

粘性力在地形变动力学模型 演化过程中的作用

张 永 志

(国家地震局第二地形变监测中心, 西安 710054)

摘要 本文分别利用 Lyapunov 指数方法和特征值方法, 对模拟地震过程的线性粘弹性动力学模型的稳定性进行了分析, 并讨论了粘性力在地形变动力学系统演化过程中的作用, 采用 Runge-Kutta 格式的 Merson 修改方法模拟了在不同粘性系数时线性和非线性动力学系统的演化过程, 得出了一些有意义的结论和认识。

关键词: 粘弹性 非线性 动力学系统 演化过程

1 引言

地震是地球演化过程中的一种普遍现象, 国内外许多学者从不同的学科、不同的角度对它进行了广泛的研究, 取得了不少有益的收获。但到目前为止, 地震预报仍然是世界性的难题之一。非线性动力学理论和方法在物理、化学、生物、医学等领域都有重要的应用^{[2][4]}, 它在我国应用于地震预报与研究始于本世纪八十年代, 特别是协同论、突变论、耗散结构理论及其分形分维等的引入, 使我们对研究地球演化问题有了必要的数学物理工具, 使我们从动态的、开放的、复杂的观点重新理解和认识地震过程。这对于了解地震孕育发展, 从而达到预报地震的目的无疑是有益的。基于上述观点, 本文试图利用最简单的粘弹性动力学模型在周期性外力作用下的线性和非线性动力学特征进行数值模拟, 以便研究地震过程中的地形变化特征, 从而达到利用地形变观测资料来进行地震预报的目的。

2 动力学模型

地震过程可以通过粘弹性动力学模型来进行解释^[1], 图1是一个最简单的粘弹性动力学模型, 即由弹簧、粘壶、摩擦件等三部分组成的粘弹性动力学模型, 图中 A 端固定(表示断层的一盘), f 为静摩擦力, E 为弹性系数, μ 为粘性系数, P 为作用于弹簧上的外力, M 为质量为 m 的刚性体。地震过程可解释为在外力 P 的作用下, 当系统上的地应力小于静摩擦力时, 动力系统的变化表现为两部分: 一部分为弹簧被拉长, 应变能积

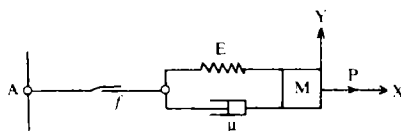


图1 模拟地震过程的一个简单的粘弹性动力学模型

Fig. 1 A simple model of viscoelasticity.

累;另一部分为粘性滑动,应变能耗散,当其应力达到某一阈值,即大于最大静摩擦力 f 时,摩擦件突然滑动,弹簧中的能量以地震波的形式释放出来,从而导致地震。为理解上述地震过程中地形变的动力学表现形态,我们先讨论一下在系统上的应力小于静摩擦力的动力学过程。图1可用动力学方程表示为:

$$P(t) - Ex - \mu \frac{dx}{dt} = m \frac{dx^2}{dt^2} \quad (1)$$

3 动力学系统的稳定性

为便于讨论动力学系统(1)的演化过程,我们先讨论动力学系统(1)的稳定性问题,令

$$q_1 = x, \quad q_2 = \dot{x} \quad (2)$$

则(1)式可写为

$$\begin{aligned} q_1 &= q_2 \\ q_2 &= -\frac{E}{m} \cdot q_1 - \frac{\mu}{m} \cdot q_2 + \frac{1}{m} P(t) \end{aligned} \quad (3)$$

写成向量形式为:

$$\dot{\vec{q}} = A \vec{q} + B \vec{p} \quad (4)$$

式中

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -E/m & -\mu/m \end{vmatrix}$$

不难证明, $b=0$ 时的齐次方程的解可写成如下形式

$$\dot{\vec{q}}(t) = e^{At} \dot{\vec{q}}(0) \quad (5)$$

令

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (6)$$

则非齐次方程的解可写为:

$$\dot{\vec{q}}(t) = \Phi(t) \dot{\vec{q}}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau) b \vec{p}(\tau) d\tau \quad (7)$$

(7)式中右边第一项代表动力学系统对初始条件 $x(0)$ 的响应,而第二项表示外界对系统的影响。判断动力学系统稳定性的方法主要有特征值方法和 Lyapunov 方法^{[2][3]},特征值方法是直接由方程

$$(I\lambda - A) = 0 \quad (8)$$

求出矩阵 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。

当所有特征值都落入复平面的左半平面时,线性动力学系统是稳定的;当其中有一个或多个特征值落入右半平面时,线性动力学系统是不稳定的。当取质量 m 为单位质量时,我们可解得方程(4)中矩阵 A 的特征值为

$$\lambda_1 = -\frac{\mu}{2} + \frac{\sqrt{(\mu^2 - 4E)}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{\mu}{2} - \frac{\sqrt{(\mu^2 - 4E)}}{2} \quad (9)$$

从(9)式知,当粘性系数 $\mu \neq 0$ 时,特征值始终位于复平面的左半平面。因此线性动力学系统(4)的运动是一种稳定性运动。Lyapunov 函数方法是找到系统的一个连续正定对称的状态函数 $V(x)$, 而状态函数 $V(x)$ 对时间的导数 dV/dt 决定了线性动力学系统的稳定性:当 $dV/dt > 0$ 时,线性动力学系统是不稳定的系统;当 $dV/dt < 0$ 时,线性动力学系统是稳定的系统。系统函数可由下述方法求得:若系统 $\dot{q} = A(t)q(0)$ 中的矩阵 A 是时间 t 的函数,则系统

在平衡点 $q=0$ 处的大范围内稳定的充要条件^[4]为:对于任意给定的连续对称正定函数 $\Phi(t)$, 存在一个连续对称正定矩阵 $P(t)$, 使得

$$P(t) = -A^T P(t) - P(t)A(t) - \Phi(t) = 0 \quad (10)$$

Φ 为单位矩阵 I , 则上式为

$$A^T P + PA = -I \quad (11)$$

系统函数为

$$V(t) = q^T P q, \quad dV(t)/dt = -q^T \Phi q \quad (12)$$

方程(4)中矩阵 A 代入并解(11)式得

$$P = \begin{vmatrix} \mu^2 + E(E+1)/(2E\mu) & 1/(2E) \\ 1/(2E) & (HE)/(2\mu E) \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} P_{11} &= [\mu^2 + E(E+1)]/2E\mu > 0 \\ |P| &= [\mu^2 + E(E+1)](E+1)/(4E^2\mu^2) - \mu^2/(4E^2\mu^2) \\ &= [\mu^2 + (HE)^2]/(4E\mu^2) > 0 \end{aligned} \quad (14)$$

P 为正定矩阵, 故 Lyapunov 函数为

$$\begin{aligned} V(t) = q^T P q &= [\mu^2 + E(E+1)]/(2E\mu) q_1^2 + 1/E q_1 q_2 + [(1+E)/(2\mu E)]^2 q_2^2 > 0 \\ dV/dt &= -q^T \Phi q = -(q_1^2 + q_2^2) < 0 \end{aligned} \quad (15)$$

从(15)式可看出, $V(t)$ 为一连续对称正定函数, dV/dt 恒小于零, 故可得与特征值方法相同的结果, 即在粘性力不等于零时, 方程(3)所示的线性动力学系统的运动是稳定性运动。

4 非线性动力学系统的演化过程

从前面的分析可知, 如果地震过程中地形变的变化是一个线性过程, 其解在粘性系数不等于零时是稳定的, 在线性动力学系统具有不同粘性系数时, 方程(3)的线性动力学过程如图2所示, 方程(3)的解算采用 Runge-kutta 格式的 Merson 修改方法^[5], 计算精度为0.001。作用外力为: $P(t) = a \sin(\omega t)$ 。

从图2可看出, 随着粘性力的减弱, 虽然线性动力学系统的速率切换表现出由简单到复杂的运动, 但位移始终趋进于一不动吸引子, 计算结果与理论结果是一致的。当粘性力为零时, 系统处于一种临界状态, 不动吸引子消失。但实践证明, 地震过程远比我们想象的要复杂得多, 它不但包括了线性变化, 而更重要的是它往往表现出复杂的非线性特征。如果我们对方程(1)进行修改, 即设弹簧的响应是非线性的, 因为二次项可通过座标变换消去, 我们设应力与应变有如下关系:

$$\sigma = E(x - \beta x^3) \quad (16)$$

式中 σ 为应力, x 为应变, 将(16)式代入方程组(3)得

$$\begin{aligned} q_1 &= q_2 \\ q_2 &= -E q_1 - \mu q_2 + \beta E q_1^3 + a \sin \omega t \end{aligned} \quad (17)$$

当粘性系数和作用力系数等于零时, 方程(17)为 Hamilton 系统。Hamilton 函数为

$$H(q_1, q_2) = m/2 q_2^2 + E/2 q_1^2 - \beta E/4 q_1^4 \quad (18)$$

在不同粘性力作用下, 非线性动力学系统的演化过程示于图3。图3中具体数值的获得采用解

算非线性动力学方程组的 Runge-Kutta 形式的 Merson 修改方法^[5]。

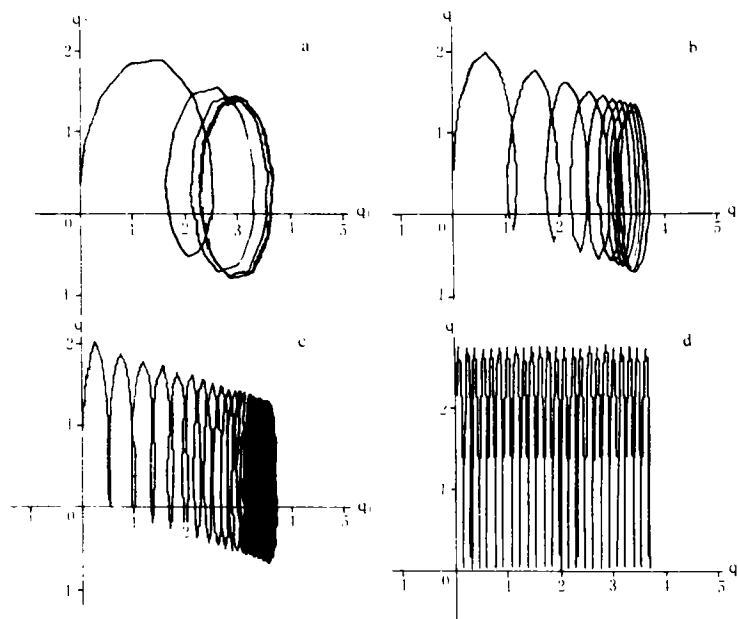


图2 不同粘性力作用下线性动力学系统的演化过程

a. $\mu=0.15$; b. $\mu=0.05$; c. $\mu=0.02$; d. $\mu=0$

$\alpha=0.05, \omega=1, \beta=0, m=1, E=1$

Fig. 2 The evolution process of linear dynamic system under the action of different viscous stresses.

从图3可以看出,在非线性的情况下,动力学系统的稳定性超出了 Lyapunov 和特征值方法的判定范围,非线性动力学系统在相平面上的运动表现为不稳定的准周期运动。随着粘性力的减弱,非线性动力学系统出现周期加倍现象,最后都趋近于一极限环。当粘性力为零时,系统出现一种对称的图案,极限环消失。这实际上是一种混沌吸引子。

5 结论与认识

通过以上的理论分析与数值模拟计算,我们得出以下结论和认识:

(1)在粘性力不等于零时,地形变线性动力学系统的运动是稳定性运动。

(2)随着粘性力的减弱,虽然线性动力学系统的速率切换表现出由简单到复杂的运动,但位移始终趋进于一不动吸引子,当粘性力为零时,线性动力学系统处于一种临界状态,不动吸引子消失。

(3)粘性力较大时,地形变非线性动力学系统在相平面上的运动表现为不稳定的准周期运动。随着粘性力的减弱,非线性动力学系统出现周期加倍现象。最后都趋近于一极限环。当粘性力为零时,非线性动力学系统出现一种对称的图案,极限环消失。

(4)从本文的理论分析及计算结果看出,粘性力在地形变动力学系统演变过程中起着耗散系统能量使动力学系统趋于稳定的作用。

由于时间和篇幅等原因,本文的理论模型与实际地形变的联系有待进一步探讨。

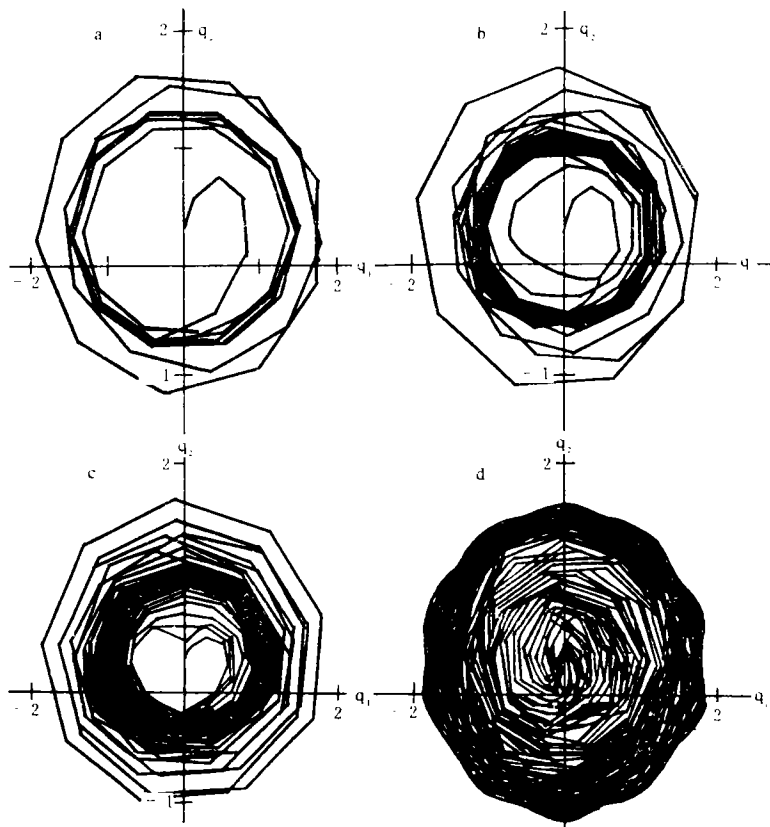


图3 不同粘性力作用下非线性动力学系统的演化过程

a. $\mu=0.15$; b. $\mu=0.05$; c. $\mu=0.02$; d. $\mu=0$
 $\alpha=0.05$, $\omega=1$, $\beta=0$, $m=1$, $F=1$

Fig. 3 The evolution process of nonlinear dynamic system.

(本文1993年1月15日收到)

参考文献

- 1 张黎明等:断层岩石的粘弹塑性模型及其在地震研究上的应用,《地震学报》,14(2)1992
- 2 哈青:《高等协同学》,科学出版社,1989
- 3 胡青松:《自动控制原理》,国防工业出版社,1983
- 4 陈克晶:《一种统一的进化学说,耗散结构理论概述》,湖北人民出版社,1987
- 5 M. 库比切克:《分岔理论和耗散结构的计算方法》,科学出版社,1990
- 6 尼科里斯,普利高津:《探索复杂性》,四川人民出版社,1986

(下转第84页)

段交江处;1959—1984年为平静期,未发生过 $M \geq 5$ 地震;1984年第二个活跃期开始,在黑河断裂与澜沧断裂交汇处的战马坡一带发生了7.6级地震。按第一个活跃期估算,还需要延续10年,今后的10年左右,该断裂带将有发生6.0级地震的可能性。从时空分布上看,未来地震的发生可能受黑河断裂带西北、中南两段特殊的介质和结构条件的限制。

4.2 地震与断裂活动速率

按照水平扭错距离估算得出的断裂水平位错速率,西北段为7毫米/年,中南段为3毫米/年。可见,黑河断裂带上不同地段近代构造运动速率有所不同。虽然地质年代可能不太精确,但也不可否认位错速率越大意味着应变积累的速度越高,与之相应的地震活动也越强烈。我们把战马坡与芒弄之间的地震活动空段近似地看作断裂的蠕滑段,该段发育良好,构造破碎带宽约500m,且形成特殊地貌景观,它可能是断裂释放应变能的构造因素。因此,我们有理由认为今后若干年内在战马坡与芒弄段潜在着发生强震的危险性。

(本文1993年7月14日收到)

(云南省地震局 柴天俊 俞维贤)

参考文献

- 1 中国人民解放军00939部队;《1:50万临沧幅水文地质报告》,1979
- 2 俞维贤等:澜沧7.6级地震形变带,《地震地质》,13(4)1991
- 3 阳世华等:澜沧7.6级地震区水平形变和垂直形变初步分析,《云南地质》,3(4)1989

A PRELIMINARY STUDY ON MODERN TECTONIC ACTIVITY OF THE HEIHE FAULT ZONE IN SOUTHWEST YUNNAN

Chai Tianjun and Yu Weixian

(*Seismological Bureau of Yunnan Province, Kunming*)

(上接第80页)

THE FUNCTION OF VISCOSITY IN EVOLUTION PROCESS OF DYNAMICAL MODEL OF DEFORMATION

Zhang Yongzhi

(*The Second Land Deformation Monitoring Centre, SSB, Xi'an*)

Abstract

Using Lyapunov exponent method and characteristic value method respectively, we discuss and analyse the stability of linear viscoelastic dynamical system of deformation in this paper. Both linear and nonlinear evolution processes of dynamical system of deformation are imitated by computer with Runge-Kutta-Merson method. Some conclusions are physics basis in understanding the process of earthquake deformation.

Key words: Viscoelastics, Nonlinearity, Dynamical system, Evolution process, Stability