - \alpha M\zeta) \\ P_f &= -\alpha M e + M\zeta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2})$$

Geertsma (1961) 假设对双相介质施加总流体静应力  $\sigma$ , 对孔隙中流相施加流体静应力  $P_f$ , 使固相与流相介质的平均体积应变可分别写如下式

$$e = -(C_b - C_s) P_f + C_b \bar{\sigma} \quad (\text{A3-1})$$

$$\zeta = -\{C_b - (1 + \varphi)C_s + \varphi C_f\} P_f + (C_b - C_s) \bar{\sigma} \quad (\text{A3-2})$$

上式将应力与应变的关系完全用土体系统中具有明确物理性质的参数表示出来, 可改写如下

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} &= \left[ \frac{(1-\beta)^2}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} + \frac{\beta}{C_s} \right] e - \frac{1-\beta}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} \zeta \\ P_f &= \frac{(1-\beta)}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} e - \frac{1}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} \zeta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4})$$

这是 Geertsma (1961) 原文的 8a 及 9a 式. 式中  $\beta = \frac{C_s}{C_b}$ ,  $C_s$  是颗粒的压缩系数;  $C_b$  是骨架的压缩系数  $\left[ \frac{1}{C_b} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \right]$ ;  $C_f$  是流体的压缩系数;  $\zeta$  是 (A1) 式. 由 (A1) 式和

$$\sigma_f = -\varphi P_f \quad (\text{A5})$$

(A4) 式可重写为

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} &= \left[ \frac{(1-\beta-\varphi)(1-\beta)}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} + \frac{\beta}{C_s} \right] e + \frac{(1-\beta)\varphi}{((1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f)} \epsilon \\ \sigma_f &= \frac{-(1-\beta-\varphi)\varphi}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} e - \frac{\varphi^2}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (\text{A6})$$

现在将 Biot 的 (A2) 式对双相介质施加的应力, 也视为流体静应力  $\bar{\sigma} = \frac{\tau_{ij}}{3}$ , 并根据 (A1)、(A5) 式将  $P_f$ ,  $\zeta$  代换为  $\sigma_f$ ,  $\epsilon$ ; 同时, 为了与 Geertsma (1961) 将孔隙张力为正进行比较, 将流体应力改为负值.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} &= \left[ \frac{2}{3}\mu + \lambda + M(\alpha^2 - \varphi\alpha) \right] e + \varphi M \alpha \epsilon \\ \sigma_f &= (\varphi - \alpha) M \varphi e - M \varphi^2 \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (\text{A7})$$

现在能从 (A6) 与 (A7) 式的比较中得到  $\alpha$  与  $M$  的表达式. 令 (A6) 与 (A7) 式  $\epsilon$  前的系数相等, 由  $\bar{\sigma}$  的表达式,

$$\frac{(1-\beta)\varphi}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} = \varphi M \alpha \quad (\text{A8})$$

由  $\sigma_f$  的表达式,

$$\frac{\varphi^2}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} = M \varphi^2 \quad (\text{A9})$$

令 (A6) 与 (A7) 式  $e$  前的系数相等, 由  $\bar{\sigma}$  表达式,

$$\frac{(1-\beta+\varphi)(1-\beta)}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} + \frac{1}{C_b} = \frac{2}{3}\mu + \lambda + M(\alpha^2 - \varphi\alpha) \quad (\text{A10})$$

由  $\sigma_f$  的表达式,

$$\frac{-(1-\beta+\varphi)\varphi}{(1-\varphi-\beta)C_s+\varphi C_f}=(\varphi-\alpha)M\varphi \quad (\text{A11})$$

由(A8)和(A9)式,可直接得出

$$M=\frac{1}{(1-\beta-\varphi)C_s+\varphi C_f} \quad (\text{A12})$$

将(A12)式,代入(A8)式,得

$$\alpha=1-\beta \quad (\text{A13})$$

由(A11)及(A10)式得出

$$\begin{cases} \frac{(1-\beta+\varphi)(1-\beta)}{(1-\varphi-\beta)C_s+\varphi C_f}=M(\alpha^2-\alpha\varphi) \\ \frac{-(1-\beta+\varphi)\varphi}{(1-\varphi-\beta)C_s+\varphi C_f}=(\varphi-\alpha)M\varphi \end{cases} \quad (\text{A11})$$

由上式,又一次得出:

$$\begin{cases} \alpha=1-\beta \\ M=\frac{1}{(1-\varphi-\beta)C_s+\varphi C_f} \end{cases} \quad (\text{A15})$$

### [参考文献]

- [1] Biot M A. The mechanics of deformation and acoustic in porous media[J]. Journal of applied physics, 1962, 33(4): 1482—1498.
- [2] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid—saturated porous solid. I. Low—frequency range[J]. The Journal of the acoustical society of America, 1956, 28: 168—178.
- [3] Biot M A, Willis D G. The elastic coefficients of the theory of consolidation[J]. Journal of applied mechanics, 1957, 24(4): 549—601.
- [4] Geertsma J, Smit D C. Some aspects of elastic wave propagation in fluid—saturated porous solids[J]. Geophysics, 1961, 26: 168—181.
- [5] 刘旭,等. 毕奥理论中 3 个基本参数的显式解[J]. 西北地震学报, 1997, 19(4): 66—70.
- [6] 丁伯阳,等. 关于《毕奥理论中 3 个基本参数显式解》一文的错误[J]. 西北地震学报, 20(4): 94—99.
- [6] 丁伯阳. 土层波速与地表脉动[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1996.

## THE REAL ERRORS IN THE PAPER “MANIFEST EXPRESSIONS OF THREE BASIC PARAMETERS IN BIOT THEORY” ——REPLAYING PROF. DING BEYANG

LIU Xu

(Lanzhou Institute of Seismology, CSB, Lanzhou 730000, China).

**Abstract:** Some errors in the paper “Manifest expressions of three basic parameters in Biot theory” written by the author himself (Northwestern Seismological Journal, Vol. 19, No. 4, 1997) are corrected. These errors do not coincide with what Prof. Ding discussed in the paper “On mistakes about ‘Manifest expressions of three basic parameters in Biot theory’” (Northwestern Seismological Journal, Vol. 20, No. 4, 1998). Meanwhile same concept errors in Prof. Ding’s paper are discussed.

**Key words:** Biot theory; Porous elastic material