第19卷 第2期
1997年6月
西北地震学报
NORTHWESTERN SEISMOLOGICAL JOURNAL
Vol.19 No.2
June 1997

27-33

大地电磁二维对称各向异性介质的有限元数值模拟

P631.322
P631.325

杨长福
(国家地震局兰州地震研究所，兰州 730000)

摘要 假定垂直轴为二维对称各向异性介质主轴之一，构造走向与另一主轴方向成任一夹角，用伽勒金(Galerkin)有限元法和矩形网格，优化地合成总体刚度矩阵，使二维各向异性介质的基本方程形成有限元代数方程组，求出各节点场值，并利用MOM法求出辅助场，进而求出张量阻抗等响应函数. 同时还对有关文献的计算模型进行了数值模拟检验.

主题词：大地电磁测深 各向异性介质 有限元 数值模拟

1 引言

目前大地电磁正反演解释都是在电性各向同性介质的基础上实现的，但由于地球构造应力场、地球介质形变带、岩石裂隙、孔隙水及地质沉积等因素造成地球介质各向异性(包括电导率各向异性). 近年来随着观测技术的发展，已获得的大量地球观测资料证实地球介质普遍存在着各向异性. 若用各向同性介质模型去拟合解释各向异性介质资料，势必产生很大误差，甚至使解释结果误入歧途. 因此，要对MT各向异性介质资料作出正确的正反演解释，就必须对各向异性介质模型进行数值模拟，求取其大地电磁响应函数.

大地电磁二维各向异性介质模型的正演计算一般都得不到解释解，必须借助于数值模拟方法. 国内外有关一般化的MT二维各向异性问题研究的报导很少，有代表性的是I.K.Reddy等采用任意四边形单元、双线性插值，并利用伽勒金加权余量有限元法导出有限元方程，进而求出响应函数；但由于在形成有限元方程时的单元刚度矩阵未作优化处理，致使方程求解时，需存储的数据量过大，另外所使用的边界条件和任意四边形单元都增加了计算的复杂性和计算量，这些都使其难以进入实际应用.

本文在Reddy等工作结果的基础上，进一步分析研究了二维各向异性情形下的基本方程. 为极大地减小计算的复杂性和计算量，采用了矩形单元网格和比Reddy所采用的更为简单而又不太影响计算精度的边界条件. 更重要的是我们将优化所形成的有限元方程中的总体刚度矩阵数据存储量减少到最低限度，使得计算可以在一般微机上进行，完全可以方便地进行实际应用. 另外我们还讨论了W.L.Rody在二维各向同性介质数值模拟时为计算辅助场所提出的MOM法并探索性地将其推广到二维各向异性介质模型的辅助场计算中.

收稿日期：1996-04-30

作者简介：杨长福，男，1965年11月生，硕士研究生，现主要从事大地电磁二维正反演研究.

2 基本方程

对于平面电磁波，时间因子取为 $e^{-i\omega t}$，则在二维各向异性介质中的麦克斯韦方程为：

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \tag{1}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} - i\omega\varepsilon\vec{E} \tag{2}$$

$$\vec{J} = [\sigma_{ij}]\vec{E} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{3}$$

其中 $\vec{E}$ 为电场，$\vec{H}$ 为磁场，ε 为介电常数，μ 为磁导率，$\vec{J}$ 为电流密度，$[\sigma_{ij}]$为电导率张量. 设测量坐标系 z 轴与各向异性主轴 3 方向一致，垂直向下，x 轴平行于构造走向，主轴 1 与 x 轴成任一夹角，则电导率张量为：

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{4}$$

由于场沿 x 方向不变化，所以由(1)、(2)、(3)、(4)式可得如下两个方程：

$$\frac{1}{k_{33}}\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{1}{k_{22}}\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \frac{\sigma_{21}}{k_{22}}\frac{\partial E_x}{\partial z} + i\omega\mu H_x = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\sigma_{12} i\omega\mu}{k_{22}}\frac{\partial H_x}{\partial z} + g_{11}E_x = 0 \tag{6}$$

其中 $k_{22} = \sigma_{22} - i\omega\varepsilon, k_{33} = \sigma_{33} - i\omega\varepsilon, g_{11} = i\omega\mu\sigma_{11} + \omega^2\mu\varepsilon - \sigma_{12}\sigma_{21}i\omega\mu/k_{22}$，当介质为各向同性时，$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}, \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$，上面两式完全等同于二维均匀介质的 H 极化和E 极化方程，各向异性主轴平行于构造方向时有 $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$，但 $\sigma_{11} \neq \sigma_{22} \neq \sigma_{33}$，上面两个方程可独立求解，完全相似于二维各向同性介质中的 E 极化和H 极化方程的求解，此处不赘述. 本文考虑的是一般对称二维各向异性介质 $\sigma_{12} = \sigma_{21} \neq 0$，此时为了使用伽勒金有限元法求解方程(5) 和(6)，我们将整个区域划分成若干矩形小单元网格，在每个网格中进行双线性插值，这样对第 k 个 单元有：

$$H_x = [1, y, z, yz][\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]^T = [\varphi_i][\alpha_i] \tag{7}$$

$$E_x = [1, y, z, yz][\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]^T = [\varphi_i][\beta_i] \tag{8}$$

E_x、H_x 分别为单元内任意点上的电磁场沿 x 方向的分量值. 在第 k 个单元上的 4 个 节点有：

$$[H_{xi}] = [C][\alpha_i] \tag{9}$$

$$[E_{xi}] = [C][\beta_i] \tag{10}$$

其 中 H_{xi}、E_{xi} 分别是第 k 个单元 4 个节点上的磁场分量值，$[H_{xi}] = [H_{x1} H_{x2} H_{x3} H_{x4}]^T$，$[E_{xi}] = [E_{x1} E_{x2} E_{x3} E_{x4}]^T$，$[C]$ 是由 4 个节点座标依次按$[\varphi_i] = [1, y, z, yz]$ 排成的 4 阶矩阵. 分别将(9) 和(10) 式代入(7) 和(8) 式中 得：

$$H_x = [\varphi_i][C]^{-1}[H_{xi}] = [N_i][H_{xi}] \tag{11}$$

$$E_x = [\varphi_i][C]^{-1}[E_{xi}] = [N_i][E_{xi}] \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{12}$$

其中 $[N_i] = [N_1, N_2, N_3, N_4] = [\varphi_i][C]^{-1}$ 是座标 y、z 的函数，称为形函数. 这样对内部任一单元，在对称各向异性条件 $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ 的情况下，利用伽勒金的加权余量有限元法对方程(5) 和(6) 进行求解，可得下列矩阵形式的方程：

$$\begin{bmatrix} [S_{ji}] & [T_{ji}] \\ [T_{ij}] & [V_{ji}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [H_{xi}] \\ [E_{xi}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \end{bmatrix} \tag{13}$$

其中

$$[S_{ji}] = \int V[\frac{-1}{k_{33}} \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} - \frac{1}{k_{22}} \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} + \mathrm{i}\omega\mu N_j N_i]\mathrm{d}V$$

$$[V_{ji}] = \int V \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}[-\frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} - \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} + g_{11} N_j N_i]\mathrm{d}V$$

$$[T_{ji}] = \frac{\sigma_{12}}{k_{22}} \int V[N_i \frac{\partial N_j}{\partial z}]\mathrm{d}V$$

对于整个区域里每一个单元(如果不考虑边界单元上的边界条件),都可得到形式如式(13)的方程,把这些方程组合到一起,就可得到一个矩阵方程组:

$$[K][V] = [0] \tag{14}$$

其中$[K]$是一个2n×2n阶的大型对称稀疏带状的复数总体刚度矩阵,n是整个区域的节点总数,$[V]$是每个节点的场分量所组成的一维列矢量,加上适当的边界条件,就可得到每个节点的场分量H_x和E_x,再根据麦克斯韦方程组求得其它场分量.

3 边界条件及有限元数值模拟过程的实现

与二维各向同性介质非常相似,我们将侧边界取在离横向非均匀构造足够远的地方,一般离非均匀构造3~4个趋肤深度.在这样的侧边界上,电磁场不受非均匀构造的影响,场分量的法向偏导数为0,不影响方程求解.底部边界如果取得足够深的话,电磁场将衰减到近似为0,也不影响方程求解.由于受横向非均匀性构造的影响,空气中必须引进一相当厚度的空气层,使得空气层厚度足够大,以致横向非均匀性所产生的二次场在空气层顶部趋近于0.在这种情况下,空气层顶部的电场分量E_x及其对厚度的偏导数$H_y = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z}$可视为常数.对于磁场分量$H_x$,由麦克斯韦方程组可得$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \sigma_{21}E_x + k_{22}E_y$和$\frac{\partial H_x}{\partial y} = k_{33}E_z$.在整个空气中电导率近似于0,$k_{22} = \sigma_{22} - \mathrm{i}\omega\epsilon \approx -\mathrm{i}\omega\epsilon$,$k_{33} = \sigma_{33} - \mathrm{i}\omega\epsilon = -\mathrm{i}\omega\epsilon$,所以在可以忽略位移电流的

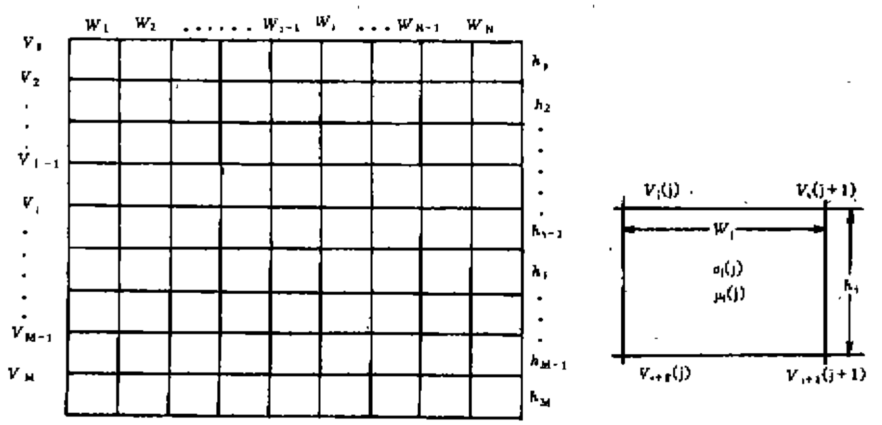

图1 矩形单元网格划分

Fig.1 The distribution of the rectangular elements.

情况下，$\frac{\partial H_x}{\partial z} \approx \mathrm{i}\omega\varepsilon E_y \approx 0$，$\frac{\partial H_x}{\partial y} = \mathrm{i}\omega\varepsilon E_z \approx 0$，因此 H_x 在空气中可视为常数. 综上所述，在外部边界上只有空气顶部的边界条件才影响方程(14)的结构. 在本文中我们在空气顶部取 H_x 和 H_y 为常数作为上边界条件，因此为了求出各节点的 H_x 和 E_x，只要将上边界条件代入方程(14)求解即可.

为了实现上述分析过程，需编制出有效的计算机程序. 我们将整个区域划分成如图1所示的 M×N 个矩形单元网格，设每个网格宽度分别为 $W_1, W_2, W_3, \cdots, W_N$，厚度分别为 $h_1, h_2, h_3, \cdots, h_M$. 对以(i,j)、(i,j+1)、(i+1,j)、(i+1,j+1)为节点的第k个单元，可以算出$[\alpha_i]$和$[\beta_i]$，再由 $H_x = [N_i][H_{xi}]$ 和 $E_x = [N_i][E_{xi}]$ 求出$[N_i]$为：

$$[N_i] = [1 - \frac{y}{w_j} - \frac{z}{h_i} + \frac{yz}{w_j h_i}, \frac{y}{w_j} - \frac{yz}{w_j h_i}, \frac{z}{h_i} - \frac{yz}{w_j h_i}, \frac{yz}{w_j h_i}]$$

由(13)式可求出$[S_{ji}]$、$[T_{ji}]$、$[V_{ji}]$，形成单元刚度矩阵. 为了节省计算机内存，减少总体刚度矩阵必须存储的内存量，我们在形成总体刚度矩阵时对方程进行优化，使得总体刚度矩阵的半带宽度由优化前的(M+1)(N+1)+N+3减少到2N+6. 另外考虑到总体刚度矩阵的阶数很大，所需要的计算机内存也很大，一般微机没有足够的内存将方程一次解出，因此我们根据所使用的计算机的内存量，对方程进行分块求解. 显然，计算机内存越大分块越少，求解速度越快. 由于刚度矩阵是稀疏对称带状矩阵，我们只存储上三角或下三角部分的半带宽里的元素，也可大大减少计算机内存. 这样，一般微机就能很快地完成数值模拟的计算.

4 辅助场及张量阻抗等响应函数的求取

为了计算张量阻抗、倾子、偏离度和椭率等响应函数，就必须求出其它场分量 E_y、E_z 和 H_y、H_z，这在理论上可以从麦克斯韦方程组中求出. 比较简单的方法是用矩形单元剖分的有限元法进行计算，利用插值函数求出 H_x 和 E_x 对 y、z 的偏导数. 由于采用的是双线性插值，显然这些偏导数只有在单元中央处最为准确，而在单元底部及顶部误差很大. 我们在选择求取 E_y、H_y、E_z、H_z 等辅助场的方法前，对二维各向同性介质有限元数字的一些辅助场的求法进行了检验. 检验表明，用线性插值法或者二次插值法很难求得较精确的辅助场数值解. 因此我们对徐世浙在《地球物理中的有限元法》中介绍的三次插值法进行了检验，发现用这种方法求得的均匀各向同性介质的辅助场可以达到足够的精度. 同时还与用 W.L.Rody 提出的 MOM 法求出的辅助场进行了对比，发现《大地电磁测深法》中所介绍的 MOM 法在求解 E_y 时，得到了不合理的结果. 因此我们对用于均匀各向同性介质的 MOM 法进行了讨论和研究，这种方法求的是满足边界条件的$\frac{\partial H_x}{\partial z}$和$\frac{\partial E_x}{\partial z}$，即：

$$\vec{g}_i = [M_i]^{-1}([A_i]\vec{V}_i + [B_i]\vec{V}_{i+1}) \tag{15}$$

其中 $\vec{g}_i$ 表示x方向场分量对z的偏导数，$[A_i]$和$[B_i]$是总体刚度矩阵中由第i行网格所合成的矩阵块，$\vec{V}_i$ 和 $\vec{V}_{i+1}$ 分别表示由第i行和第i+1行节点上的x方向场分量值所构成的N阶列矢量，N为水平网格数，$[M_i]$是(N+1)×(N+1)阶对称三对角方阵. 这种方法的优点是提高了计算精度，所计算的 E_x 和 H_y 自然地满足边界条件. 为了使这种方法能够有效地求出 E_y，我们对 MOM 法中的 $\vec{g}_i$ 进行了重新定义，并修改了$[M_i]$的结构，重新检验了各向同性介质的辅助场的计算，取得了与三次插值法一致的结果. 然后我们参照这种修改后的 MOM 法，按各向异性介质情况，构制出$[M_i]$、$[A_i]$和$[B_i]$等矩阵，再按(15)式，即可求出辅助场 E_y 和 H_y.

我们最后又分别用三次插值法和 MOM 法对各向异性介质的辅助场进行了初步模拟试验，发现用三次插值法求出的辅助场误差很大，而用 MOM 法，则效果良好，尤其是 H_y 的计算达到了足够的精度. 要计算响应函数，就须考虑到在地球表面上有关系式

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} \tag{16}$$

为了求出张量阻抗元素 Z_{xx}、Z_{xy}、Z_{yx}、Z_{yy}，就必须求出两组独立的 E_x、E_y、H_x、H_y. 因此我们必须改变场源，重复上述过程，计算出两组独立的场值，求出张量阻抗元素，进而求出其它响应函数.

5　数值模拟实例及模拟结果的检验

为了检验我们所作的数值模拟分析的正确性，首先把一个二维各向异性介质模型退化为一个二维各向同性介质模型进行数值模拟，并与用现有的二维各向同性介质模型的数值模拟程序对同一模型进行模拟的结果进行了对比，取得了一致的结果，其正确性得到了初步的验证. 为了进一步验证对二维各向异性介质模型进行数值模拟的正确性，我们对 I.K. Reddy 和 D.Rankin(1975)用过的模型(图 2)进行了模拟. 我们采用完全相同的模型、网格数和周期(10s)，而且所使用的两次场源也与文献中使用的两次场源完全一样，即第一次场源为 $H_x = (1.0, 0.5)$、$H_y = (1.2, 0.0)$，第二次场源为 $H_x = (1.0, 0.0)$、$H_y = (1.0, 0.0)$；所不同的是我们所划分的单元是矩形单元，而文献中采用的是任意四边形单元.

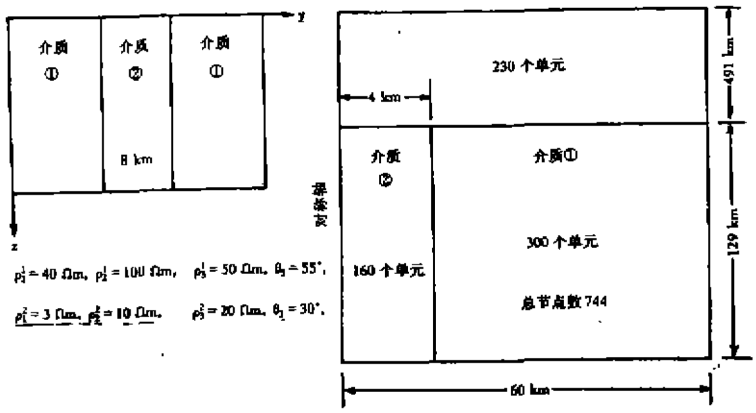

图 2　横向非均匀和各向异性介质模型

Fig.2　The model of laterally inhomogeneous and anisotropic media.

图 3 是我们用第一次场源模拟出来的结果，图 4 是文献中相应的结果. 由图 3 和图 4 相比较可知，两个 E_x 的幅度和相位几乎完全一样，我们计算出的 H_x 恒为常数(1.0, 0.5). 这与我们预先分析的结果及文献中得到的结果完全一致，因此，图中未绘出它的曲线. 这说明我们在数字模拟过程中，E_x、H_x 两个场值的计算完全正确. 我们得到的辅助场 H_y 与文献中所得到的 H_y 相比，大小基本一致，但相位有点区别，而总的变化趋势却保持一致. 我们得到的 E_y 与文献中的 E_y 相比，总的变化趋势基本一致，但构造附近差别较大，致使我们所得的响应函数张量阻抗及张量视电阻率不可能与文献中完全一样，有许多问题还需要讨论和研究.

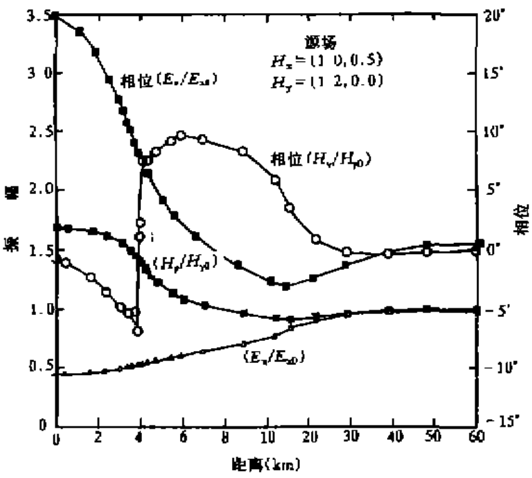

图3 E_x、H_y 的大小和相位(周期 10 s)，E_{x0}、H_{y0} 分别表示 60 km 深处的电场值和磁场值，横轴表示右半部分对模型对称轴的距离.

Fig.3 Amplitudes and phase of E_x and H_y for a 10－sec period. E_{x0} and H_{y0} are respectively the electric and magnetic fields at depth of 60 km.

6 结论及讨论

我们利用有限元法对二维对称各向异性介质模型进行数值模拟时，主要作了以下几项工作：①在 Reddy 等人研究的基础上，进一步探讨了由麦克斯韦方程组所形成的二维各向异性介质情形下的基本方程，并导出了非对称各向异性介质情形下的基本方程.采用了与 Reddy 有所不同的单元剖分方法(即剖分成矩形单元)，这比任意四边形剖分法减少了计算量并降低了程序设计的复杂程度，实用可行.在应用伽勒金有限元法形成刚度矩阵时，对总体刚度矩阵的构制进行了优化，使得总体刚度矩阵的阶数大大地减少了，并采用了一维压缩存储法，节省了大量的计算机内存，使得我们在一般的小型微机上进行数值模拟成为现实.采用了比 Reddy 更为容易编制程序而又不太影响计算精度的边界条件.引入了 W.L.Rody 在二维各向同性介质中计算辅助场时提出的 MOM 法，并进行了适当的修改，取得了初步效果.在进行这些工作的基础上，独立编制了整个数值模拟过程的计算机程序，实现了二维各向异性介质模型的有限元数值模拟.然而由于时间及其它各种原因，还存在下面一些急待解决的问题：用 MOM 法求出的辅助场 H_y 比较准确，但求出的 E_y 不完全准确；另外由于未能完全准确地求出 E_y，致使求出的部分张量阻抗元素也不大准确，从而不能准确地计算出其它大地电磁响应函数，影响了其实际应用.因此，为了取得更进一步的结果，还有很多工作要做.

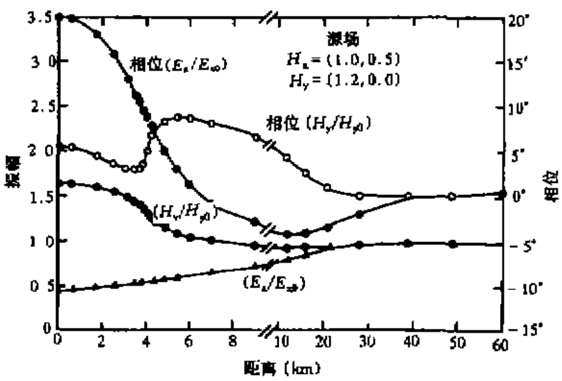

图4 归一化后的 E_x、H_y 的振幅和相位(周期 10s)

Fig.4 Amplitudes and phases of the normalized E_x and H_y components for a 10－ses period.

本项研究对进一步探索更一般的二维非对称各向异性问题，对研究各向异性介质的大地电磁响应函数及其资料解释，对确认电性异常及地震前兆都具有重要意义.

参考文献

1 Reddy I K, Rankin D. Magnetotelluric response of latterlly inhomogeneous and anisotropic media. Geophysics, 1975, 40(6): 1035 ~1045.

2 陈乐寿，王光锷．大地电磁测深法．北京：地质出版社，1990.

3 徐世浙．地球物理中的有限元法．北京：科学出版社，1994.

MT NUMERICAL SIMULATION OF SYMMETRICALLY 2-D ANISOTROPIC MEDIA BASED ON THE FINITE ELEMENT METHOD

YANG Changfu

(*Earthquake Research Institute of Lanzhou, SSB, China*)

Abstract

In this paper, the vertical axis is treated as one of the principal axes of the two-dimensional, symmetric, anisotropic media, in which the structure strike is an arbitrary included angle with respect to another principal axis. In this condition, the entire region is divided into rectangular elements. For the basic equations of the two-dimensional anisotropic media, a total stiffness matrix is composed reasonably, so the coupled finite element equations can be formed byusing Galerkin's finite element method. By solving these equations for the fieldcomponents at each node and on the basis of MOM-method, author evaluates the auxiliary field components on the earth's surface and obtains MT responses such as tensor impedances and so on. In addition, a numerical calculation test for the model which was used in the related reference is carried out.

Key words: Telluric electromagnetic sounding, Anisotropic medium, Finite element, Numerical simulation