

位错模型的有限单元公式

宋惠珍 刘洁 兰印刚

(国家地震局地质研究所, 北京, 100029)

摘 要

本文讨论了弹性和粘弹介质中用劈节点技术离散的结构面与非均匀位错面的等价原理, 并由此证明有限单元位错公式表示的位移场与沃尔特拉位错公式表示的位移场等价, 从而获得求解断层面错动产生的位移场与应力场的统一理论和方法, 即用 Volterra (沃尔特拉) 位错公式和地面位移观测资料, 反演断层面上位移或位移速率, 再用位错的有限单元公式和反演的断层位错, 正演计算位移场和应力场。

关键词: 位错面; 结构面; 劈节点; 力位移等价定理

自 1958 年 Steketee 将 Volterra 公式引入地震学领域之后, 经典位错理论得到了很大发展。从早期的点源位错模型、垂直走滑矩形位错模型、走滑兼倾滑矩形位错模型, 到 1985 年 Okada 提出的矩形剪切和拉张断层位错模型, 均属于经典位错理论范畴, 即考虑在半无限空间, 均匀各向同性弹性体内某一位错面的均匀滑动引起的地表位移变化。Okada 在原来纯剪切位移的位错面上引入了拉张位移, 这是位错理论的一个重要发展。陈运泰、张郅珍、黄立人等曾先后利用大地形变资料进行过断层均匀滑动的反演计算^[1-6]。

1987 年 Harris 和 Segall 提出垂直走滑断层的非均匀滑动位错模型, 即把断层面划分为有限个子矩形位错面, 在每一个小矩形位错面上滑动速率或滑动量是均匀的, 因此, 沃尔特拉位错理论仍然成立, 而地表任一点处位移是断层面上所有子矩形位错面贡献的迭加。在反演计算中, 他们采用的地表测量资料不是点位移, 而是测线长度变化量。由于子位错面个数往往大于地表测线条数, 因此, 所得出的线性反演方程是具有无穷多组解的不定方程组。采用合理约束条件, 确定不定方程组最佳解, 是 Harris 和 Segall 反演方法的关键内容, 也是把沃尔特拉位错理论用于求解断层运动学参数的重要发展。

刘洁综合了 Okada 及 Harris 和 Segall 的研究结果, 给出了走滑、倾滑、拉张三个分量同时存在的非均匀滑动断层模型, 并应用于求解 1976 年唐山地震前后断层的滑动速率及震时的滑动量, 以及北京地区南口—孙河断层和高丽营断层的平均滑动速率, 取得了较好的效果^[7-9, 1]。

尽管上述位错模型不同, 但它们都是以沃尔特拉位错理论为基础, 由已知地表位移观

• 国家地震局联合基金会与临汾任务联合资助课题。

1) 刘洁, 断层深部不均匀滑动速率反演及地震重复周期研究, 1991。

测资料反演断层运动学参数,而得不到由位错引起的有效范围内断层的动力学参数,因此,应用于震源过程研究是有一定局限性的。为此,本文以位错概念为基础,导出了位错模型的有限单元公式,由已知位错面上滑动速率或滑动量正演计算位错面内外任一点处的断层的运动学和动力学参数。

一、弹性介质中位错模型的有限单元公式

假设在有限非均匀弹性介质中有一个或若干个位错面,当位错面上剪切和拉张位移已知时,可以采用有限单元公式求解变形和应力状态。以含位错的平面问题为例,如图1所示,其中粗实线代表位错面,实心圆表示劈节点,它们都位于位错面上,劈节点与普通节点不同,它对其两边单元可以起劈开作用^[9,10]。以图1中单元e为例,在其4个顶点i、j、l、m中j和l是劈节点。假设在劈节点l上仅有剪切位错,在图1的xy坐标系里,它的位移表达式为:

$$\delta_{1y} = (\delta_{1y}) + \Delta\delta_{1y} .$$

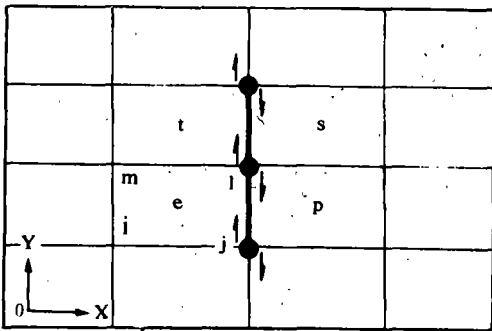


图1 含劈节点二维等参单元网络
Fig. 1 Two-D isoparameter element meshes including the splited nodes

公式中右上标e表示劈节点l所在的单元号,右下标l和y分别表示劈节点号和位移方向。位移 (δ_{1y}) 在邻近各单元上相同。但“劈开部分” $\Delta\delta_{1y}$ 在各单元上则不尽相同,在本例中, $\Delta\delta_{1y} = -\Delta\delta_{1y}$, $\Delta\delta_{1x} = -\Delta\delta_{1x}$,即在劈节点两边单元上的不连续位移大小相等而符号相反。同样,对劈节点j有 $(\delta_{1y}) = (\delta_{1y})$, $\Delta\delta_{1y} = -\Delta\delta_{1y}$ 。由此可知,用劈节点离散的不连续面上的位移与位错面上的位错等价。以此类推,劈节点位移定义可以推广到任意方向,即:

$$\delta_{ln} = (\delta_{ln}) + \Delta\delta_{ln} . \quad (1)$$

式中右上标e表示劈节点l周围的单元号,右下标l和n分别表示劈节点和劈节点位移方向,它与位错面上任意方向位错等价。 (δ_{ln}) 对周围每个单元均相等, $\Delta\delta_{ln}$ 对劈节点l两边单元的贡献大小相等,符号相反。进一步如果在劈节点上引入拉张位移分量,则公式(1)与Okada的正演位错模型概念等价。也就是用公式(1)可以表示断层面上走滑兼倾滑、拉张的运动学问题。

以上是通过劈节点的劈开作用实现位错面上的错动。位错理论的另一个重要概念,就是力-位移等价定理,即在某一位错面上剪切位错产生的位移场与没有切口的同一个面上双力偶产生的位移场相同。这个概念同样可以通过含劈节点的有限单元公式表示。仍以图1为例,已知通过变分方法得到的有限单元平衡方程有如下形式:

$$k\delta = f . \quad (2)$$

式中右上标 e 为单元号, k 为单元刚阵系数, δ 为单元上节点位移, f 为单元上体力和面力等效移置到节点上的总迭加力。按四边形等参元的刚阵分块矩阵形式写出单元 e 的矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{il} & k_{im} \\ & k_{jj} & k_{jl} & k_{jm} \\ \text{对称} & & k_{ll} & k_{lm} \\ & & & k_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_l \\ \delta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ f_j \\ f_l \\ f_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中每一刚阵元素 $k_u, k_{ij}, \dots, k_{mm}$ 是 2×2 阶矩阵, δ_{jY} 和 δ_{lY} 是单元 e 上的劈节点 j 和 l 上的位移, 省略右下标中表示劈节点的位移方向 y , 根据(1)式得:

$$\delta_j^e = (\delta_j) + \Delta\delta_j, \quad \delta_l^e = (\delta_l) + \Delta\delta_l.$$

去掉右上标单元号, 代入方程(3)并经过整理获得下列矩阵方程:

$$k\delta = \begin{bmatrix} f_i - (k_{ij}\Delta\delta_j + K_{iu}\Delta\delta_l) \\ f_j - (k_{jj}\Delta\delta_j + K_{ju}\Delta\delta_l) \\ f_l - (k_{lj}\Delta\delta_j + K_{lu}\Delta\delta_l) \\ f_m - (k_{mj}\Delta\delta_j + K_{mu}\Delta\delta_l) \end{bmatrix} \quad (4)$$

方程(4)左边与普通四边形等参元完全相同, 右边载荷引入了修改项, 其修改量为劈节点号所在列与被修改节点号所在行交汇位置上的子刚阵乘以该劈节点上的位错矢量。如果劈节点两边单元的几何性质和材料性质完全相同, 则在两边单元的对称节点上载荷修改量也完全一样。对比方程(3)与方程(4)可以看出, 在劈节点离散的不连续界面上作用一剪切位移的有限单元平衡方程, 与没有劈节点的同面上作用一单力偶的普通有限单元平衡方程等价。这就是说, 在有限单元方法中, 用劈节点离散的结构面与位错理论中的位错面等价。显然, 可以不加证明地将方程(3)和方程(4)推广到具有拉张位移与非均匀材料性质问题中。设 Δf_i 为单元 e 的节点 i 上节点力的修改量, 则方程(4)右端的载荷量可以表示成下列通式:

$$\Delta f_i = \sum_{i \in n, j \in m} k_{ij} \Delta\delta_j \quad (5)$$

式中 n 为单元 e 的节点集合, m 为单元 e 上劈节点集合。方程(5)推广到一般情况, 则由下式给出:

$$\Delta f_i = \sum_{i \in N_F, j \in N_P} k_{ij} \Delta\delta_j \quad (6)$$

式中 N_F 为与劈节点共单元的节点集合, N_P 为劈节点集合, k_{ij} 为子刚阵, 其阶数等于节点上自由度数, $\Delta\delta_j$ 为劈节点 j 上所给的位移值。由此出发, 可以不加证明地推广到三维问题, 对于含劈节点的平衡方程组为:

$$K\delta = F - \Delta F = R \quad (7)$$

$$K = \int_0^1 B^T DB dv \quad (8)$$

$$F = \int_0^1 N^T b dv + \int_0^1 N^T t ds \quad (9)$$

$$\Delta F = \sum_{i \in N_p, j \in N_p} k_{ij} \Delta \delta_j \quad (10)$$

式中 K 是刚阵, R 是载荷, ΔF 是劈节点对载荷的修改量。由公式(9)和(10)得出,在结构体内,由劈节点离散的结构面或不连续面,在劈节点上含三个位移分量的位移矢量产生的位移场,与同一个面上作用的双力偶产生的位移场相同。可称为有限单元计算中的力-位移等价定理,与位错理论中的力-位移等价定理相当。但是,若劈节点周围单元几何和材料性质不同时,与位移等价的力不是双力偶,而是方向相反大小不等的两对力偶作用,这就是说,有限单元中的力-位移等价定理比位错理论中的力-位移等价定理含义广。至此可以得出,当结构体的边界距劈节点离散的结构面充分远时,劈节点位移产生的位移场与位错面上等价位错产生的位移场等同,也就是沃尔特拉公式与(7)式和(10)式计算的位移场在理论上等价。当单元划分愈小,位移模型幂次增高时,其精度愈高,愈接近用沃尔特拉公式计算的结果。

二、粘弹介质中位错模型的有限单元公式

一般情况下,粘弹体总应变由弹性应变、蠕变应变和初始应变三部分组成,假设初始应变为零,则总应变为:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^c \quad (11)$$

式中弹性应变 ε^e 与时间无关,由弹性应力-应变关系则有:

$$\sigma = D\varepsilon^e = D(\varepsilon - \varepsilon^c) \quad (12)$$

式中 D 为弹性材料矩阵。通过变分原理,整理之后,则获得粘弹体标准矩阵方程:

$$K\delta = F \quad (13)$$

$$K = \int_V B^T D B dv \quad (14)$$

$$F = \int_V N^T b dv + \int_S N^T t ds + \int_V B^T D \varepsilon^c dv \quad (15)$$

从方程(13)–(15)可以看出,线性粘弹体有限单元公式与线弹性体有限单元公式差别仅在载荷项,即(15)式中的第三部分,它对应 t 时刻的蠕变量,这部分蠕变量修改了方程(13)中的载荷向量 F ,随着时间增加,又获得新的蠕变应变,载荷向量 F 又得到修改,如此重复下去,在每个时间步刚阵 K 都保持不变。由公式(7)–(10)指出,当结构面用劈节点离散时,劈节点位移并不改变刚阵,也是仅修改载荷向量。由此可知,劈节点技术在粘弹介质中仍然能满足位错理论的定义。并且劈节点位移与蠕变应变分别修改载荷项。因此,对粘弹体中结构面用劈节点离散时,有限单元公式如下

$$K\delta = R \quad (16)$$

$$K = \int_V B^T D B dv \quad (17)$$

$$R = \int_V N^T b dv + \int_S N^T t ds + \Delta F^c - \Delta F^e \quad (18)$$

$$\Delta F^e = \int_v B^T D \epsilon^e dv ; \quad (19)$$

$$\Delta F^N = \sum_{i \in N_p, j \in N_p} k_{ij} \Delta \delta_j . \quad (20)$$

从公式(16)–(20)可以看出,含劈节点粘弹体有限单元公式与普通线弹体有限单元公式差别仅在载荷项,即蠕变应变修改项和劈节点位移修改项,且两者相互独立。因此,在粘弹介质中用劈节点离散的结构面,仍满足位错面的定义,于是,通过劈节点离散粘弹介质中的不连续面,将位错概念引入粘弹介质中,公式(16)–(20)即为粘弹介质中位错模型的有限单元公式。当粘弹体边界取得距离位错面充分远时,用公式(16)–(20)可表示由位错引起的介质内位移场,由此出发,把用沃尔特拉公式表示的位移场推广到线性粘弹体中。

三、应用及检验

用有限单元方法中的劈节点概念将弹性介质与粘弹介质中的结构面由位错面代替,或者将两者统一起来。当有限单元网格化足够精细,边界取得距位错面足够远时,用有限单元公式计算的位移场与用沃尔特拉公式计算的位移场等价,我们称前者为位错模型的有限单元公式,以区别位错理论中的沃尔特拉公式。应用本文导出的有限单元公式,可以正演计算断层的全部运动学和动力学参数。在实际计算时,首先通过沃尔特拉公式用地表观测资料反演断层面上的位移或位移速率,然后按力-位移等价定理和劈节点概念,等效移到弹性介质或粘弹介质中相对应的断层面上,进行有限单元公式的正演计算,所获得的位移场和应力场可信度高,并可有效地应用于地震震源过程和地震危险性预测的研究。

(1) 1556年华县8级地震震源过程研究

根据断层陡坎资料,李永善提出该次地震是渭华断裂倾滑运动的结果,因此,本文采用倾滑位错震源模型模拟其震时错动过程。由于是历史地震,缺乏地面观测位移资料,因此无需再通过沃尔特拉公式进行反演计算,而是根据断层陡坎资料估算的断层位错,计算了渭河盆地的位移场、速度场、加速度场和应力场。

图2(a)表示在震后1.1秒时计算的地面垂直加速度场。三维地质模型由李永善提供^[1]。图中粗实线表示断层,置有实心圆的断层是地震断层,震时断层倾向最大错距为4m,向两端逐渐衰减。将地震断层面取为倾滑位错面,并用劈节点技术离散,然后用公式(7)–(10)的动态形式进行计算。图2(b)是通过野外地质调查获得的宏观烈度等震线。对比图2a与图2b,可以发现,(1)在地震断层南北两侧,地震动参数的衰减与宏观烈度衰减具有一致性,即在地震断层以南衰减迅速,以北衰减缓慢;(2)地表垂直加速度最高值对应宏观烈度XI度极震区;(3)垂直加速度等值线长轴方位对应宏观烈度等值线长轴方位。地表运动的这种特征与震时断层错动一致,证明位错模型的有限单元公式是正确的。

(2) 1303年洪洞8级大地震震源过程研究

该次地震发生在临汾盆地内。其发震断层为北北东向的霍山断裂。图3给出了该次地震前后临汾盆地的应变能密度分布。三维地质模型见文献2)。图中粗实线为断层线,置有

2) 马宗晋等,临汾盆地烈度研究专辑,1992。

及应变能的演化。由图 3a 可见,震前霍山断裂南段应变能密度年变化速率是全区最高的(正值对应应变能增加)。图 3b 表明,震时与震前应变能密度之差与 1303 年地震发展过程对应(负值对应应变能释放)。图 3b 还表明,1303 年洪洞地震后,临汾凹陷应变能密度变化速率增加,而且有效应力积累速率也增加²⁾,说明该次地震使临汾凹陷的应变能积累加速。至 1695 年,即时隔 392 年之后,所积累的有效应力和应变能量值与 7 级左右地震对应,同年在临汾北西向断裂带上发生了 7.5 级地震。

结 语

本文根据地质调查资料,在地震断层面上通过劈节点技术施加位错位移,用有限单元公式正演地震断层及介质内的力学参数,通过对上述两个实际震例计算,证明用劈节点离散的断层面在周围介质内的响应与位错面上的位错引起的响应是等价的。因此,本文提出的位错模型的有限单元公式在理论上推导是严密的,经实际应用检验,该公式是正确的。

参考文献

- [1] Chinnery, M. A., The deformation of the ground around surface faults, *Bull Seismol. Soc. Am.*, Vol. 51, 1961.
- [2] Savage, J. C., W. H. Proscott, M. Lisowski, and N. E. King, Strain accumulation in southern California, 1976—1980, *J. Geophys. Res.*, Vol. 86, 6991—7001, 1981.
- [3] Okada, Y., Surface deformation due to shear and tensile fault in a half space, *Bull Seismol. Soc. Am.*, Vol. 75, 1135—1154, 1985.
- [4] Monko, W., *Geophysical data analysis; Discrete inverse theory*, Academic, Orlando. Fla., 1984.
- [5] 陈运泰、黄立人等,用大地测量资料反演的 1976 年唐山大地震的位错模式, *地球物理学报*, Vol. 22, No. 3, 1979.
- [6] 黄立人、顾国华, *静力位错理论*,地震出版社,1982.
- [7] Segall, P., R. Harris, Slip deficit on the parkfield, California section of the San Andress fault as revealed by inversion of geodetic, *Science*, No. 233, 1404—1413, 1986.
- [8] Segall, P., Harris, R., Earthquake deformation cycle on the San Andress fault Near parkfield, California, *J. Geophys. Res.*, Vol. 92, 10511—10525, 1987.
- [9] Jungels, P. H., *Models of tectonic processes associated with earthquakes*, Ph. D. Thesis, California Institute Technology, Pasadena, California, 207, 1973.
- [10] Melosh, H. J., A. Raefsky, A simple and efficient method for introducing faults into finite element Computations, *Bull Seismol. Soc. Am.*, Vol. 71, No. 5, 1391—1400, 1981.
- [11] 宋惠珍、李永善、兰印刚、刘洁, 1556 年华县 8 级地震影响场的数字模拟研究, *渭河盆地活动断层研究(中日合作项目专著)*, 1991.
- [12] 徐锡伟、邓起东, 山西霍山山前断裂晚第四纪活动特征和 1303 年洪洞 8 级地震, *地震地质*, Vol. 12, No. 1, 1990.

(下转 23 页)



照 19 舌形坑和 V 形坑
(×716, 红崖子沟断面内)

照 20 V 形坑, 轮廓模糊, 是
溶蚀作用的结果。第Ⅲ溶蚀与
第Ⅳ类溶伴生(×400, 长草沟)

照 21 瓦内线, 由两组解
理破裂组合而成

(上接 12 页)

A FINITE ELEMENT FORMULA ON DISLOCATION MODEL

Song Huizhen, Liu Jie, Lan Yingang

(*Institute of Geology, SSB, Beijing, 100029*)

Abstract

This paper deals with a equivalent theory between the constructive plane dispersed by the technique of splitting node and the uneven dislocation plane, which lie in the elastic and viscoelastic medium, and judging from this the displacement field expressed with FEM dislocation formula are equivalent to that with Volterra dislocation formula. Thereby, the unified theory and method calculating the displacement field and the stress field induced by the fault plane slip are obtained. Namely, the displacement or the displacement rate on the fault plane are inversed based on Volterra dislocation formula and geodetic date, and then the displacement field and the stress field are calculated by means of FEM dislocation formula and the inversed value of the fault dislocation.