

点电源二维起伏界面三层介质边界单元法

钱家栋 马钦忠

(国家地震局兰州地震研究所)

摘 要

本文在文献〔5〕的基础上,以三层介质下边两层界面上隆模型为例,讨论了边界单元法在解决层状介质中存在二维横向不均匀情况下点源场视电阻率计算问题方面的应用。在本文中,由于选取了适当的基本解,故在所导出的方程中避免了对水平层状界面的积分计算,只对起伏边界进行积分计算,并在理论推导中设法消除了位场在边界上的法向导数,因而最后形成的代数方程组规模相当小,从而大大减少了所需的边界部分点和未知量的数目,大量地节省了计算机内存,加快了计算速度。这给数值计算带来了很大的方便,并为向二维及三维多层介质中存有异常体的问题推广提供了便利条件。

一、边值问题

1. 边值问题

设三层介质结构模型如图 1 所示。设介质沿地质体走向 (y 轴) 是均匀的。 x 轴垂直于地质体走向方向, z 轴垂直地面向下。A 点为供电点 (点电流源)。第一层介质厚为 h_1 , 电阻率为 ρ_1 ; 第二层介质厚为 h_2 , 电阻率为 ρ_2 ; 第三层介质的厚度 $h_3 \rightarrow \infty$, 电阻率为 ρ_3 。为了便于公式推导, 将第一层介质中的上隆部分作为一个区域 Ω_4 , 其电阻率为 ρ_4 , 其边界为 Γ_4 ; 将第二层介质中的上隆部分作为另一区域 Ω_5 , 其电阻率为 ρ_5 , 其边界为 Γ_5 。设 Γ_∞ 是以 $r_A = \infty$ 为半径的假想半无限圆柱面, 则边界 Γ_1 、 Γ_2 、 Γ_3 、 Γ_4 、 Γ_5 将整个区域分为 Ω_1 、 Ω_2 、 Ω_3 、 Ω_4 、 Ω_5 五个区域。 u_i ($i=1, 2, \dots, 5$) 分别是这五个区域中的电位, 则此模型的三维边值问题为:

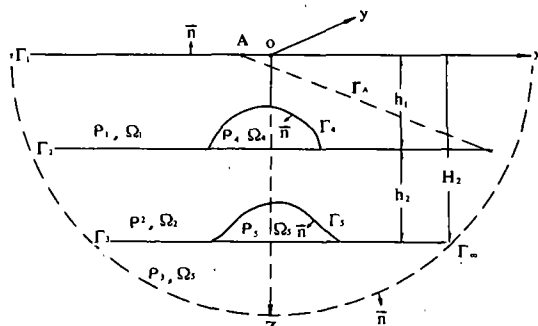


图 1

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla^2 u_i(x, y, z) &= -2\rho_i \cdot I \delta_3(A); i = 1, 2, \dots, 5 \\
 \partial u_i / \partial n &= 0 \\
 u_1 |_{\Gamma_2} &= u_2 |_{\Gamma_2} & \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} |_{\Gamma_2} &= \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} |_{\Gamma_2} \\
 u_1 |_{\Gamma_4} &= u_4 |_{\Gamma_4} & \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} |_{\Gamma_4} &= \frac{1}{\rho_4} \frac{\partial u_4}{\partial n} |_{\Gamma_4} \\
 u_2 |_{\Gamma_3} &= u_3 |_{\Gamma_3} & \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} |_{\Gamma_3} &= \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial u_3}{\partial n} |_{\Gamma_3} \\
 u_2 |_{\Gamma_5} &= u_5 |_{\Gamma_5} & \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} |_{\Gamma_5} &= \frac{1}{\rho_5} \frac{\partial u_5}{\partial n} |_{\Gamma_5} \\
 u_3 |_{\Gamma_\infty} &= c / \sqrt{y^2 + r_A^2}
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 I 是点电源的电流强度, $\delta_3(A)$ 是以 A 为中心的三维狄拉克函数。

类似于文献〔5〕的作法, 对 y 方向进行傅氏变换, 将三维微分方程组变为二维微分方程组, 定义下列傅氏变换:

$$U_i(x, k, z) = \int_0^\infty u_i(x, y, z) \cdot \cos ky dy \quad (2)$$

其反变换为:

$$u_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty U_i(x, k, z) \cdot \cos(ky) dk \quad (3)$$

其中
且有

$$F[u_i] = U_i \quad (i = 1, \dots, 5),$$

$$\int_0^\infty \delta_3(A) \cdot \cos ky dy = \delta_2(A) / 2.$$

其中 $\delta_2(A)$ 是以 A 为中心的二维 δ -函数, 对 (1) 式进行傅氏变换, 得

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla^2 U_i - k^2 U_i &= -\rho_i \cdot I \cdot \delta_2(A) \\
 \partial U_i / \partial n |_{\Gamma_1} &= 0 \\
 U_1 |_{\Gamma_2} &= U_2 |_{\Gamma_2} & \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U_1}{\partial n} |_{\Gamma_2} &= \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial U_2}{\partial n} |_{\Gamma_2} \\
 U_1 |_{\Gamma_4} &= U_4 |_{\Gamma_4} & \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U_1}{\partial n} |_{\Gamma_4} &= \frac{1}{\rho_4} \frac{\partial U_4}{\partial n} |_{\Gamma_4} \\
 U_2 |_{\Gamma_3} &= U_3 |_{\Gamma_3} & \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial U_2}{\partial n} |_{\Gamma_3} &= \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial U_3}{\partial n} |_{\Gamma_3} \\
 U_2 |_{\Gamma_5} &= U_5 |_{\Gamma_5} & \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial U_2}{\partial n} |_{\Gamma_5} &= \frac{1}{\rho_5} \frac{\partial U_5}{\partial n} |_{\Gamma_5} \\
 U_3 |_{\Gamma_\infty} &= c \cdot K_0(k \cdot r_A)
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 K_0 是零阶第二类修正贝塞尔函数。 k 作为参数出现在方程中。 则 (4) 式便降为二维边值问题。 对足够多的 k 值, 求解 (4) 式, 然后利用傅氏反变换 (3) 式即可求得电位函数 u_i , 进而求出视电阻率。

2. 基本解

选取 φ_1 、 φ_2 、 φ_3 、 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 作为基本解, φ_1 、 φ_2 、 φ_3 满足的方程为:

(1) 当 P 点在第一层介质中时, 则

$$\begin{aligned} V^2 \varphi_1 - k^2 \varphi_1 &= -\delta_2(p_1) \quad , \quad p = p_1 \in \Gamma_1 \quad ; \\ V^2 \varphi_1 - k^2 \varphi_1 &= -\delta_2(p_4) \quad , \quad p = p_4 \in \Gamma_4 \quad ; \\ V^2 \varphi_2 - k^2 \varphi_2 &= 0 \quad ; \\ V^2 \varphi_3 - k^2 \varphi_3 &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (5)$$

在 Γ_1 、 Γ_2 、 Γ_3 上它们分别满足的边界条件和边值关系为:

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_1 |_{\Gamma_2} &= \rho_2 \varphi_2 |_{\Gamma_2} \quad , \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) |_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) |_{\Gamma_2} \quad ; \\ \rho_2 \varphi_2 |_{\Gamma_3} &= \rho_3 \varphi_3 |_{\Gamma_3} \quad , \quad \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) |_{\Gamma_3} = \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial n} \right) |_{\Gamma_3} \quad ; \\ \varphi_1 |_{\Gamma_1} &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (6)$$

(2) 当 P 点在第二层介质中时, 基本解 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 满足的方程为:

$$\begin{aligned} V^2 \psi_1 - k^2 \psi_1 &= 0 \quad ; \\ V^2 \psi_2 - k^2 \psi_2 &= -\delta_2(p_5) \quad , \quad p = p_5 \in \Gamma_5 \quad ; \\ V^2 \psi_3 - k^2 \psi_3 &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (7)$$

其满足的边界条件、边值关系为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial n} |_{\Gamma_1} &= 0 \quad ; \\ [\rho_1 \cdot \psi_1 = \rho_2 \cdot \psi_2] |_{\Gamma_2} \quad , \quad \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial n} = \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \right] |_{\Gamma_2} \quad ; \\ [\rho_2 \cdot \psi_2 = \rho_3 \cdot \psi_3] |_{\Gamma_3} \quad , \quad \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial n} = \frac{\partial \psi_3}{\partial n} \right] |_{\Gamma_3} . \end{aligned} \quad (8)$$

解方程 (5) — (8) 式, 可得基本解表达式如下:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{4\pi} [K_0(k \sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2}) + K_0(k \sqrt{(x-x_p)^2 + (y+y_p)^2}) \\ &\quad + \int_0^\infty B_1(\lambda) \cdot (e^{-\lambda z} + e^{\lambda z}) \cdot \frac{\cos[(x-x_p) \sqrt{\lambda^2 - k^2}]}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \cdot d\lambda \quad ; \\ \varphi_2 &= \frac{1}{\rho_2} \int_0^\infty (A_2 e^{-\lambda z} + B_2 e^{\lambda z}) \frac{\cos[(x-x_p) \sqrt{\lambda^2 - k^2}]}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \cdot d\lambda \quad ; \\ \varphi_3 &= \frac{1}{\rho_3} \int_0^\infty A_3 e^{-\lambda z} \cdot \frac{\cos[(x-x_p) \sqrt{\lambda^2 - k^2}]}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \cdot d\lambda \quad ; \\ \psi_1 &= \frac{1}{\rho_1} \int_0^\infty B_1^*(\lambda) (e^{-\lambda z} + e^{\lambda z}) \frac{\cos[(x-x_p) \sqrt{\lambda^2 - k^2}]}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \cdot d\lambda \quad ; \\ \psi_2 &= \frac{1}{4\pi} \cdot K_0[k \sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2}] + \\ &\quad + \frac{1}{\rho_2} \int_0^\infty (A_2^* e^{-\lambda z} + B_2^* e^{\lambda z}) \cdot \frac{\cos[(x-x_p) \sqrt{\lambda^2 - k^2}]}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \cdot d\lambda \quad ; \end{aligned} \quad (8')$$

$$\psi_3 = \frac{1}{\rho_3} \int_1^{\infty} A_3^* e^{-\lambda z} \cdot \frac{\cos[(x-x_p) \sqrt{\lambda^2 - k^2}]}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \cdot d\lambda.$$

其中:

$$B_1(\lambda) = \frac{\rho_1 \cdot ch(\lambda Z_p)}{2\pi} \cdot \frac{k_{12} \cdot e^{-2\lambda H_1} + k_{23} e^{-2\lambda H_2}}{1 - k_{12} e^{-2\lambda H_1} - k_{23} e^{-2\lambda H_2} + k_{12} k_{23} e^{-2\lambda H_2}} ;$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_3}\right) \cdot A_3 ;$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}\right) e^{-2\lambda H_2} \cdot A_3 ;$$

$$A_3 = \frac{\rho_1 ch(\lambda Z_p)}{2\pi} \frac{4\rho_2\rho_3/[(\rho_1 + \rho_2)(\rho_2 + \rho_3)]}{1 - k_{12} e^{-2\lambda H_1} - k_{23} e^{-2\lambda H_2} + k_{12} k_{23} e^{-2\lambda H_2}} ;$$

$$B_1^*(\lambda) = \frac{\rho_1 \rho_2 e^{-\lambda Z_p}}{2\pi(\rho_1 + \rho_2)} \frac{1 + k_{23} e^{-2\lambda(H_2 - Z_p)}}{1 - k_{12} e^{-2\lambda H_1} - k_{23} e^{-2\lambda H_2} + k_{12} k_{23} e^{-2\lambda H_2}} ;$$

$$A_2^* = \frac{\rho_2}{4\pi} \frac{[e^{-\lambda Z_p} - k_{12} e^{-\lambda(Z_p - 2H_1)}] \cdot [1 + k_{23} e^{-2\lambda(H_2 - Z_p)}]}{1 - k_{12} e^{-2\lambda H_1} - k_{23} e^{-2\lambda H_2} + k_{12} k_{23} e^{-2\lambda H_2}} ;$$

$$B_2^* = \frac{\rho_2 k_{23}}{4\pi} \frac{e^{-\lambda(2H_2 + Z_p) + 2\lambda H_1} \cdot [(1 + e^{2\lambda Z_p}) e^{-2\lambda H_1} - k_{12} (1 + e^{-2\lambda(2H_1 - Z_p)})]}{1 - k_{12} e^{-2\lambda H_1} - k_{23} e^{-2\lambda H_2} + k_{12} k_{23} e^{-2\lambda H_2}} ;$$

$$A_3^* = \frac{\rho_2 \rho_3 e^{-\lambda Z_p} [(1 + e^{2\lambda Z_p}) e^{-2\lambda H_1} - k_{12} (1 + e^{-2\lambda(2H_1 - Z_p)})]}{2\pi(\rho_2 + \rho_3) e^{-2\lambda H_1} [1 - k_{12} e^{-2\lambda H_1} - k_{23} e^{-2\lambda H_2} + k_{23} e^{-2\lambda H_2} \cdot k_{12}]} ;$$

$$k_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} ; \quad k_{23} = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 + \rho_2} .$$

二、积分方程

在场论中, 二维问题的格林公式为

$$\int_{\Omega} (U \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 U) d\Omega = \oint_{\Gamma} (U \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial U}{\partial n}) d\Gamma . \quad (9)$$

其中 Ω 是 xz 平面上的二维区域, Γ 是 Ω 的边界线。由于在图 1 中的 5 个区域中, 介质是分区均匀的, 则可分别对这五个区域用格林公式求解。

1. 设 P 点是地表上任一点, 令 $P = p_1 \in \Gamma_1$ 。

对区域 Ω_1 , Ω_2 和 Ω_3 用格林公式 (9) 求解, 并利用 (4)、(5)、(6) 式中的关系进行推导, 可得:

$$U_1(p_1)/2 = \rho_1 \cdot I\varphi_{1A}(p_1)/2 - \int_{\Gamma_4} (U_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varphi_1 \frac{\partial U_1}{\partial n}) d\Gamma - \int_{\Gamma_5} (U_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varphi_2 \frac{\partial U_2}{\partial n}) d\Gamma . \quad (10)$$

然后再对 Ω_4 , Ω_5 分别用格林公式求解, 并将 (4)、(5)、(6) 式中的关系带入, 可得如下两式:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_4} \varphi_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} d\Gamma &= \frac{\rho_1}{\rho_4} \int_{\Gamma_4} U_4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\Gamma ; \\ \int_{\Gamma_5} \varphi_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} d\Gamma &= \frac{\rho_2}{\rho_5} \int_{\Gamma_5} U_5 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} d\Gamma . \end{aligned} \quad (11)$$

将 (11) 式带入 (10) 式, 则可得到:

$$U(p_1)/2 = \rho_1 \cdot I \varphi_{1A}(p_1)/2 - \rho_1 \int_{\Gamma_4} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_4}\right) U \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\Gamma - \rho_2 \int_{\Gamma_5} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_5}\right) U \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} d\Gamma \quad (12)$$

其中 $\varphi_{1A}(p_1) = \varphi_1(x_A, p_1, k)$, (12) 式便为求解地表电位谱的公式。当知道了边界 Γ_4 , Γ_5 上的 U 值后, 利用上式便可求得地面 Γ_1 上的 U 值。

2. 设 P 点是在边界 Γ_4 上的任一点, $p=p_4 \in \Gamma_4$ 。

则与上同理, 分别对区域 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5$ 用格林公式, 利用边值关系, 经过数学推导, 可得第二个积分方程:

$$\left[\frac{1}{2\rho_4} + \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_4}\right)\omega_{41}/(4\pi)\right]U(p_4) = I \cdot \varphi_{1A}(p_4)/2 - \int_{\Gamma_4} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_4}\right) U \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\Gamma - \frac{\rho_2}{\rho_1} \int_{\Gamma_5} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_5}\right) U \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} d\Gamma \quad (13)$$

其中, ω_{41} 是 p_4 点对区域 Ω_4 所张的立体角, $\varphi_{1A}(p_4) = \varphi_1(x_A, p_4, k)$ 。

3. 设 P 点是在边界 Γ_5 上的任一点, 此时令 $P=p_5 \in \Gamma_5$ 。

则分别对这五个区域重新用格林公式, 并利用边值关系 (4) 式, 基本解满足的方程及边界条件 (7), (8) 式, 经过一定的数学处理后可得第三个积分方程:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \left[\frac{1}{2\rho_5} + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_5}\right)\omega_{52}/(4\pi)\right]U(p_5) = I \psi_{1A}(p_5)/2 - \int_{\Gamma_4} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_4}\right) U \frac{\partial \psi_1}{\partial n} d\Gamma - \frac{\rho_2}{\rho_1} \int_{\Gamma_5} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_5}\right) U \frac{\partial \psi_2}{\partial n} d\Gamma \quad (14)$$

其中 ω_{52} 是 p_5 点对区域 Ω_5 所张的立体角, $\psi_{1A}(p_5) = \psi_1(x_A, p_5, k)$ 。至此, 所需的积分方程都已导出。积分方程 (12), (13), (14) 式互不独立, 故需要联立求解。由 (13), (14) 式离散化后可联立求解并解出边界 Γ_4, Γ_5 上各节点的 U 值, 然后将这些值带入 (12) 式后就就可求得地表上的 $U(p_1)$ 值, 再利用傅氏反变换 (3) 式对 $U(p_1)$ 进行反变换就可求得地表的电位 $u_1(x, y, z)$ 值。

在文献 [5] 中, 对在二层水平介质中存在横向不均匀体时所得的方程只需进行独立求解即可求出未知量。而在本文中, 对积分方程 (12)、(13)、(14) 式离散化后就不能分别进行独立求解, 而必须将它们联立求解方可解出未知量, 较之文献 [5], 这给数值计算增加了难度。实际上这是对文献 [5] 中所用方法的进一步推广。显然, 在积分方程 (12) 式里, 当令 $\rho_1 = \rho_4, \rho_2 = \rho_5$ 时, 就可得到三层水平层状介质的解, 当令区域 Ω_4, Ω_5 无限小时, 在 (12) 式中边界积分的贡献亦趋近于零, 此时同样可得到三层水平层状介质的解。当令 $\rho_2 = \rho_3 = \rho_5$ 时, 方程 (12)、(13) 就退化到了二层起伏介质的情形。当令 $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_5$ 时, 积分方程 (12) 就退化到了均匀介质的情形。由此还可看到, 由于区域 Ω_4, Ω_5 的存在即横向不均匀体的存在, 边界 Γ_4, Γ_5 的电荷分布决定着地表电位分布对均匀水平层状介质电位分布的畸变。

三、边界单元法

用直线单元对边界 Γ_1 , Γ_4 和 Γ_5 进行剖分, 设 Γ_1 上有 N_S 个节点, Γ_4 上有 N_1 个节点, Γ_5 上有 N_2 个节点. $NE = NS + N_1$, $ND = NE + N_2$. 将 (12)、(13) 和 (14) 式中的边界积分分解为诸单元 Γ_i 上的积分之和. 如在 (12) 式中, 对第 i 个节点, 可写出如下离散化的积分方程:

$$U(p_i) = \rho_1 \cdot I \varphi_{1A}(p_i) - 2\rho_1 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_4} \right) \sum_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} U \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\Gamma - 2\rho_2 \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_5} \right) \sum_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} U \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} d\Gamma \quad (15)$$

单元 Γ_i 上的积分用高斯积分 [1] 及尤拉变换法 [6] 计算. 因为在 (12) 式中, 边界积分中的 U 函数都是一次的, 所以各单元的积分之和将是各节点上 U 值的一次函数, 于是上式可写成:

$$U(p_i) = \rho_1 \cdot I \cdot \varphi_{1A}(p_i) - \sum_{j=N_S+1}^{NE} F_{ij} U(p_j) - \sum_{j=NE+1}^{ND} F_{ij} U(p_j) \quad (16)$$

其中 F_{ij} 是与节点 ij 有关的函数.

同理, 在 (13) 式中, 对第 m 个节点, 可写出:

$$\left[\frac{1}{2\rho_4} + \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_4} \right) \frac{\omega_{m1}}{4\pi} \right] U(p_m) = I \cdot \varphi_{1A}(p_m) / 2 - \sum_{j=N_S+1}^{NE} F_{mj} U(p_j) - \sum_{j=NE+1}^{ND} F_{mj} U(p_j) \quad (17)$$

对边界 Γ_4 上的每个节点都得到如上一个分程, 对于 Γ_4 上全部节点, 得到一个由 N_1 个方程组成的线性代数方程组:

$$\omega \cdot U_m = U_0 - F_{m1} U_m - F_{m2} U_n \quad (18)$$

其中

$$U_m = [U_{m+1}, U_{m+2}, \dots, U_{mN_1}], U_n = [U_{NE+1}, U_{NE+2}, \dots, U_{ND}]$$

$$U_0 = I \cdot [\varphi_{1A}(p_{NS+1}), \varphi_{1A}(p_{NS+2}), \dots, \varphi_{1A}(p_{NE})] / 2 ;$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\rho_4} + \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_4} \right) \frac{\omega_{11}}{4\pi} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{2\rho_4} + \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_4} \right) \frac{\omega_{N_1}}{4\pi} \end{bmatrix} ;$$

$$F_{m1} = \begin{bmatrix} F_{NS+1, NS+1} & F_{NS+1, NS+2} & \dots & F_{NS+1, NE} \\ F_{NS+2, NS+1} & F_{NS+2, NS+2} & \dots & F_{NS+2, NE} \\ \vdots & & & \\ F_{NE, NS+1} & F_{NE, NS+2} & \dots & F_{NE, NE} \end{bmatrix} ; F_{m2} = \begin{bmatrix} F_{NS+1, NE+1} & F_{NS+1, NE+2} & \dots & F_{NS+1, ND} \\ F_{NS+2, NE+1} & F_{NS+2, NE+2} & \dots & F_{NS+2, ND} \\ \vdots & & & \\ F_{NE, NE+1} & F_{NE, NE+2} & \dots & F_{NE, ND} \end{bmatrix} .$$

在 (14) 式中, 对第 n 个节点, 可写出:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \left[\frac{1}{2\rho_5} + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_5} \right) \frac{\omega_{N_2}}{4\pi} \right] U(p_n) = I\psi_{1A}(p_n)/2 - \sum_{j=N_2+1}^{NE} F_{nj}U(p_j) - \sum_{j=NE+1}^{ND} F_{nj}U(p_j) \quad (19)$$

对 Γ_5 上每个节点都可得到如上一个方程，对于 Γ_5 上全部节点，得到一个由 N_2 个方程组成的线性代数方程组：

$$\omega_{n2}U_n = V_0 - F_{n1}U_m - F_{n2}U_n \quad (20)$$

其中

$$V_0 = I[\psi_{1A}(P_{NE+1}), \psi_{1A}(P_{NE+2}), \dots, \psi_{1A}(P_{ND})] ;$$

$$\omega_{n2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\rho_5} + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_5} \right) \frac{\omega_{NE+1,2}}{4\pi} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{2\rho_5} + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_5} \right) \frac{\omega_{ND,2}}{4\pi} \end{bmatrix} ;$$

$$F_{n1} = \begin{bmatrix} F_{NE+1,NS+1} & F_{NE+1,NS+2} & \dots & F_{NE+1,ND} \\ F_{NE+2,NS+1} & F_{NE+2,NS+2} & \dots & F_{NE+2,ND} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{ND,NS+1} & F_{ND,NS+2} & \dots & F_{ND,NE} \end{bmatrix} ; F_{n2} = \begin{bmatrix} F_{NE+1,NE+1} & F_{NE+1,NE+2} & \dots & F_{NE+1,ND} \\ F_{NE+2,NE+1} & F_{NE+2,NE+2} & \dots & F_{NE+2,ND} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{ND,NE+1} & F_{ND,NE+2} & \dots & F_{ND,NE} \end{bmatrix} .$$

由 (18)、(20) 两式联立求解，可得到 U_m 及 U_n ，然后将其代入 (16) 式便可求得地表上任一点 i 处的 $U(p_i)$ ，然后对 $U(p_i)$ 进行傅氏反变换即可求得地表 i 点处的电位值。

四、算例

用本文方法对三层介质中下两层为上隆矩形起伏的模型进行了计算。在公式 (12)、(13)、(14) 中，令 $\rho_4 = \rho_2$ ， $\rho_5 = \rho_3$ 即可得此模型，见图 2。

图 3—8 是中间梯度法的视电阻率曲线。供电极距 AB 是一公里，测量极距 $MN = 20$ 米。在图 3 中，下伏两层介质都是高阻层，由于第一层介质中矩形凸起较高，即 $b_1 = 90$ 米，第二层介质中矩形凸起只有 10 米，故 ρ_s 曲线在矩形凸起上方相对于三层水平曲线有较大的变化。这种变化主要来自于第一层介质起伏高度。图 4 是当矩形起伏高度有所下降时 ($b_1 = 40$ 米时) 的中梯曲线，这时层状起伏介质的 ρ_s 曲线相对于三层水平介质曲线的畸变不如图 3 中的畸变大。在图 7、图 8 中， $\rho_1 = 1\Omega\text{-m}$ ， $\rho_2 = 20\Omega\text{-m}$ ， $\rho_3 = 800\Omega\text{-m}$ ，即最下伏层是高阻层，由于第一层介质是水平的，无起伏，只有第二层介质存在起伏，故 ρ_s 曲线在矩形起伏上方相对于三层水平介质曲线有所增大，但这个增大值不如图 3、图 4 中的增大值明显，这表明第一层介质中的矩形起伏对 ρ_s 曲线的影响更大，而第二层介质中的矩形起伏对 ρ_s 曲线的影响较小。图 5 和图 6 是下伏两层介质都为低阻体时的中梯 ρ_s 曲线，其中 ρ_1 是 500 欧米， $\rho_2 = 1$ 欧米， $\rho_3 = 0.5$ 欧米。此时 ρ_s 曲线在矩形起伏上方要比三层水平曲线小，它随着 b_1 的增大而减小。

图 9 和图 10 分别是下伏两层介质为高阻层和低阻层时的视电阻率测深曲线。在图 9

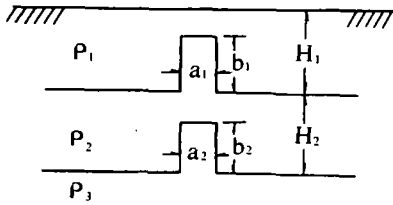


图 2

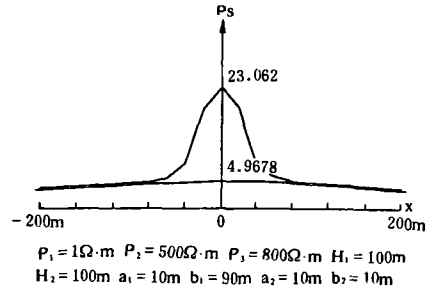


图 3

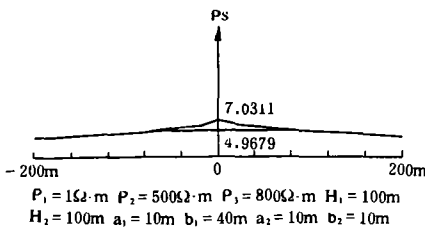


图 4

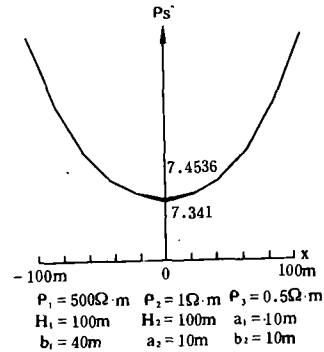


图 5

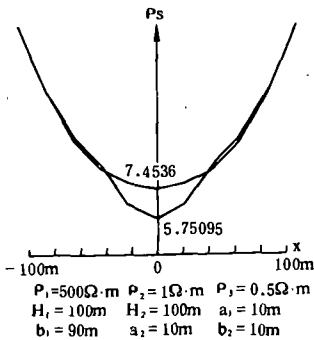


图 6

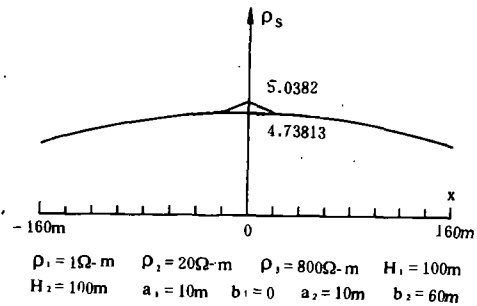


图 7

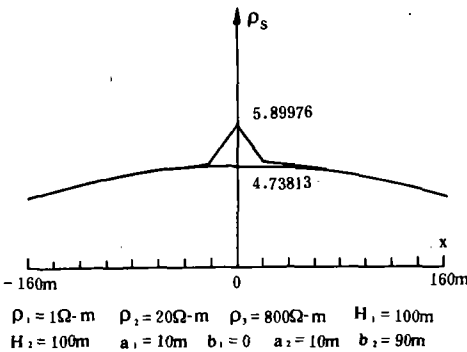


图 8

中, $\rho_1 = 1\Omega \cdot m$, $\rho_2 = 100\Omega \cdot m$, $\rho_3 = 300\Omega \cdot m$ 。曲线③是三层水平介质的测深曲线; 曲线②是第一层介质中矩形起伏为 30 米高、10 米宽, 第二层介质中矩形起伏为 1 米高、10 米宽时的测深曲线; 曲线①是第一层介质中矩形起伏为 50 米高、10 米宽, 第二层介质中矩形起伏为 1 米高、10 米宽时的测深曲线。由图 9 可看到, 由于第一层介质中矩形起伏高度的不同, 在矩形起伏正上方地表观测点的测深曲线也不同, 当 b_1 值越大, 则测深曲线的位置也越

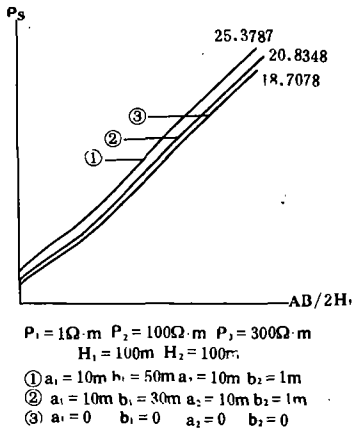


图9

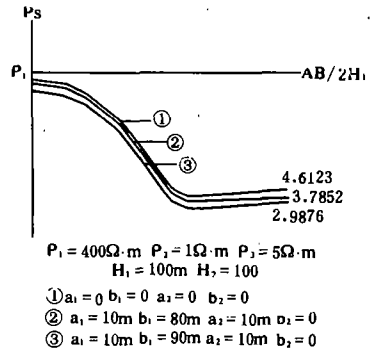


图10

高，这说明第一层介质起伏越高，视电阻率曲线相对于三层水平层状介质曲线的畸变也越大。图10是下伏两层介质为低阻时的测深曲线，当 b_1 值越大时，测深曲线的位置也越低。总之，无论是高阻曲线或是低阻曲线， ρ_s 测深曲线对第一层介质中矩形起伏的变化反映还是明显的。

在地电阻率法中，研究视电阻率随时间的变化是地电预报地震的主要目的。我们用本文方法对第一层介质中真电阻率随时间变化时的情景作了一些计算。图11是当第一层介质起伏高度为80米、 ρ_1 随时间作正弦变化时的视电阻率曲线随时间变化图，在图中可以看到，当 ρ_1 以不同的幅度随时间变化时， ρ_s 曲线的形态变化差异还是相当大的。

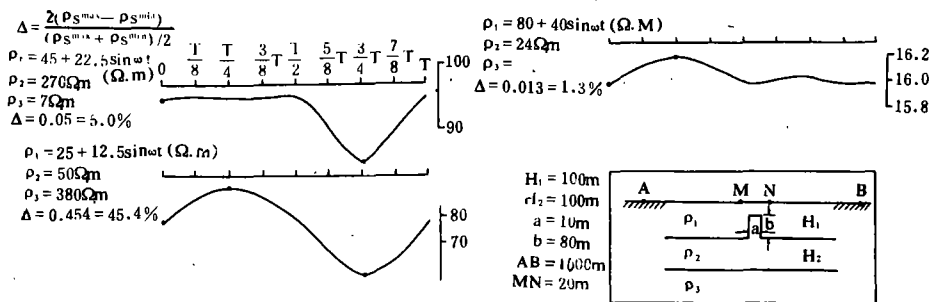


图11

五、结论

本文通过对点源二维起伏层状介质边界单元方法的研究，阐述了边界单元方法原理，拓宽了边界单元法在电法勘探中的应用范围，在理论推导中对层状起伏介质中水平边界积分的消除以及对边界积分中电位谱法向导数的消除都是成功的，这就大大减少了未知量的个数，大量地节省了计算机内存。本方法所需的计算机内存很小，可在微机上进行计算。

由理论分析可以看到,本文也适用于三层水平介质中夹有任意形状的异常体的问题。它对地电阻率法的台址条件、台站环境干扰影响的研究及对复杂地电条件下视电阻率资料的解释都有较大的理论意义和实际意义。

(本文1991年10月31日收到)

参考文献

- [1] Brebbia, C. A., The Boundary Element for Engineers, Pentech Press, 1977.
- [2] 徐世浙, 点源二维地电剖面的边界单元解法, 桂林冶金地质学院学报, Vol. 4, No. 4, 1984.
- [3] 徐世浙, 三维地形均匀各向异性岩石点电源场的边界单元解, 山东海洋学院学报, Vol. 15, No. 2, 1985.
- [4] 田宪漠, 点源场电阻率法三维地形改正的边界元, 成都地质学院学报, Vol. 13, No. 3, 1986.
- [5] 马钦忠、钱家栋, 二维层状介质点电源边界单元解, 西北地震学报, Vol. 13, No. 2, 1991.
- [6] 钱家栋等, 水平层状介质视电阻率高精度计算公式及其误差分析, 西北地震学报, Vol. 8, No. 2, 1986.

THE BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR SOLVING THE 2—D GEOELECTRIC FIELD OF A POINT SOURCE IN THREE LAYERED MEDIUM WITH FLUCTUATED INTERFACES

Qian Jiadong, Ma Qinzhong

(Earthquake Research Institute of Lanzhou, SSB, China)

Abstract

Based on the paper [5], this paper takes the 2—D model of three layered medium, in which the second layer and the third layer are convex, and discusses the application of boundary element method for calculating apparent resistivity. The proper basic solution is selected, so that the integral calculation along the horizontal parts in the integral equations are avoided, and the normal derivatives of electric potential on boundaries are managed to be eliminated in the theory. So the number of all needed boundary cut joints and unknowns are much less, algebraic equation sets are on a smaller scale, computer memory and time are saved a lot. This study supplies some convenient conditions for furtherly solving the 2-D and 3—D problems of multi—layered medium (e. g. more than three layered model) which contains inhomogeneities.