第8卷 第4期 西北地震学报 Vol.8, No.4
1986年12月 NORTHWESTERN SEISMOLOGICAL JOURNAL Dec., 1986

通用流变介质中地震波的传播特性*

聂永安
（国家地震局兰州地震研究所）

摘　　要

本文采用一种通用流变介质模型，从理论上详细讨论了地震波在该介质中的传播特性，并对流变介质中准静态位错产生的位移场及地壳介质品质因子Q作了讨论。

前　　言

现有经验和观测事实都说明，地球并不是一个简单的弹性球体。把它视作流变介质，从而研究在这种介质中传播的地震波及其特性，具有一定的理论和实际意义。

本文在前人工作基础上，根据实验事实，采用一种通用流变介质模型。该模型既包含了Maxwell体不可逆剩余应变成分，也包含了Voigt体的弹性后效成分及小作用时介质具有的瞬时弹性效应，在变化趋势上和实验结果符合得较好。此外这种模型涉及的参数较多，经适当的变化就可得出当今地学中应用的数种模型，因此所得结果具有一定的普遍性。文中给出了这种模型的本构方程及在讨论波传播问题时的波动方程，从对应原理出发，讨论了弹性介质及流变介质问题在数学处理方法上的相似性，给出了通用流变介质中波传播时能量守恒定律的一般表达式，分析了此种介质中存在的波型及其特性，着重以入射广义P波为例详细讨论了波遇到两种介质交界面时的反、折射特性、频率特性、衰减特性、波型转换等，并与弹性介质的相应结果作了类比，最后给出了震前断层预滑和断裂预扩展这两类长周期波动源产生的位移场形式表达式，并对Q值与频率的关系作了一些讨论。

一、通用流变介质中地震波传播问题及传播时的能量关系

本文选取的通用流变介质模型如图1所示。图中μ代表弹性体，η代表内摩擦元件，S_{oij}为刚塑性元件。根据材料的静水压力实验结果[10]，则该模型的用算子表示的本构关系为[2]：

*本文是作者1984年硕士研究生毕业论文缩写稿，作者现工作单位：天津市地震局

$$
Sij=\begin{cases}\dfrac{Soij+2(q_0+q_1D+q_2D^2)\varepsilon_{ij}}{p_0+p_1D+p_2D^2} & (S_{ij}>Soij)\\ 2\mu_1\varepsilon_{ij} & (S_{ij}<Soij)\end{cases}
$$

$$
\sigma_{mm}=3Ke_{mm} \qquad (1)
$$

其中D为对时间的微分算子　　$D=\dfrac{\partial}{\partial t}$，$D^2=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$
q_0=\mu_0 \qquad q_1=\eta_1+\frac{(\eta_1+\eta_2)\mu_0}{\mu_2} \qquad q_2=\frac{\eta_1\eta_2}{\mu_2}
$$

$$
p_0=1+\frac{\mu_0}{\mu_1} \qquad p_1=\frac{(\mu_0+\mu_1)(\eta_1+\eta_2)+\mu_2\eta_1}{\mu_1\mu_2} \qquad p_2=\frac{\eta_1\eta_2}{\mu_1\mu_2}
$$

诸μ为弹性剪切模量，诸η为内摩擦系数，S_{ij}、ε_{ij}为应力（σ_{ij}）、应变（e_{ij}）偏量，Soij为流动极限，由Mises屈服条件决定。方程（1）说明介质形状的改变是流变的，而体积的改变则可认为是弹性的。在讨论传播问题时，可以认为应力是简谐变化的，相应地应变也是按简谐变化的，这样就可认为介质中的粒子只在弹性阶段和瞬时蠕变阶段中振动，因此可取Soij＝0，即有：

$$
Sij=2M(D)\varepsilon ij \qquad \sigma_{mm}=3Ke_{mm} \qquad (2)
$$

其中　$M(D)=(q_0+q_1D+q_2D^2)/(p_0+p_1D+p_2D^2)$

由于流变介质中动量方程、动量矩方程及连续性方程与弹性体中一样，因此波动方程为：

$$
\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=[K+\tfrac{1}{3}M(D)]\nabla(\nabla\cdot\vec{u})+M(D)\nabla^2\vec{u}+\rho\vec{f} \qquad (3)
$$

即波动方程（3）是把弹性介质中波动方程中的μ用M（D）代替而得到的。

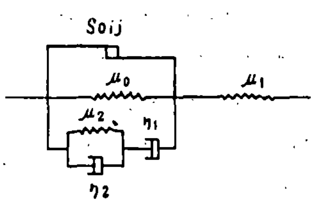

图1　通用流变介质模型
Fig.1　A common rheological medium model

对弹性介质及流变介质中的方程施行Fourier变换，则两种介质中位移谱满足的方程也相似。若用K代替k，用M(iω)代替μ，就可直接从弹性体位移谱满足的方程得出流变介质中位移谱所满足的方程。如果在某一组边界条件下，弹性问题位移谱的表达式为$\hat{\vec{u}}(\vec{x},\omega,\mu,k)$，则与此组边界条件相同的通用流变介质问题位移谱可以表示为$\hat{\vec{u}}(\vec{x},\omega,M,K)$，相应的位移为：

$$
\vec{u}(\vec{x},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\vec{u}}(\vec{x},\omega,M,K)e^{i\omega t}d\omega \qquad (4)
$$

这样流变介质问题的求解，就转化为边界条件相同的弹性问题的求解。

波在通用流变介质中传播时，所确定的能量方程为[1]：

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int_V\varepsilon dv+\int_V Ddv=-\oint_S\vec{I}\cdot\vec{ds} \qquad (5)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\text{其中}\quad & \varepsilon=\tfrac{1}{2}\rho\dot{u}_R^2+\tfrac{1}{2}(K+\tfrac{4}{3}M_R)\Delta_R^2+\tfrac{1}{2}M_R u_{R\,i;k}^2\\
& D=\frac{1}{\omega}\left[\tfrac{4}{3}M_I\dot{\Delta}_R^2+M_I\ \dot{u}_{R\,i;k}^2\right]\\
& \vec{I}=(K+\tfrac{4}{3}M_R)(-\Delta_R)\dot{\vec{u}}_R-M_R(\nabla\vec{u}_R)\cdot\dot{\vec{u}}_R\\
& \quad+\frac{1}{\omega}\left[\tfrac{4}{3}M_I(-\dot{\Delta}_R)\dot{\vec{u}}_R-M_I(\nabla\dot{\vec{u}}_R)\cdot\dot{\vec{u}}_R\right]
\end{aligned}\right\}\qquad(6)
$$

$$
\vec{u}=\vec{u}_R+i\vec{u}_I\qquad M=M_R+iM_I\qquad \Delta R=\nabla\cdot\vec{u}_R\qquad \dot{\vec{u}}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}
$$

ε为动能与位能密度之和，D表示单位体积中能量的耗散率，$\vec{I}$为能流。上式实际上就是能量守恒定律在通用流变介质中的具体表述。由于对通用流变介质而言，$M_R>0$，$M_I>0$，而$\dot{\Delta}_R^2$、$\dot{u}_{R\,i;k}^2$不是负数，这样$D>0$，即耗散的能量随时间的增大而增大。即此种介质为耗散介质，具体表现为波的振幅随传播距离的增大而减小。

二、通用流变介质中地震波在界面上的反射与折射

经过证明得出在通用流变介质中只存在两种平面波型——广义p波及广义S波：

$$
U_1=B_1\exp(-\vec{A}\cdot\vec{r})\exp[i(\omega t-\vec{p}\cdot\vec{r})]\qquad(7)
$$

若取$k^2=(\vec{p}-i\vec{A})\cdot(\vec{p}-i\vec{A})$，则两种波分别满足：

$$
k_s^2=\frac{\rho\omega^2}{M}=\frac{\omega^2}{V_s^2}\qquad\qquad k_p^2=\frac{\rho\omega^2}{K+\frac{4}{3}M}=\frac{\omega^2}{V_p^2}\qquad(8)
$$

若将位移场分解为$\vec{u}=\nabla\phi+\nabla\times\vec{\psi}$，那么与kp相应的位移场为$\nabla\phi$，这是一种无旋场；与$k_s$相应的位移场为$\nabla\times\vec{\psi}$，这是一种无散场。前一种波场就称为广义p波，后一种波场称为广义s波。p波、s波的位势函数分别为：

$$
\phi=B\exp(-\vec{A}\cdot\vec{r})\exp[i(\omega t-\vec{p}\cdot\vec{r})]\qquad(9)
$$

$$
\vec{\psi}=\vec{B}\exp(-\vec{A}\cdot\vec{r})\exp[i(\omega t-\vec{p}\cdot\vec{r})],\quad(\nabla\cdot\vec{\psi}=0)\qquad(10)
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
&\vec{p}\cdot\vec{p}-\vec{A}\cdot\vec{A}=R_e(k^2)\\
&\vec{p}\cdot\vec{A}=|\vec{p}||\vec{A}|\cos\gamma=-\tfrac{1}{2}I_m(k^2)
\end{aligned}\right\}\qquad(11)
$$

对通用流变介质有（对p波$k=k_p$，对s波$k=k_s$）：

$$
I_m(k)<0,\ I_m(k^2)<0,\ R_e(k)>0,\ R_e(k^2)>0\qquad(12)
$$

相速度为：

$$
\vec{v}=\frac{\omega\vec{p}}{|\vec{p}|^2}\qquad(13)
$$

即相速度与传播矢量同向。传播方向上的振幅：

$$
\exp(-\vec{A}\cdot\vec{r})=\exp(-\vec{A}\cdot\vec{r}_0)\exp(-\omega\Delta t\vec{A}\cdot\vec{p}/|\vec{p}|^2)
$$

由于$\vec{p}\cdot\vec{A}>0$，所以振幅在传播方向上不能增大。而$|\vec{A}|\neq 0$、$0\leqslant\gamma<\frac{\pi}{2}$，因此在通用流变介质中只能传播衰减的均匀波和衰减的非均匀波。$\vec{p}$与$\vec{A}$之间的夹角反映了波的非均匀程度。

对于由位势函数（9）所确定的p波，介质粒子在$\vec{p}$、$\vec{A}$平面作椭园振动。粒子旋转方向从$\vec{p}$到$\vec{A}$。在$\gamma=0$时，粒子的椭园振动退化为沿传播方向的线振动。这类似于弹性介质中的p波。对于由（10）式所确定的s波，复振幅$\vec{B}=B_0\vec{n}+\vec{B}'$，其中$\vec{n}\cdot\vec{A}=0$，$\vec{n}\cdot\vec{p}=0$，$\vec{B}'\cdot(\vec{p}\times\vec{A})=0$。与$B_0\vec{n}$相应的s波可称为SV波，其介质粒子的振动类似于p波。与振幅$\vec{B}'$相应的s波称为SH波，其粒子垂直于$\vec{p}$、$\vec{A}$平面作线振动。均匀的SV、SH波粒子的振动均与传播方向垂直。

1.界面反射、折射的一般情况

如取$\vec{p}$、$\vec{A}$所在的平面为x_1x_3平面，则p、s波的位移势函数为（9）、（10）式所示的形式。其中对SV波$\vec{B}=B_0\vec{e}_2$，对SH波$\vec{B}=z_1\vec{e}_1+z_3\vec{e}_3$。由于$\vec{A}$、$\vec{p}$在$x_1x_3$平面，$\phi$和$\psi$与$x_2$无关。p波位移场为$u_p=\nabla\phi$，S波位移场为$\vec{u}_s=\nabla\times\vec{\psi}$

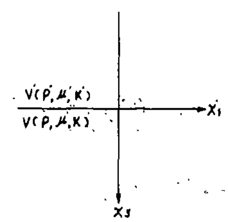

图2 所选用的坐标系

Fig. 2 Descartes coordinate

取如图2所示的坐标系，两种介质交界面为$x_3=0$，以p波入射，取入射p波的传播矢量$\vec{p}$和衰减矢量$\vec{A}$在x_1x_3平面内。那么$u_2=0$，$\sigma_{32}=0$。边界条件为：

$$\left.\begin{array}{l} u_1=u_1' \\ u_3=u_3' \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \sigma_{33}=\sigma_{33}' \\ \sigma_{31}=\sigma_{31}' \end{array}\right\} \tag{14}$$

因此就产生四个与u_1、u_3相关的波，从存在的波型及能量守恒关系分析，这四种波是反射的p波、sv波及折射的p波。sv波、以p波入射到自由界面时，边界条件为：

$$\sigma_{33}=0 \qquad \sigma_{31}=0 \tag{15}$$

因此只产生一个反射p波和一个反射sv波。

在介质V中，p波位移场$\vec{u}_p=\nabla\phi$满足方程：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=v_p^2\nabla^2\phi \qquad v_p^2=(K+\frac{4}{3}M)/\rho \tag{16}$$

SV波位移场$\vec{u}_s=\nabla\times\vec{\psi}$（$\nabla\cdot\vec{\psi}=0$）满足方程：

$$\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2}=v_s^2\nabla^2\vec{\psi} \qquad v_s^2=M/\rho \tag{17}$$

在介质V'中，p波位移场$\vec{u}_p'=\nabla\phi'$

$$\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2}=v_p'^2\nabla^2\phi' \qquad v_p'^2=(K'+\frac{4}{3}M')/\rho' \tag{18}$$

SV波位移场$\vec{u}_s'=\nabla\times\vec{\psi}'$（$\nabla\cdot\vec{\psi}'=0$）

$$\frac{\partial^2\vec{\psi}'}{\partial t^2}=v_s'^2\nabla\vec{\psi}' \qquad v_s'^2=\frac{M'}{\rho'} \tag{19}$$

满足（16）式而且$\vec{p}$、$\vec{A}$在x_1x_3平面内的入射平面简谐P波位势函数为：

$$\left.\begin{array}{l}\phi=B\exp(-\vec{A}\cdot\vec{r})\exp[i(\omega t-\vec{p}\cdot\vec{r})]\\ \text{其中}\quad \vec{p}=f_R\vec{e}_1-g_R\vec{e}_3 \qquad \vec{A}=-f_I\vec{e}_1+g_I\vec{e}_3\\ f=f_R+if_I \quad g=g_R+ig_I \quad f^2+g^2=k_P^2 \quad k_p^2=\omega^2/v_P^2\end{array}\right\} \tag{20}$$

取反射P波的位移函数为：

$$\left.\begin{array}{ll}\phi_{(\bar{P})}=B_{(\bar{P})}\exp(-\vec{A}_{(\bar{P})}\cdot\vec{r})\exp[i(\omega_{(\bar{P})}t-\vec{P}_{(\bar{P})}\cdot\vec{r})] & \\ \text{其中}\quad \vec{P}_{(\bar{P})}=f_{(\bar{P})R}\vec{e}_1+g_{(\bar{P})R}\vec{e}_3 & \vec{A}_{(\bar{P})}=-f_{(\bar{P})I}\vec{e}_1-g_{(\bar{P})I}\vec{e}_3\\ f_{(\bar{P})}=f_{(\bar{P})R}+if_{(\bar{P})I} & g_{(\bar{P})}=g_{(\bar{P})R}+ig_{(\bar{P})I}\\ f^2_{(\bar{P})}+g^2_{(\bar{P})}=k^2_{(\bar{P})} & k^2_{(\bar{P})}=\omega^2_{(\bar{P})}/v_p^2\end{array}\right\} \tag{21}$$

(21)式也满足波动方程（16）。

取满足V中波动方程（17）的反射SV波势函数：

$$\left.\begin{array}{ll}\vec{\psi}_{(\bar{SV})}=B_{(\bar{SV})}\vec{e}_2\exp(-\vec{A}_{(\bar{SV})}\cdot\vec{r})\exp[i(W_{(\bar{SV})}t-\vec{P}_{(\bar{SV})}\cdot\vec{r})] & \\ \text{其中}\quad \vec{P}_{(\bar{SV})}=f_{(\bar{SV})R}\vec{e}_1+g_{(\bar{SV})R}\vec{e}_3 & \vec{A}_{(\bar{SV})}=-f_{(\bar{SV})I}\vec{e}_1-g_{(\bar{SV})I}\vec{e}_3\\ f_{(\bar{SV})}=f_{(\bar{SV})R}+if_{(\bar{SV})I} & g_{(\bar{SV})}=g_{(\bar{SV})R}+ig_{(\bar{SV})I}\\ f^2_{(\bar{SV})}+g^2_{(\bar{SV})}=k^2_{(\bar{SV})} & k^2_{(\bar{SV})}=\omega^2_{(\bar{SV})}/v_s^2\end{array}\right\} \tag{22}$$

取折射P波的位势函数为：

$$\left.\begin{array}{ll}\phi_{(P')}=B_{(P')}\exp(-A_{(P')}\cdot\vec{r})\exp[i(\omega_{(P')}t-\vec{P}_{(P')}\cdot\vec{r})] & \\ \text{其中}\quad \vec{P}_{(P')}=f_{(P')R}\vec{e}_1-g_{(P')R}\vec{e}_3 & \vec{A}_{(P')}=-f_{(P')I}\vec{e}_1+g_{(P')I}\vec{e}_3\\ f_{(P')}=f_{(P')R}+if_{(P')I} & g_{(P')}=g_{(P')}R+ig_{(P')I}\\ f^2_{(P')}+g^2_{(P')}=k^2_{(P')} & k^2_{(P')}=\omega^2_{(P')}/v_p'^2\end{array}\right\} \tag{23}$$

取折射SV波的位移函数为：

$$\left.\begin{array}{ll}\psi_{(SV')}=B_{(SV')}\vec{e}_2\exp(-\vec{A}_{(SV')}\cdot\vec{r})\exp[i(\omega_{(SV')}t-\vec{P}_{(SV')}\cdot\vec{r})] & \\ \text{其中}\quad \vec{P}_{(VS')}=f_{(SV')R}\vec{e}_1-g_{(SV')R}\vec{e}_3 & \vec{A}_{(SV')}=-f_{(SV')I}\vec{e}_1+g_{(SV')I}\vec{e}_3\\ f_{(SV')}=f_{(SV')R}+if_{(SV')I} & g_{(SV')}=g_{(SV')R}+ig_{(SV')I}\\ f^2_{(SV')}+g^2_{(SV')}=k^2_{(SV')} & k^2_{(SV')}=\omega^2_{(SV')}/v_S'^2\end{array}\right\} \tag{24}$$

（23）、（24）式分别满足V′中的波动方程（18）、（19），那么介质V中的总位移场为：

$$\vec{u}=\nabla(\phi+\phi_{(\bar{P})})+\nabla\times\vec{\psi}_{(\bar{SV})} \tag{25}$$

介质V′中的总位移场为：

$$\vec{u}'=\nabla\phi_{(P')}+\nabla\times\vec{\phi}_{(SV')} \tag{26}$$

根据边界条件（14）得

$$\left.\begin{array}{l}\omega=\omega_{(\bar{P})}=\omega_{(\bar{SV})}=\omega_{(P')}=\omega_{(SV')}\\ f=f_{(\bar{P})}=f_{(\bar{SV})}=f_{(P')}=f_{(SV')}\end{array}\right\} \tag{27}$$

上式第一式表明，反射波、折射波的振动频率与入射波的相同。第二式为广义的Snell定

律。入射波、反射波及折射波的振幅关系为：

$$B_{(\bar{P})}=\frac{\Delta_{(\bar{P})}}{\Delta}B,\quad B_{(\bar{SV})}=\frac{\Delta_{(\bar{SV})}}{\Delta}B,\quad B_{(P')}=\frac{\Delta_{(P')}}{\Delta}B,\quad B_{(SV')}=\frac{\Delta_{(SV')}}{\Delta}B \tag{28}$$

而$\frac{\Delta_{(\bar{P})}}{\Delta}$，$\frac{\Delta_{(\bar{SV})}}{\Delta}$，$\frac{\Delta_{(P')}}{\Delta}$，$\frac{\Delta_{(SV')}}{\Delta}$就是反射折射系数。

其中

$$\Delta=\begin{vmatrix} f & -g_{(\bar{SV})} & -f & -g_{(SV')} \\ -g & -f & -g_{(P')} & f \\ M\eta^2 & -2Mfg_{(\bar{SV})} & -M'\eta'^2 & -2M'fg_{(SV')} \\ -2Mfg & -M\eta^2 & -2M'fg_{(P')} & M'\eta'^2 \end{vmatrix} \tag{29}$$

$$\Delta_{(\bar{P})}=\begin{vmatrix} -f & -g_{(\bar{SV})} & -f & -g_{(SV')} \\ -g & -f & -g_{(P')} & f \\ -M\eta^2 & -2Mfg_{(\bar{SV})} & -M'\eta'^2 & -2M'fg_{(SV')} \\ -2Mfg & -M\eta^2 & -2M'fg_{(P')} & M'\eta'^2 \end{vmatrix} \tag{30}$$

$$\Delta_{(\overline{sp})}=\begin{vmatrix} f & -f & -f & -g_{(SV')} \\ -g & -g & -g_{(P')} & f \\ M\eta^2 & -M\eta^2 & -M'\eta'^2 & -2M'fg_{(SV')} \\ -2Mfg & -2Mfg & -2M'fg_{(P')} & M'\eta'^2 \end{vmatrix} \tag{31}$$

$$\Delta_{(P')}=\begin{vmatrix} f & -g_{(\bar{SV})} & -f & -g_{(SV')} \\ -g & -f & -g & f \\ M\eta^2 & -2Mfg_{(\bar{SV})} & -M\eta^2 & -2M'fg_{(SV')} \\ -2Mfg & -M\eta^2 & -2Mfg & M'\eta'^2 \end{vmatrix} \tag{32}$$

$$\Delta_{(SV')}=\begin{vmatrix} f & -g_{(\bar{SV})} & -f & -f \\ -g & -f & -g_{(P')} & -g \\ M\eta^2 & -2Mfg_{(SV')} & -M'\eta'^2 & -M\eta^2 \\ -2Mfg & -M\eta^2 & -2M'fg_{(P')} & -2Mfg \end{vmatrix} \tag{33}$$

$$\eta^2=2f^2-k_s^2\qquad \eta'^2=2f^2-k_s'^2$$

从（28）式还可直接得出反射波的位相关系。

为了进一步讨论通用流变介质中波在遇到平面界面时的传播特性，利用图3表示的符号，其中γ表示传播矢量与衰减矢量之间的夹角，θ表示传播矢量与x_3轴之间的夹角。

从方程（20）—（24）及（27）可直接得：

$$\begin{aligned}|\vec{p}|\sin\theta&=|\vec{p}_{(\bar{P})}|\sin\theta_{(\bar{P})}=|\vec{p}_{(\bar{SV})}|\sin\theta_{(\bar{SV})}\\&=|\vec{p}_{(P')}|\sin\theta_{(P')}=|\vec{P}_{(SV')}|\sin\theta_{(SV')}\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}|\vec{A}|\sin(\theta-\gamma)&=|\vec{A}_{(\bar{P})}|\sin(\theta_{(\bar{P})}-\gamma_{(\bar{P})})=|\vec{A}_{(\bar{SV})}|\sin(\theta_{(\bar{SV})}-\gamma_{(\bar{SV})})\\&=|\vec{A}_{(P')}|\sin(\theta_{(P')}-\gamma_{(P')})=|\vec{A}_{(SV')}|\sin(\theta_{(SV')}-\gamma_{(SV')})\end{aligned} \tag{35}$$

引入波的相速度，（34）式可以写成：

$$
\begin{aligned}
|\vec{v}|\sin\theta &= |\vec{v}_{(\bar{P})}|/\sin\theta_{(\bar{P})} = |\vec{v}_{(\bar{SV})}|/\sin\theta_{(\bar{SV})} \\
&= |\vec{v}_{(P')}|/\sin\theta_{(P')} = |\vec{v}_{(SV')}|/\sin\theta_{(SV')}
\end{aligned} \tag{36}
$$

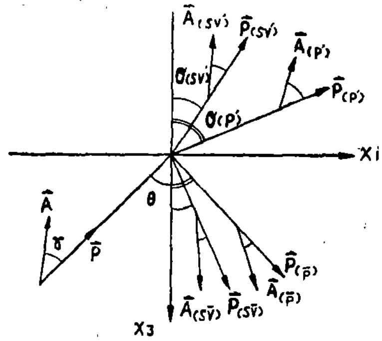

图 3　所采用的记号
FIg. 3　notation

（36）式即为反折射定律。同时（35）、（36）式指出，在表面处反折射波的视速度和衰减与入射波相等

由于 $f = f_{(\bar{P})}$，　$g = g_{(\bar{P})}$，所以有：

$$\theta = \theta_{(\bar{P})} \qquad \gamma = \gamma_{(\bar{P})} \qquad |\vec{v}| = |\vec{v}_{(\bar{P})}| \qquad |\vec{A}| = |\vec{A}_{(\bar{P})}| \tag{37}$$

即入射波中相应的量与反射波相同。入射波为均匀波，反射波也为均匀波；入射波为非均匀波反射波亦为非均匀波。

但对折射的P波和反、折射的SV波，以上结论均不成立，例如对折射P波

$$
\left.
\begin{aligned}
\theta_{(P')} &= \gamma_{(P')} + \sin^{-1}\left\{\frac{|\vec{A}|}{|\vec{A}_{(P')}|}\sin(\theta-\gamma)\right\} \\
|\vec{v}_{(P')}| &= \frac{|\vec{v}|}{\sin\theta}\sin\left\{\gamma_{(P')} + \sin^{-1}\left[\frac{|\vec{A}|}{|\vec{A}_{(P')}|}\sin(\theta-\gamma)\right]\right\}
\end{aligned}
\right\} \tag{38}
$$

即折射P波的相速度除了与它本身及入射波的衰减、非均匀度有关外，还与入射波的相速度及入射角有关。此结论对反、折射的SV波同样成立。

2.某些特例

如果介质V和V′有关系，即 $Q_{\bar{P}}^{-1} = Q_{P}'^{-1}$，在 $\vec{A}/\!/\vec{P}$ 时就有 $\vec{A}_{(P')}/\!/\vec{P}_{(P')}$。即在 $Q_{\bar{P}}^{-1} = Q_{P}'^{-1}$ 时，若入射P波为均匀波，反射、折射P波亦为均匀波。在 $Q_{\bar{P}}^{-1} \neq Q_{P}'^{-1}$ 时，折射P波不一定是均匀波。由此可看出，Q因子不但反映了波在通过介质时能量衰减的程度，而且反映了波在两种介质交界面处非均匀度的变化。

当非均匀波垂直入射时，仍然产生两个非均匀的反射波和两个非均匀的折射波，且都沿垂直于界面方向传播。特别当均匀波垂直入射时，只有反射和折射的P波而无SV波。

对一般情况，折射角不但与介质V′的参数有关，而且与入射波的频率有关。当由各种频率组成的P波以同一角度入射到界面时，折射波将成扇形散开，即通用流变介质具有发散作用，就象光学中的发散透镜一样。若V、V′都是弹性体，则所有频率的弹性波具同一折射角。

若V是弹性体，V′为流变介质，则折射波不存在临界角。此结论可以近似地应用于基岩—土壤界面。若V是流变介质，V′是弹性介质，只存在临界角 $\theta = \gamma$，此结论可以近似地应用于地幔与地壳界面。

当P波入射到自由界面——地面时，利用边界条件（15）可以证明只存在一个反射P波与一个反射SV波。它们的振幅、相位及频率等特性可用与前面类似的方法得到。

以上以入射P波为例，讨论了波在遇到两种不同介质界面时的传播特性，据此也可以讨论入射SH波和入射SV波的情形，得出的结论是大致相同的。

三、流变介质理论在地震学中的应用

1.流变介质中的准静态位错产生的位移场

冯德益[5]曾指出，断层预滑和断裂的预扩展（具有亚稳态特征的预扩展）是分别产生震前长周期形变波的两类可能的波动源。若把断层模型考虑为均匀各向同性通用流变介质半空间的自由表面下的一个矩形位错面，长2L，以任意倾角自上界面d延伸到下界面D；断层在直角坐标系（x_1、x_2、x_3）中的位置如图4所示。介质占据$x_3>0$的半空间，断层面上任意一点的坐标记为（ζ_1、ζ_2、ζ_3），且$\zeta_2=\zeta\cos\theta$，$\zeta_3=\zeta\sin\theta$，ζ是断层面宽度方向的坐标。Δu是位错的大小，与（ζ_1、ζ_2、ζ_3）无关，但却与时间有关。ψ为错动角。

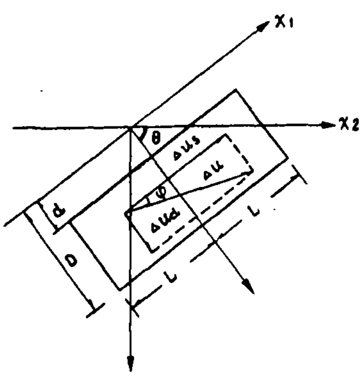

图4 断层模型

Fig. 4 fault model

陈运泰给出了均匀各向同性的弹性介质，在$\lambda\neq\mu$时，上述断层模型产生的位移场表达式[6]：

$$u_i=\frac{\Delta u}{4\pi}\{[\frac{3\mu}{3k+4\mu}N_1^i+\frac{6\mu}{3k+\mu}N_2^i+N_3^i]\cos\phi$$

$$+[\frac{3\mu}{3k+4\mu}M_1^i+\frac{6\mu}{3k+\mu}M_2^i+M_3^i]\sin\psi\}\|\qquad(39)$$

其中，N_j^i，M_j^i（i、j=1，2，3）是场点坐标及断层几何参数（x_1、x_2、x_3，L、d、D θ）的函数。“‖”的意义为：

$$f(\zeta_1、\zeta)\|=f(L、D)-f(L、d)-f(-L、D)+f(-L、d)\qquad(40)$$

若（39）式的Fourier变换为：

$$\hat{u}_i=\frac{\hat{\Delta u}}{4\pi}\{[\frac{3\mu}{3k+4\mu}N_1^i+\frac{6\mu}{3k+\mu}N_2^i++N_3^i]\cos\psi$$

$$+[\frac{3\mu}{3k+4\mu}M_1^i+\frac{6\mu}{3k+\mu}M_2^i+M_3^i]\sin\psi\}\|\qquad(41)$$

按照对应原理，边界条件相同的通用流变介质中如图4所示的位错Δu引起的位移谱函数为：

$$\hat{u}_i=\frac{\hat{\Delta u}}{4\pi}\{[\frac{3M}{3K+4M}N_1^i+\frac{6M}{3K+M}N_2^i+N_3^i]\cos\psi$$

$$+\left[\frac{3M}{3K+4M}M_1^i+\frac{6M}{3K+M}M_2^i+M_3^i\right]\sin\psi\}\|\qquad(42)$$

其中K为通用流变介质的体积模量，M为Fourier变换意义下的复切变模量。

从（4）式可直接求出上述断层在通用流变介质中位错产生的准静态位移场：

$$u_i(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)=\frac{\Delta u(t)}{4\pi}\{[f(t)N_1^i+g(t)N_2^i+N_3^i]\cos\psi$$

$$+[f(t)M_1^i+g(t)M_2^i+M_3^i]\sin\psi\}\|\qquad(43)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\Delta u(t)f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3M\widehat{\Delta u}}{3K+4M}e^{i\omega t}d\omega\\ \Delta u(t)g(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{6M}{3K+M}e^{i\omega t}d\omega\end{aligned}\right\}\qquad(44)$$

地壳内地震的发生，主要是由于地壳某些薄弱部位在应力增强的情况下发生破裂或原有断层发生粘滑的缘故。破裂和粘滑是地壳内发生地震的两类最主要的机制。同时许多实验和震例资料都证实了粘滑之前预滑的存在。这种震前预滑，由于其速度较地震时粘滑速度慢而又比断层的一般蠕动速度快，它可能发射一种不同于地震波的长周期波，因此预滑可能是震前长周期波的一种波源。对于地壳内某些薄弱部位发生的地震，它本质上可能是断层沿原有裂缝发生扩展错断的结果。因为在地壳中，到处存在着规模不等的断裂或裂缝，地震正是某些断裂或裂缝在应力作用下发生失稳扩展所造成的。与断层粘滑前的预滑相对应，断裂失稳扩展前同样存在着预扩展（亚稳态扩展），因而震前断裂的预扩展可能是产生震前长周期波的又一种波源。

可将粘滑之前的预滑——这类长周期波动源，视为原有断层的规模（L、d、D）不变，而位错幅度$\Delta u(t)$发生了变化。若$\frac{d}{dt}[\Delta u(t)]$极小时，即$\Delta u(t)$连续缓慢平稳变化，则表现为断层的蠕滑；若$\Delta u(t)$间歇性缓慢变化，则表现为断层的预滑（它较地震时的粘滑速度慢，但又比断层的一般蠕动速度快）。它们产生的波动场均可用（43）式表示。

对震前断裂亚稳态预扩展这类长周期波动源，可视为位错幅度不变或随时间极为缓慢的变化，断层的运动主要表现为断层的规模随时间的增大而增大。这类波动源产生的位移场同样可用（43）式表示，但同时又必须考虑二重积分的上下限随时间的变化，即

$$f(\zeta_1,\ \zeta)\|=f[L(t),\ D(t)]-f[L(t),\ d(t)]$$

$$-f[-L(t),\ D(t)]+f[-L(t),\ d(t)]\qquad(45)$$

其中$L(t)$，$D(t)$，$d(t)$为断裂的扩展函数。

对于实际的震源，在震前断层的预滑和断裂的亚稳态预扩展可能同时存在，即在断层两侧相对运动的同时伴随有破裂的传播，这样就要同时考虑两类波动源对位移场的贡献。

许多文章[5]、[7]、[13]对松潘、唐山、渤海地震前的地形变及长周期波动作过研究，所提供的事实均表明，震前断层的预滑与断裂的预扩展都不同程度的存在。

断层的预滑与断裂的预扩展不但在震前引起地形变而且会引起地下水位的异常及油井产油量的变化等，而且断层某些部位的蠕动与滑动使得断层上积累起来的应力和应变以无震形式逐渐释放，还可以造成断层闭锁地段应力集中，使这些地段有可能成为未来地震的震源

区。因此研究流变介质中的断层预滑与断裂预扩展对地震预报可能有一定的意义。

2.地壳Q因子的一些讨论

经过适当简化可以得到通用流变介质中Q因子与衰减的关系为：

$$A=\frac{\pi f}{Qv} \tag{46}$$

其中$A=|\vec{A}|$，$\omega=2\pi f$，f为频率，v为相速度。这里的衰减是由于介质的非完全弹性引起的。一般非弹性引起的衰减随频率的增高而变大，即

$$A\propto f^{\beta} \qquad \beta>0 \tag{47}$$

对地壳而言，相速度v虽有随频率增大而增大的趋势，但这种变化并不是很大的。为了讨论Q和A与频率的关系，暂时取v只随介质的参量发生变化，而不随波的频率变化，那么

$$Q\propto f^{1-\beta} \tag{48}$$

许多作者对Q值随频率的变化关系作过研究。有些偏差较大，但有一点是肯定的，即Q因子与频率具有明显的依赖关系，并随频率的增大而增大，即

$$1-\beta>0 \tag{49}$$

同时根据（47）式有：

$$0<\beta<1 \tag{50}$$

β值随各区域介质的不同而不同。

需要说明，几何扩散也是造成地震波振幅衰减的一个原因。几何扩散因子可在较大的数值范围内进行选择，而不太影响对资料的拟合程度。因此，计算Q的绝对精确值是不太实际的，对每个震相（因为不同震相Q值不同）只能给出一般的趋势。

为了说明Q值与频率的关系，本文用通用流变介质模型模拟地壳，进行了一些数值计算。结果表明：对给定的模型参数，波速随频率的变化不大，衰减系数随频率缓慢增大，而Q值几乎随频率线性增大。对于不同波型，Q值也不同。在相同的介质参数下，同一频率Q_p比Q_s值大，而A_p比A_s值小，这反映了内摩擦元件对S波的影响比P波的大。

此外计算结果还表明：对通用流变介质而言，内摩擦元件对地壳中的波速影响不大，地震波传播的速度主要取决于介质的瞬时弹性模量，但介质的粘性对Q值和衰减系数均有一定的影响。

本文是在冯德益老师指导下完成的，陈运泰、牛志仁两位老师仔细审阅了全文并提出十分宝贵的修改意见，在此一并表示衷心的感谢。

参考文献

〔1〕郭自强，固体中的波，地震出版社，1982.

〔2〕袁龙蔚，流变学概论，上海科学技术出版社，1961.

〔3〕冯德益，地震波理论与应用，地震出版社（待出版）.

〔4〕Sezawa, K, On the decay of waves in visco-elastic solid bodies, Bull Earthquake Research Inst.(Tokyo); Vol.3, PP.43－54, 1927.

〔5〕冯德益等，长周期形变波及其所反映的短期和临震地震前兆，地震学报，Vol.6，№1，1984.

〔6〕赵国光、张超，伴随前兆蠕动和震后滑动的准静态形变，地震学报，Vol.3，№3, 1981.

〔7〕陈运泰等，用大地测量资料反演的1976年唐山地震的位错模式，地球物理学报，Vol. 22，№3，1979.

〔8〕Lee E.H., Stress analysis in visco-elastic bodies, Q. Appl.Math., Vol.13, PP.183—190, 1955.

〔9〕E.S. Krebes, F. Hron, Synthetic seismograms for SH waves in a layered anelastic medium by asymptotic ray theory, Bull. Seism.Soc. Am., Vol.70, №6, 1980.

〔10〕J.C.Jaeger and N.G.W.Cook，岩石力学基础，中国科学院工程力学研究所译，科学出版社，1981.

〔11〕F.Thouvenot，地壳上部品质因子与频率的关系：一种深部地震测深的方法，世界地震译丛，№2，1984.

〔12〕M.Nicolas, B.Massinon, p.Mechler, M.Bouchon，西欧区域地震波的衰减，世界地震译丛，№2，1984.

〔13〕韩元杰，预滑与地震前兆——长周期波动研究，西北地震学报，Vol.6，№1，1984.

THE CHARACTERISTICS OF SEISMIC WAVE PROPAGATION IN THE COMMON RHEOLOGICAL MEDIUM MODEL

Nie Yongan

(*The Seismological Bureau of Tianjin*)

Abstract

In this paper, a common rheological medium model is used. The characteristics of seismic wave propagation in the medium is studied in detail. Lastly, the displacement fieled produced by quasi-static dislocation in the medium and Q-factor of the crust is discussed.