

裂隙介质的等效弹性模量

阮爱国, 周民都

(中国地震局兰州地震研究所, 甘肃兰州 730000)

摘要: 详细推导了弹性场的 Eshelby 椭球包体理论, 在此基础上推导了裂隙等效弹性模量的一阶近似式(Hudson 公式). 目的有二, 一是填补国内文献中有关该方面研究的空白; 二是阐明有关公式的来龙去脉及物理意义, 便于正确应用.

主题词: 裂隙; 介质; 弹性模量

中图分类号: P315.3⁺1 文献标识码: A 文章编号: 1000-0844(2000)04-0407-07

0 引言

近 30a 来, 地球介质的各向异性研究越来越显示其重要性, 尤其是 S 波分裂方法及 EDA 模型(广泛扩容各向异性)^[1] 在地震预测、油气田开采等方面得到了广泛的应用. EDA 裂隙模型是当前研究 S 波分裂的基础, 其等效弹性模量公式有许多, 其中 Hudson(1981, 1986) 公式^[2, 3] 应用得最为普遍, 但纵观国内文献发现都是直接应用 Hudson 公式, 其中的 2 个主要参量 σ_{11} 和 σ_{33} 往往令人感到困惑, 当坐标体系变化时, 很容易造成误用, 因此有必要对此加以推导阐述. 注意到 Eshelby(1957) 包体理论^[4] 是 Hudson 公式的重要基础, 本文首先对其进行理论推导, 过程中只给出与 Hudson 公式有关的内容, 对其余内容作了省略. 在此基础上推导了 Hudson 公式的一阶近似表达.

1 Eshelby 椭球包体理论

通过想像的切割、变形、焊接过程, 研究外界力作用下各向同性固体中含有包体(裂隙)时包体内外的应力状态. 推导过程采用张量及其运算约定, 其后不再提示.

1.1 一般包体

首先设想将包体从各向同性体(母体)中切割挖出, 使之经历非应力所致的变形, 应变为 e_{ij}^T , 对应的应力为 $P_{ij}^T = \lambda e^T \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^T$. 其中的 e^T 为体应变, λ, μ 为拉梅常数. 然后在包体表面 S (外法向为 n_i) 作用面力 $-P_{ij}^T n_j$ 使之形状和尺寸复原并将其放回焊接. 这时各向同性体中的应力和应变为零, 并设该状态处于零位移. 再设想包体应力松弛使之无外力作用, 这时包体在表面 S 上对母体的作用力为 $P_{ij}^T n_j$, 产生的实际位移(包括母体和包体)为

$$U_i^C(\vec{r}) = \int_S P_{jk}^T U_j(\vec{r} - \vec{r}') dS_k \quad (1)$$

收稿日期: 2000-03-27

基金项目: 地震科学联合基金课题(198115)

中国地震局兰州地震研究所论著编号: LC 2000037

作者简介: 阮爱国(1963-), 男(汉族), 浙江温岭人, 副研究员, 主要从事地电阻率、地电场理论、弹性波及电磁波各向异性理论研究.

其中的 U_j 为 $\dot{\mathbf{r}}'$ 单位点源 $\vec{F}$ 在 $\dot{\mathbf{r}}$ 点产生的位移, 根据 Love(1927)公式有

$$U_j(\dot{\mathbf{r}}-\dot{\mathbf{r}}')=\frac{F_j}{4\pi\mu\left|\dot{\mathbf{r}}-\dot{\mathbf{r}}'\right|}-\frac{1}{16\pi\mu(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_1}\left|\dot{\mathbf{r}}-\dot{\mathbf{r}}'\right|F_1\tag{2}$$

其中: σ 为泊松比. 相应的应变为 $e_{ij}^C=\frac{1}{2}(U_{i,j}^C+U_{j,i}^C)$. 包体外应力由胡克定律得 $P_{ij}^C=\lambda e^C+2\mu e_{ij}^C$. 而包体内的应力应变之间不满足胡克定律, 可以表示为

$$P_{ij}^I=P_{ij}^C-P_{ij}^T=\lambda(e^C-e^T)\delta_{ij}+2\mu(e_{ij}^C-e_{ij}^T)\tag{3}$$

应用高斯定理及 $\frac{\partial}{\partial x_i}=-\frac{\partial}{\partial x_i}$, 可将式(1)写成

$$U_i^C(\dot{\mathbf{r}}-\dot{\mathbf{r}}')=\frac{1}{16\pi\mu(1-\sigma)}P_{jk}^T\Psi_{,ijk}-\frac{1}{4\pi\mu}P_{ik}^T\varphi_{,k}\tag{4}$$

其中: $\Psi=\int_v\left|\dot{\mathbf{r}}-\dot{\mathbf{r}}'\right|\mathrm{d}v$, $\varphi=\int_v\frac{\mathrm{d}v}{\left|\dot{\mathbf{r}}-\dot{\mathbf{r}}'\right|}$. 可以简单地推得 $\nabla^2\Psi=2\varphi$, 且有

$$\begin{array}{lll}\nabla^2\varphi=-4\pi & \nabla^4\Psi=2\nabla^2\varphi=-8\pi & \text{S 内} \\ \nabla^2\varphi=0 & \nabla^4\Psi=2\nabla^2\varphi=0 & \text{S 外}\end{array}$$

利用上述式子得

$$e^C=U_{i,i}^C=-\frac{1-2\sigma}{8\pi\mu(1-\sigma)}P_{jk}^T\varphi_{,jk}\tag{5}$$

在 S 面内外有

$$\begin{array}{l}\varphi_{,ij}(\text{out})-\varphi_{,ij}(\text{in})=4\pi n_in_j \\ \Psi_{,ijkl}(\text{out})-\Psi_{,ijkl}(\text{in})=8\pi n_in_jn_kn_l\end{array}\tag{6}$$

将式(6)代入式(5)得到紧挨 S 面外的体应变 $e^C(\text{out})$ 与包体内体应变 $e^C(\text{in})$ 的关系为

$$\begin{aligned}e^C(\text{out})&=-\frac{1-2\sigma}{8\pi\mu(1-\sigma)}P_{ij}^T(\varphi_{,ij}(\text{in})+4\pi n_in_j) \\ &=e^C(\text{in})-\frac{(1+\sigma)}{3(1-\sigma)}e^T-\frac{1-2\sigma}{1-\sigma}e_{ij}^Tn_in_j\end{aligned}\tag{7}$$

包体外偏应变 $e_{ij}^C(\text{out})$ 与包体内偏应变 $e_{ij}^C(\text{in})$ 的关系为

$$\begin{aligned}'e_{il}^C(\text{out})&=\frac{1}{2}(U_{i,l}^C(\text{out})+U_{l,i}^C(\text{out}))- \frac{1}{3}e^C(\text{out})\delta_{il}='e_{il}^C(\text{in})+\frac{1}{1-\sigma}'e_{jkn_jn_in_l}^T- \\ &\quad 'e_{ik}^Tn_kn_l-'e_{lk}^Tn_kn_i+\frac{1-2\sigma}{3(1-\sigma)}'e_{jk}^Tn_jn_k\delta_{il}-\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}e^T(n_in_l-\frac{1}{3}\delta_{il})\end{aligned}\tag{8}$$

其中 e^T 与 e_{ij}^T 是非应力过程的体应变和偏应变.

为推导方便, 利用高斯公式将面积分变成体积分, 式(1)可再次改写为

$$U_i^C(\vec{x})=\frac{P_{jk}^T}{16\pi\mu(1-\sigma)}\int_vf_{ijk}(\mathbf{L})\frac{\mathrm{d}v}{r^2}=\frac{e_{jk}^T}{8\pi(1-\sigma)}\int_vg_{ijk}(\mathbf{L})\frac{\mathrm{d}v}{r^2}\tag{9}$$

其中: $r=|\vec{x}|$ 是 $\mathrm{d}v$ 到观测点的距离, $\mathbf{L}=(l_1,l_2,l_3)$ 表示从 $\mathrm{d}v$ 到观测点 $\vec{x}$ 的方向, 且有

$$f_{ijk}(\mathbf{L})=(1-2\sigma)(l_k\delta_{ij}+l_j\delta_{ik})-\delta_{kli}+3l_il_jl_k\tag{10}$$

$$g_{ijk}(\mathbf{L})=(1-2\sigma)(l_k\delta_{ij}+l_j\delta_{ik}-\delta_{kli})+3l_il_jl_k\tag{11}$$

这里的体积分及下面的面积分都是对包体而言的, 不再强调.

1.2 椭球包体

由于 EDA 裂隙其形状被设为扁圆或椭圆, 所以下面只考虑椭球包体. 方便起见, 重新定

义式(9)中的 $(\mathbf{L})=(l, m, n)$, 令 $\mathbf{L}$ 为从观测点到 $d\mathbf{v}$ 的方向, 这样式(9)反号. 首先对一个基本圆锥 $d\omega(\mathbf{L})$ 积分, 圆锥顶在 (x, y, z) 处, 由式(9)得

$$8\pi(1-\sigma)U_i^C(\vec{x})=-e_{jk}^T\int_{4\pi}g_{ijk}(\mathbf{L})r(\mathbf{L})d\omega \quad (12)$$

设椭球包体满足方程 $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$, 则 $r(\mathbf{L})$ 是下列方程的正根

$$\frac{(x+lr)^2}{a^2}+\frac{(y+mr)^2}{b^2}+\frac{(z+nr)^2}{c^2}=1 \quad (13)$$

$$\text{解得} \quad r(\mathbf{L})=-\frac{f}{g}+(\frac{f^2}{g^2}+\frac{e}{g})^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

其中

$$\begin{cases} g=\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2} \\ f=\frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}+\frac{nz}{c^2} \\ e=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} \end{cases} \quad (15)$$

引入 $\lambda_1=\frac{l}{a^2}$, $\lambda_2=\frac{m}{b^2}$, $\lambda_3=\frac{n}{c^2}$, 且将 (x, y, z) 表示为 $x_m(m=1, 2, 3)$, 将式(14)代入式(12)得

$$U_i^C(\vec{x})=\frac{e_{jk}^Tx_m}{8\pi(1-\sigma)}\int_{4\pi}\frac{\lambda_mg_{ijk}}{g}d\omega \quad (16)$$

由此得到受限制应变 $e_{il}^C(\vec{x})$ 与非应力所致的应变 e_{il}^T 的关系为

$$e_{il}^C(\vec{x})=\frac{e_{jk}^T}{16\pi(1-\sigma)}\int_{4\pi}\frac{\lambda_lg_{jik}+\lambda_lg_{ijk}}{g}d\omega\equiv S_{ilmn}e_{mn}^T \quad (17)$$

由问题的对称性知道式(17) S_{ilmn} 中膨胀与剪切耦合的分量(S_{1112} , S_{1123} , S_{2311} , ..., 等)为零, 剪切与剪切耦合的分量(S_{1223} , ..., 等)也为零. 也就是当式(17)积分中 l, m, n 在被积函数中成奇次方时积分为零. 根据 Routh(1982) 将上述面积分化成简单的定积分得

$$\begin{cases} S_{1111}=Qa^2I_{aa}+RI_a \\ S_{1122}=Qb^2I_{ab}-RI_a \\ S_{1212}=Q\frac{a^2+b^2}{2}I_{ab}+R\frac{I_a+I_b}{2} \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{其中} \quad Q=\frac{3}{8\pi(1-\sigma)}, \quad R=\frac{1-2\sigma}{8\pi(1-\sigma)} \quad (19)$$

$$\begin{cases} I_a=\int_{4\pi}\frac{l^2}{ga^2}d\omega=2\pi abc\int_0^\infty\frac{du}{(a^2+u)\Delta} \\ I_{aa}=\int_{4\pi}\frac{l^4}{ga^2}d\omega=2\pi abc\int_0^\infty\frac{du}{(a^2+u)^2\Delta} \\ I_{ab}=\int_{4\pi}\frac{l^2m^2}{ga^2b^2}d\omega=\frac{2}{3}\pi abc\int_0^\infty\frac{du}{(a^2+u)(b^2+u)\Delta} \\ I_b=\int_{4\pi}\frac{m^2}{gb^2}d\omega=2\pi abc\int_0^\infty\frac{du}{(b^2+u)\Delta} \\ \Delta=(a^2+u)^{\frac{1}{2}}(b^2+u)^{\frac{1}{2}}(c^2+u)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (20)$$

其余不为零的 S_{ilmn} 可以根据式(18)对 $(1, 2, 3)$ 、 (a, b, c) 和 (l, m, n) 循环求得. 将 I_a 、 I_b 和 I_c 作为单位密度椭球内的牛顿势的系数, 即

$$\varphi = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)I_a + \frac{1}{2}(b^2 - y^2)I_b + \frac{1}{2}(c^2 - z^2)I_c$$

根据(Kellogg, 1929)得

$$\begin{cases} I_a = \frac{4\pi abc}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}(F - E) \\ I_c = \frac{4\pi abc}{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}b}{ac} - E\right) \end{cases} \quad (21)$$

并有如下关系

$$\begin{cases} I_a + I_b + I_c = 4\pi \\ I_{aa} + I_{ab} + I_{ac} = \frac{4\pi}{3a^2} \\ a^2 I_{aa} + b^2 I_{ab} + c^2 I_{ac} = I_a \end{cases} \quad (22)$$

其中: $F = F(\theta, k)$ 和 $E = E(\theta, k)$ 分别是第一、第二类幅度模量的椭圆积分, 且有

$$\theta = \sin^{-1}\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad k = \frac{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

这样可先由式(21)求 I_a 和 I_c , 再由下面的式子求其余量(注意下标的循环). 当 $a > b > c$, 有

$$I_b = 4\pi - I_a - I_c \quad (24)$$

$$I_{ab} = \frac{I_b - I_a}{3(a^2 - b^2)} \quad (25)$$

$$I_{ac} = \frac{I_c - I_a}{3(a^2 - c^2)} \quad (26)$$

$$I_{aa} = \frac{4\pi}{3a^2} - I_{ab} - I_{ac} \quad (27)$$

对于扁球, $a = b > c$, 有

$$I_a = I_b = \frac{2\pi a^2 c}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{\cos^{-1} \frac{c}{a} - \frac{c}{a}\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \quad (28)$$

$$I_{aa} = \frac{4\pi}{3a^2} - I_{ab} - I_{ac} \quad (29)$$

$$I_{aa} = 3I_{ab} \quad (30)$$

$$I_{bc} = I_{ac} = \frac{I_c - I_a}{3(a^2 - c^2)} \quad (31)$$

下面我们来考察在均匀外应变 e_{ij}^A 作用下含有包体的均匀弹性介质中产生的应变问题. 根据前面的推导得包体内应变为

$$\begin{cases} e = e^C + e^A \\ 'e_{ij} = 'e_{ij}^C + 'e_{ij}^A \end{cases} \quad (32)$$

包体内应力与应变不满足胡克定律, 包体内应力为

$$\begin{cases} P = 3k(e^C + e^A - e^T) \\ 'P_{ij} = 2\mu('e_{ij}^C + 'e_{ij}^A - 'e_{ij}^T) \end{cases} \quad (33)$$

其中: $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$, μ , 为包体外弹性体的模量. 设包体的弹性常数为 $k_1 = \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1$, μ_1 , 使包体表面力和位移连续, 得

$$\begin{aligned} k_1(e^C + e^A) &= k(e^C + e^A - e^T) \\ \mu_1({}'e_{ij}^C + {}'e_{ij}^A) &= \mu({}'e_{ij}^C + {}'e_{ij}^A - {}'e_{ij}^T) \end{aligned} \quad (34)$$

现在的问题是如何由 e_{ij}^A 来求取 e_{ij}^T , 而 $e_{ij}^C = S_{ijkl}e_{kl}^T$ 可以在式上消去. 式(34) 看上去简单, 实际上复杂, 这是因为 e^C 和 $'e_{ij}^C$ 同时依赖于 e^T 和 e_{ij}^T , 但对于剪切分量而言, 可以直接求解, 这是因为 S_{ijkl} 对于不同剪切分量是解耦的. 由式(34)得

$$e_{13}^T = \frac{\mu - \mu_1}{2(\mu - \mu_1)S_{1313} + \mu} e_{13}^A \quad (35)$$

由式(18)、(22)和(28)对于扁球可以推得

$$S_{1313} = \frac{1}{2} - \frac{2 - \sigma}{8(1 - \sigma)} \frac{\pi c}{a} \quad (36)$$

将式(35)及式(36)代入式(32)中的第2式, 并利用式(34)中的第2式及胡克定律(这时采用包体自身的弹模, 胡克定律成立)推得扁球包体内应力 σ_{13}^I 与外场远处应力 ($\sigma_{13}^\infty = \sigma_{13}^A$) 之间的关系为

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^I &= \mu_1(e_{13}^C + e_{13}^\infty) = 2\mu_1 \frac{\mu e_{13}^T}{\mu - \mu_1} = \frac{\mu_1 \sigma_{13}^\infty}{2(\mu_1 - \mu)S_{1313} + \mu} \\ &= \sigma_{13}^\infty [1 + \frac{\pi}{4} (\frac{c^I \mu}{a \mu_1}) (\frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu})]^{-1} \end{aligned} \quad (37)$$

在上面推导过程中假定 $a \gg c$, 且利用泊松比与拉梅常数的关系式 $\frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{2 - \sigma}{1 - \sigma}$. 同理可以得到关于其它剪切分量类似式(37)的表达式.

另一方面求解正应变分量 e_{11}^T 、 e_{22}^T 和 e_{33}^T 时必须同时解3个方程

$$(\lambda_1 - \lambda)S_{mnpq}e_{pq}^T + 2(\mu_1 - \mu)S_{ijpq}e_{pq}^T + \lambda e^T + 2\mu e_{ij}^T = (\lambda_1 - \lambda)e^A + 2(\mu_1 - \mu)e_{ij}^A \quad (38)$$

其中: $ij = 11, 22, 33$. 关于 pq 求和只出现 e_{11}^T 、 e_{22}^T 和 e_{33}^T , 因为 S_{1112} 等耦合项为零. 经推导得

$$\sigma_{33}^I = \sigma_{33}^\infty [1 + \frac{c^I \pi}{a(k_1 + \frac{4}{3}\mu_1)} (\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu})]^{-1} \quad (39)$$

所得到的式(37)和式(39)将在下面 Hudson 公式推导中被引用.

2 Hudson 一阶近似公式

Hudson 公式其实质将裂隙(其中可含流体)介质弹性模量作了等效性处理, 不再考虑介质的两相性, 目的是考察剪切模量或 S 波对孔隙流体的反应, 而传统的两相介质 Biot 理论中剪应力与孔隙流体压力是解耦的, 不利于研究 S 波分裂现象. 若考虑平面谐波在含裂隙的弹性体中传播, 则

$$u = b \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t) \quad (40)$$

假定裂隙为扁圆(或扁椭圆), 半径为 a , 并呈稀疏分布(使裂隙之间无相互作用), 数量密度为 ν , 即裂隙密度为 γa^3 , 且远小于 1. 将式(40)代入弹性几何方程和运动方程

$$\frac{\partial \sigma_{ip}}{\partial X_p} = C_{ipjq} \frac{\partial^2 u_{jq}}{\partial X_p \partial X_q} \quad C_{ipjq} \frac{\partial^2 u_{jq}}{\partial X_p \partial X_q} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \hat{q}_j \quad (41)$$

得平均场运动方程(关于裂隙密度取一阶近似)

$$b_j[\rho\omega^2\hat{q}_j-(C_{ipjq}^0+C_{ipjq}^1)k_pk_q]\exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})=0\tag{42}$$

其中: ω 为圆频率, ρ 介质密度. C_{ipjq}^0 是无裂隙的弹性模量, 可表达为

$$C_{ipjq}^0=\lambda\hat{q}_p\hat{q}_q+\mu(\hat{q}_j\hat{p}_q+\hat{q}_q\hat{p}_j)\tag{43}$$

而 C_{ipjq}^1 是弹性模量的一阶修正. 根据(Hudson, 1980), 并假设裂隙法面向为 x_3 得

$$C_{ipjq}^1=-\frac{\nu a^3}{\mu}C_{13ip}^0C_{m3jq}^0U_{lm}(ka)\tag{44}$$

其中

$$U_{lm}(ka)=\frac{1}{a^2}\int_{\Sigma}U_{lm}[\exp(i\vec{k}\cdot\vec{x});\vec{x}]\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x})dS_X\tag{45}$$

式(45)的积分是关于裂隙面 Σ 上所有的 $\vec{x}=(x_1,x_2,0)$, 并设半径为 a 扁裂隙中心位于原点. 这里的 $U_{lm}[\exp(i\vec{k}\cdot\vec{x});\vec{x}]$ 其物理意义是: m 方向上施加幅度为 $\exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})$ 的牵力在裂隙面二侧造成位移不连续的 l 方向分量的 $\frac{\mu}{a}$ 倍. 注意到弹性模量 4 阶张量与 2 阶张量下标之间有如下关系

$$C_{ij}\rightarrow C_{ijkl}:$$

$1\rightarrow 11, 2\rightarrow 22, 3\rightarrow 33,$ $4\rightarrow 23(32), 5\rightarrow 13(31), 6\rightarrow 12(21)$

展开式(44), 根据问题的对称性($U_{11}=U_{22}$) 推得

$$C^1=-\frac{\nu a^3}{\mu}\left[\begin{array}{cccccc}\lambda^2U_{33}&\lambda^2U_{33}&\lambda(\lambda+2\mu)U_{33}&0&0&0\\ \lambda^2U_{33}&\lambda^2U_{33}&\lambda(\lambda+2\mu)U_{33}&0&0&0\\ \lambda(\lambda+2\mu)U_{33}&\lambda(\lambda+2\mu)U_{33}&\lambda(\lambda+2\mu)^2U_{33}&0&0&0\\ 0&0&0&2\mu^2U_{11}&0&0\\ 0&0&0&0&2\mu^2U_{11}&0\\ 0&0&0&0&0&0\end{array}\right]\tag{46}$$

这样就将求解等效弹性模量 $C=C^0+C^1$ 变成求解 U_{11} 和 U_{33} . 为此下面求解无限远作用一均匀剪力 σ_{13}^∞ 在裂隙(含某种弱物质)界面 x_1 方向产生位移阶跃 U_{11} . 先假设裂隙内应力 ϵ'_{13} 作为剪切力作用于一个半径为 a 的圆盘求其位移, 然后使孔隙内应力为零, 外界力变为 $\sigma_{13}^\infty-\sigma'_{13}$ 求位移, 二者之差即为裂隙面两侧位移阶跃^[5]

$$U_{11}(1,r)=\frac{8}{\pi}(\frac{\lambda+2\mu}{3\lambda+4\mu})(1-\frac{r^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}(1-\frac{\sigma'_{13}}{\sigma_{13}^\infty})\tag{47}$$

其中: $r^2=x_1^2+x_2^2$. 将式(37)代入得

$$U_{11}(1,r)=\frac{8}{\pi}(\frac{\lambda+2\mu}{3\lambda+4\mu})(1-\frac{r^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}(1+M)^{-1}\tag{48}$$

其中

$$M=\frac{4}{\pi}(\frac{a\mu_1}{d\mu})(\frac{\lambda+2\mu}{3\lambda+4\mu})\tag{49}$$

将式(48)代入式(45)积分(裂隙中心位于原点)得

$$U_{11}\equiv U_{11}(0)=\frac{16}{3}(\frac{\lambda+2\mu}{3\lambda+4\mu})(1+M)^{-1}\tag{50}$$

同理有

$$U_{33}(1,r)=\frac{2}{\pi}(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu})(1-\frac{r^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}(1-\frac{\sigma'_{33}}{\sigma_{33}^\infty})\tag{51}$$

将式(39)代入得

$$U_{33}(1,r)=\frac{2}{\pi}(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu})(1-\frac{r^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}(1+K)^{-1}\tag{52}$$

其中
$$K = \frac{1}{\pi} \left[\frac{a(k_1 + \frac{4}{3}\mu_1)}{c^\mu} \right] \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right) \tag{53}$$

将式(52)代入式(45)积分得

$$\mathcal{U}_{33} \equiv \mathcal{U}_{33}(0) = \frac{4}{3} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right) (1 + K)^{-1} \tag{54}$$

如果裂隙含饱和流体, 近似地有 $M \rightarrow 0, K \rightarrow \infty$, 由上述式子得到

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{11}(0) &= \frac{16}{3} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 4\mu} \right) \\ \mathcal{U}_{33}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{55}$$

如果裂隙是干的, 则有, $M \rightarrow 0, K \rightarrow 0$, 从而上述式子变为

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{11}(0) = \frac{16}{3} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 4\mu} \right) \\ \mathcal{U}_{33}(0) = \frac{4}{3} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right) \end{cases} \tag{56}$$

至此我们得到了扁圆裂隙的等效弹性模量的一阶近似. 关于二阶近似的推导可以参见文献[3]. 要强调的是, 将上述 $\mathcal{U}_{11}$ 和 $\mathcal{U}_{33}$ 代入式(46)求 EDA 裂隙弹性模量时, 要注意前提条件是裂隙面法向为 x_3 轴(或 z 轴), 而实用的 EDA 裂隙模型^[6] 是由扁圆裂隙定向排列造成的方向各向异性模型, 其对称轴是水平向的, 即裂隙面法向为水平向 x 轴或 y 轴之一, 它与以 z 轴为对称轴的横向各向同性不同, 因此需要对式(46)进行改写, 这里不再赘述.

[参考文献]

[1] Crampin S, Evans R, Atkinson B K. Earthquake prediction: a new physical basis[J]. Geophys. J. R. astr. Soc., 1984, 76: 147—156.

[2] Hudson J A. Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks[J]. Geophys., J. R. astr. Soc., 1981, 64: 133—150.

[3] Hudson J A. A higher order approximation to the wave propagation constants for a cracked solid[J]. Geophys., J. R. astr. Soc., 1986, 87: 265—274.

[4] Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems[J]. Proc. R. Soc., 1957, (A241): 376—396.

[5] Garbin H D, Knopoff L. The compressional modulus of a material permeated by a random distribution of circular cracks[J]. Q. Appl. Math., 1973, 30: 453—464.

[6] Crampin S. Effective anisotropic elastic constants for wave propagation through cracked solids[J]. Geophys. J. R. astr. Soc., 1984, 76: 135—145.

[7] Crampin S. Seismic-wave propagation through a cracked solid: polarization as a possible dilatancy diagnostic[J]. Geophys. J. R. astr. Soc., 1978, 53: 467—496.

EFFECTIVE ELASTIC MODULUS OF CRACKED MEDIA

RUAN Ai-guo, ZHOU Min-du

(Lanzhou Institute of Seismology, CSB, Lanzhou 730000, China)

Abstract: Eshelby's theory of elastic field containing elliptic inclusion is derived in detail and the effective elastic modulus of cracked media(the first order of Hudson equation) is derived based on Eshelby theory. The purpose is to complement the Chinese documents in this field and to illustrate the basis and meanings of relative equation for further correct application.

Key words: Crack; Media; Elastic modulus