第8卷 第2期 西北地震学报 Vol.8, No.2
1986年6月 NORTHWESTERN SEISMOLOGICAL JOURNAL June, 1986

水平层状介质视电阻率的高精度计算公式及其误差分析

钱 家 栋
（国家地震局兰州地震研究所）

赵和云 张文孝
（宁夏地震局）

摘 要

为适应地电阻率法预报地震深入研究的需要，本文介绍了几种高精度计算水平层状介质视电阻率的公式及方法。对于MN→0的视电阻率计算，本文给出了$J_1(x)$滤波系数法的计算步骤，此外对二层、三层介质的传统级数求和法，给出了估算精度的公式；对于MN≠0的视电阻率计算，本文讨论了数值积分法和$J_0(x)$滤波系数法的计算步骤以及为提高精度所采取的技术措施，並且给出了一批用两种方法所得到的计算结果。

随着地震前兆研究的深入，无论在异常研究还是在干扰研究方面，单靠图象识别和相关分析已经不能满足需要了。从图象预报转向物理预报，探索干扰和异常变化在介质内所处的部位及其数量大小的问题已经开始成为人们关心的课题。地电阻率法中高精度计算公式的研究和运用正是在这种需求下逐渐发展起来的。

地电阻率法中视电阻率的计算与物探直流电法中的计算之主要区别在于精度要求不同，前者要求较高，而后者要求较低，这是由于它们各自研究的目标不同的缘故。在直流电法中，工作对象主要是电性结构随空间的变化；而地电阻率法则以一些固定的观测点上地电阻率随时间的演化特征为研究目标。根据多年来国内外的观测实践，与一些强地震相联系的地电阻率异常变化不过百分之几到百分之十几，因此其计算技术的精度要求非高不可。

地电阻率法源于物探直流电法，其原理到公式都是一致的，但如何达到既高精度又快速度的计算，目前还是一个探索中的问题。笔者曾经在水平层状介质（一维）问题中做过一些工作[1, 2]，在这里我们愿意将我们所用过的几个公式及其为提高精度的努力做一介绍，以供从事地震前兆研究的地电工作者研究和运用时参考，並期望引起讨论以推进这方面探索更加完善。

一、MN→0的视电阻率计算方法

几乎每一本电法勘探书籍中，都给出了水平层状介质视电阻率的计算公式——即无穷级数表达式，特别是适用一些简单计算的两层、三层情况，都有具体的形式。现在的问题是如何对计算结果进行精度估计，对此我们将作进一步的讨论。此外，还介绍一种目前物探上广为使用的核函数—$J_1(x)$滤波系数法。

1.级数求和法计算视电阻率的精度估计

在两层和三层介质的条件下，运用级数求和的方法计算视电阻率是非常迅速的。它们的计算公式分别为：

$$\rho_S=\rho_1\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_{12}^n}{\left[1+\left(\frac{2nh_1}{r}\right)^2\right]^{3/2}}\right\} \tag{1}$$

$$\rho_S=\rho_1\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_{12}^n}{\left[1+\left(\frac{2nh_1}{r}\right)^2\right]^{3/2}}+\right.$$
$$\left.+2\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty}\frac{K_{23}^{\alpha}\cdot C_{\alpha\beta}(K_{12})}{\left\{1+\left[\frac{2\alpha H_2}{r}+2(\beta-\alpha)\frac{h_1}{r}\right]^2\right\}^{3/2}}\right\} \tag{2}$$

式中 $K_{12}=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1}$，$K_{23}=\frac{\rho_3-\rho_2}{\rho_3+\rho_2}$，$\rho_1$、$\rho_2$、$\rho_3$分别为第一、二、三层介质电阻率，$h_1$为第一层厚度，$r$为供电数距的½，$H_2$为第二层底界面的埋深。$C_{\alpha\beta}(K_{12})$的表达式见文献〔4〕。

实际计算中，（2）式相当繁杂，误差估计相当困难，故不常用，可用下式更方便〔5〕：

$$\rho_S=\rho_1\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\left[1+\left(\frac{2nH_0}{r}\right)^2\right]^{3/2}}\right\} \tag{3}$$

式中 b_n由下列关系给出：

$$\frac{K_{12}g^{P_2}+K_{23}g^{P_3}}{1-K_{12}g^{P_2}-K_{23}g^{P_3}+K_{12}K_{23}g^{(P_3-P_2)}}=\sum_{n=1}^{\infty}b_ng^n \tag{4}$$

式中 $g=e^{-2\lambda H_0}$，H_0为层位坐标H_1和H_2的公约数，$P_2=H_1/H_0$，$P_3=H_2/H_0$。

可以证明，上述级数是收敛的，即对于给定的误差限ε（>0）总可以找到项数N，当级数求和的项数大于N时，其余和R的绝对值小于ε以保证计算精度。例如，对于二层，可以有：

$$|R|=\left|\frac{\rho_1}{4}\left(\frac{r}{h_1}\right)^3\frac{K_{12}^{N+1}}{(N+1)^3}\right|<\varepsilon \quad (K_{12}<0)$$

$$|R|\leqslant\frac{\rho_1}{8}\left(\frac{r}{h_1}\right)^3\frac{K_{12}^{N+1}}{(N+1)^2}<\varepsilon \quad (K_{12}>0)；$$

对于三层，应用凸凹函数中的颜森不等式〔3〕，有

$$|R| = 2\rho_1 \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n \varphi_n \right| \leqslant \frac{\rho_1}{N_2} \cdot \max_{(N<n\to\infty)} |b_n| < \varepsilon$$

对于四层以上介质，ρ_S的计算公式及其误差估算都变得十分复杂，因此必须寻找新的计算方法。

2.核函数—$J_1(x)$滤波系数法：

直接进行级数求和的计算方法既麻烦而速度又慢，现在物探电法上广泛使用的是核函数—$J_1(x)$滤波系数法。其基本计算方法如下，在MN→0时，ρ_s的表达式为：

$$\rho_S = r^2 \int_0^\infty T_1(\lambda) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \tag{5}$$

其中r为$\frac{AB}{2}$，$J_1(\lambda r)$为一阶具塞尔函数。$T_1(\lambda)$是只与各水平层参数(各层真电阻率ρ_1、$\rho_2 \cdots\cdots \rho_n$；层厚$h_1$、$h_2 \cdots\cdots h_{n-1}$)有关的函数，称为核函数，它的计算有如下递推公式：

$$\begin{cases} T_n = \rho_n \\ T_j(\lambda) = \rho_j \dfrac{\rho_j(1-e^{-2\lambda h_j}) + T_{j+1}(\lambda)(1+e^{-2\lambda h_j})}{\rho_j(1+e^{-2\lambda h_j}) + T_{j+1}(\lambda)(1-e^{-2\lambda h_j})} \end{cases} \quad j = n-1, \cdots\cdots 2, 1 \tag{6}$$

(5)式不便计算，经积分变换及离散取样后为易于计算的数字滤波形式：

$$\rho_S \Big|_{AB} = \rho_n b_*(J_1) + \sum_{J_1+1}^{J_2-1} T_1(i-j) b(j\Delta) + \rho_1 b_*(J_2) \tag{7}$$

式中 $b_*(J_2)$、$b(J\Delta)$、$b_*(J_2)$称为滤波系数，它们与剖面参数无关，对于一定的离散步长△，它是一组确定的数，因此可先计算出来，然后对所有参数的情况都适用，故这种方法的计算速度可大大加快。式中J_1、J_2为截断长度。在计算时，极距AB要变为与离散步长△有关的极距点编号i。目前流行的有以下两种：一为$\frac{AB}{2} = 10^{\frac{i}{6}}$米，一为$\frac{AB}{2} = 10^{\frac{i}{10}}$米。后一种由于步长较小，因而其精度较前一种高。有关滤波系数的值在“物化探计算技术”杂志上时有报道，也可参阅文献〔6〕这里就不多说了。

对于这种方法的计算精度，很难给出一个确定的估计公式。为此我们用已知精度的经典级数求和的结果与之比较。表1是我们用$\frac{AB}{2} = 10^{\frac{i}{10}}$的步长计算二层、三层、四层水平层介质下的$\rho_S$与级数求和法计算的对比结果。由表可见，在$\varepsilon = 10^{-4}$下，两种方法的结果一致。

3.核函数和传输线方程

公式(5)中的核函数$T_1(\lambda)$及递推关系(6)在积分计算中起着重要的作用，这里对它们的物理意义作一简略的介绍。

在水平层状介质中，位于原点的单点电极的电位分布满足下列方程组：

$$\nabla^2 u_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots n) \tag{8}$$

$$\begin{cases} u_i = u_{i+1} \Big|_{z=H_i} \\ \dfrac{1}{\rho_i} \dfrac{\partial u_i}{\partial z} = \dfrac{1}{\rho_{i+1}} \dfrac{\partial u_{i+1}}{\partial z} \Big|_{z=H_i} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots n-1) \tag{9}$$

表 1

	参　　数	核函数 $J_1(x)$ 滤波系数法	无穷级数法($e=10^{-5}$)
二层剖面 ($\rho_1=1\Omega m$)	$\frac{\rho_2}{\rho_1}=5.6186$　$\frac{AB}{2h_1}=50$	$5.4407\Omega m$	$5.4406\Omega m$
	$\frac{\rho_2}{\rho_1}=5.6186$　$\frac{AB}{2h_1}=12.5$	$4.3182\Omega m$	$4.3182\Omega m$
	$\frac{\rho_2}{\rho_1}=100$　$\frac{AB}{2h_1}=50$	$34.8370\Omega m$	$34.8364\Omega m$
	$\frac{\rho_2}{\rho_1}=0.75$　$\frac{AB}{2h_1}=25$	$0.7515\Omega m$	$0.7515\Omega m$
	$\frac{\rho_2}{\rho_1}=0.1001$　$\frac{AB}{2h_1}=50$	$0.1002\Omega m$	$0.1002\Omega m$
	$\frac{\rho_2}{\rho_1}=0.1001$　$\frac{AB}{2h_1}=25$	$0.1005\Omega m$	$0.1005\Omega m$
三层剖面 ($\rho_2=100\Omega m$)	$\frac{\rho_2}{\rho_1}=100$　$\frac{\rho_3}{\rho_2}=0.01$　$h_1=0.01AB$ $h_2=0.05AB$	$1211.0695\Omega m$	$1211.0688\Omega m$
	$\frac{\rho_2}{\rho_1}=10$　$\frac{\rho_3}{\rho_2}=0.1$　$h_1=0.1AB$ $h_2=0.01AB$	$11.2364\Omega m$	$118.2364\Omega m$
	$\frac{\rho_2}{\rho_1}=10^{-5}$　$\frac{\rho_3}{\rho_2}=10^{5}$　$h_1=0.02AB$ $h_2=0.05AB$	$0.0100\Omega m$	$0.0101\Omega m$
	$\frac{\rho_2}{\rho_1}=10^{-5}$　$\frac{\rho_3}{\rho_2}=10^{5}$　$h_1=0.2AB$ $h_2=0.1AB$	$26.6703\Omega m$	$26.6704\Omega m$
	$\frac{\rho_2}{\rho_1}=0.5$　$\frac{\rho_3}{\rho_2}=2$　$h_1=0.04AB$ $h_2=0.04AB$	$92.3577\Omega m$	$92.3577\Omega m$
	$\frac{\rho_2}{\rho_1}=0.5$　$\frac{\rho_3}{\rho_2}=2$　$h_1=0.01AB$ $h_2=0.1AB$	$82.2552\Omega m$	$82.2552\Omega m$
四层剖面 ($\rho_1=100\Omega m$)	$\frac{\rho_2}{\rho_1}=0.1$,　$\frac{\rho_3}{\rho_1}=1$,　$\frac{\rho_4}{\rho_1}=0.01$　$h_1=0.01AB$,　$h_2=0.03AB$　$h_3=0.11AB$	26.5977	26.5977
	$\frac{\rho_2}{\rho_1}=10^{-4}$,　$\frac{\rho_3}{\rho_1}=1$,　$\frac{\rho_4}{\rho_1}=0.01$　$h_1=0.03AB$,　$h_2=0.03AB$　$h_3=0.09AB$	0.1546	0.1546

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial z}(r,\ 0) \to -\dfrac{I\rho_1}{2\pi}\ \dfrac{\delta(r)}{r} \\ u_n\Big|_{z\to\infty}=0 \end{cases} \tag{10}$$

其中（9）式为相邻两层界面处的边值关系，（10）式为介质表面及无穷远处边界条件。

设

$$\begin{aligned} u_i(r,\ z) &= \int_0^\infty V_i(\lambda,\ z)J_0(\lambda r)\,d\lambda \\ j_z(r,\ z) &= \int_0^\infty I_i(\lambda z)J_0(\lambda r)\,d\lambda = \frac{-1}{\rho_1}\ \frac{\partial u_1}{\partial z}(\lambda,\ z) \end{aligned} \tag{11}$$

式中　$J_0(\lambda r)$为零阶贝塞尔函数。由（11）式有：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_i}{\partial z} = -\rho_i I_i \\ \dfrac{\partial I_i}{\partial z} = -\dfrac{\lambda^2}{\rho_i}V_i \end{cases} \tag{12}$$

公式（12）与电动力学中传输线电报方程形式上相似[11]，可称地电阻率法传输线方程，有解：

$$\begin{cases} V_i(\lambda,\ z)=A_ie^{-\lambda z}+B_ie^{\lambda z} \\ I_i(\lambda,\ z)=(A_ie^{-\lambda z}-B_ie^{\lambda z})\lambda/\rho_i \end{cases} \tag{13}$$

引入阻抗$Z_i(\lambda,\ z)=V_i(\lambda,\ z)/I_i(\lambda,\ z)$，则可知$Z(\lambda,z)$在（$0\leqslant z<\infty$）上连续。令埋深为$z=H_i$处的层面阻抗$Z(\lambda,H_i)=Z^{(i)}(i=0,1,2\cdots\cdots n-1)$，则$Z_i(\lambda,\ H_{i-1})=Z_{i-1}(\lambda,\ H_{i-1})=Z^{(i-1)}$。因此第i层上下界面间阻抗$Z^{(i-1)}$与$Z^{(i)}$满足：

$$Z^{(i-1)}=\frac{\rho_i}{\lambda}\ \frac{\lambda Z^{(i)}+\rho_i\tanh(2\lambda h_i)}{\rho_i+\lambda Z^{(i)}\tanh(2\lambda h_i)}$$

$$(i=1,\ 2\cdots\cdots n-1) \tag{14}$$

由无穷这条件可得：$Z^{(n-1)}=\rho_n/\lambda$，由（14）则可求得地表面（$z=0$）的阻抗$Z^{(0)}$。由阻抗定义并令（11）中$z=0$可得：

$$u_0(r)=u_1(r,\ 0)=\int_0^\infty Z^{(0)}I_1(\lambda,\ 0)J_0(\lambda r)d\lambda \tag{15}$$

由介质表面边界条件可得：$I_1(\lambda,\ 0)=\frac{\lambda}{2\pi}I$（I为总电流强度）于是有：

$$u_0(r)=\frac{I}{2\pi}\int_0^\infty \lambda Z^{(0)}J_0(\lambda r)d\lambda \tag{16}$$

式中　$\lambda Z^{(0)}=T_1(\lambda)$也即是（14）式中的核函数。令$Z^{(i)}\lambda=T_{i+1}$并对（14）作适当变形，即可得到（6）式。由上述讨论可以看出核函数的物理意义，即：核函数$T_1(\lambda)$是介质表面的阻抗$Z^0(\lambda)$与积分变量λ的乘积，而阻抗$Z^{(0)}$与地表面电位分布$u_0(r)$构成一对汉克变换。

二、MN≠0的视电阻率计算方法

实际地电阻率台站上MN≠0，这时必须从计算MN两点实际电位差入手来计算视电阻率。其基本公式即是（16）式，为方便起见，将（16）式中系数$\frac{I}{2\pi}$与$Z^{(0)}$合并，其形式为

$$u(r)=\int_0^\infty \lambda f(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda \tag{17}$$

这里$\lambda f(\lambda)$称为积分变换（17）的核函数。

根据直流电法理论，由（17）式可以求得地表任意两点间的电位差，并根据电动力学的迭加原理，求得一对正负供电极在这两点上的电位差以求得在该装置下的视电阻率。

在采用递推公式计算核函数的情况下，公式（17）便可以方便地应用于任意n层水平介质了。以下介绍两种不同的积分方法及其步骤：

（1）数值积分解法：

1.取零阶贝塞尔函数的零点x_i（$i=1,\ 2\cdots\cdots\infty$）并由$x_i=\lambda_i r$计算$\lambda_i=\frac{x_i}{r}(i=1,\ 2\cdots\cdots)$

2.将积分公式（17）化为以〔λ_i，λ_{i+1}〕为区间的分段积分和：

$$u(r)=\sum_{i=0}^{\infty}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\lambda f(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda=\sum_{i=0}^{\infty}W_i(r)$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i W_i(\gamma) \qquad (18)$$

式中　$\lambda_0=0$，$W_i(r)=|W_i(r)|$，并且：

$$W_i(r)=\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\lambda f(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda$$

（18）式右端的第三个等式成立是因为$\lambda f(\lambda)$在λ从0到∞的区间中恒大于零，因而$W_i(r)$的符号仅取决于$J_0(\lambda r)$在积分上下限之间的符号。这样（18）式表明级数$\sum\limits_{i=0}^{\infty}W_i(r)$是一个无穷交错级数。

3.计算（18）中头N项$W_i(r)$。对给定的参数r，由于考虑到不同结构下核函数形态变化的显著差异性，选用高斯型不等间距积分公式将可获得较高的积分准确度，即有：

$$\int_a^b \varphi(x)dx \doteq \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n}C_k\varphi(x_k) \qquad (19)$$

它可以对于一切低于2n－1次多项式为精确[7]。（19）式中x_k和系数C_k的值，可以从有关的手册中找到。分点数n的选择取决于核函数随λ变化的复杂程度，一般来说λ较大时，核函数渐近行为比较单调，在所计算的N个$W_i(r)$中，前几项（例如前5项）可取较大的n，其后的项则取较小的n。

4.计算无穷级数(18)。由于贝塞尔函数当宗量很大时衰减很慢，而且核函数当λ很大时趋于1而不趋于零。因此无穷级数和(18)的收敛速度一般很慢；取有限的项，其结果又会招致很大的误差。考虑到无穷级数（18）的交错性质，可采用交错级数的欧拉变换法[8]以加快收敛速度，仅用级数的前若干项通过适当的组合即可得到最后的结果，于是有：

$$U(r)=\sum_{i=0}^{N_1}(-1)^i W_i(r)+\sum_{K=N_1}^{\infty}(-1)^{(K-N_1)}\Big/2^{(K-N_1+1)}\cdot\Delta^{K-N_1}W_{N_1}(r) \qquad (20)$$

式中　$\Delta^p W_0=\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m\binom{p}{m}W_{p-m}$

在（20）式中第二项求和实际上不需要加到∞，当K增加到一定值时，$\Delta^{K-N_1}W_{N_1}(r)$变得很小即完成了积分运算。当K再增加时，$\Delta^{K-N_1}W_{N_1}(r)$反而增大而造成误差。

5.一般情况下，当不同层中电阻率的值差异不大时，上述积分解可以达到很高的准确度。表2上半部给出了在一个二层条件下的计算结果。将它与传统的位函数的解相对比，两者差异小于1‰。由于二层介质的核函数形式比较简单，(17)式可用韦伯—李卜希兹公式直接化为求和公式：

$$U(r)=\frac{I\rho_1}{2\pi}\left[\frac{1}{r}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_{12}^n}{\sqrt{r^2+(2nh_1)^2}}\right] \qquad (21)$$

对于给定的参数r，规定误差为ε时，总可以找到N，使（21）式加到第N项时其结果与真值

表 2

参数 \ 视电阻率		级数法	高斯积分法	修正的高斯积分法
$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{4}{8}$	$\frac{AB}{2h_1}=50$	0.9988	0.9988	0.9988
$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{4}{8}$	$\frac{AB}{2h_1}=10$	0.9746	0.9746	0.9746
$\frac{\rho_2}{\rho_1}=100$	$\frac{AB}{2h_1}=50$	32.67	32.67	32.67
$\frac{\rho_2}{\rho_1}=100$	$\frac{AB}{2h_1}=10$	84.90	84.88	84.90
$\frac{\rho_2}{\rho_1}=10^3$	$\frac{AB}{2h_1}=12.5$	114.2	113.7	114.2
$\frac{\rho_2}{\rho_1}=10^3$	$\frac{AB}{2h_1}=3.\dot{3}$	307.5	270.4	307.5

的相对误差小于ε，因此可以将它作为对用上述积分法的精度比较标准。

在另外一些情况下，例如不同层电阻率差别较大时，上述积分解则不能达到要求的准确度。表 2 也给出了另一个二层剖面下的计算结果以及用（21）算得的结果，可见两者差异较大。研究结果表明，，这是由于这类剖面结构下在λ为小参数时核函数的变化太剧烈的缘故。因此在这种情况下需要对上述第 3 步高斯积分进行修正。

6.在需要进行高斯积分修正的问题中，可将高斯积分中的分点X_k到X_{k+1}之间的区间采用变步长辛卜生积分，直到两次不同步长间的积分差小于规定误差为止。然后将所得的$W'_i(r)$与高斯积分结果 $W_i(r)$ 相比，当发现到$i=N_2$时 $W_i(r)$ 与$W'_i(r)$之间的误差满足要求时，上述替代程序便可终止执行。因为当$|W'_{N_2}-W_{N_2}|\leqslant\varepsilon(N_2)$时，对于后面的项$|W'_i-W_i|\leqslant\varepsilon(N_2)$也会满足。在表 2 中也给出了这样计算的结果，可见与（21）式算得的结果相差甚微。

在上述计算中，我们主要的努力还是集中于两点：第一是使（18）式中前N项中每一项的积分（它们的积分限不是无限）尽可能在各种核函数下都十分准确。第二采用欧拉变换使之收敛加快。但是欧拉变换仍然是一种用有限项求和代替无穷项求和的办法，即使参加求和的每一项都严格准确，那么估计所舍去项的余和对所求得结果的影响仍然是件十分困难的事情。上面我们在二层水平介质下采用两种不同算法的计算结果进行对比来确定计算误差，但对更多层的情况，类似于公式（21）那样的计算就无法进行了，在这种情况下，我们用下面谈到的核函数—$J_0(x)$滤波系数法的结果与之对比。

（2）核函数—$J_0(x)$滤波系数法

在上节中给出了利用核函数—函$J_1(x)$滤波系数法计算MN→0 的视电阻率的步骤，但没有推导说明，其实它与$J_0(x)$滤波系数的推导步骤完全一致。以下详细导出核函数—$J_0(x)$滤波系数法的计算过程。

1.对（17）式的参数r和积分变量λ作变换：令 $x=L_n r\ (r=e^x)$

$$y=L_n(1/\lambda)\ (\lambda=e^{-Y})$$

可将（17）式化为：

$$e^{x}u(e^{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y} f(e^{-y}) J_0(e^{x-y}) e^{x-y} dy \tag{22}$$

记
$$\begin{cases} g(x) = e^{x}u(e^{x}) \\ g_1(x) = e^{-x}f(e^{-x}) \\ g_2(x) = e^{x}J_0(e^{x}) \end{cases}$$

于是（22）式化为：

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(y)g_2(x-y)dy = g_1(x) * g_2(x) \tag{23}$$

式中 $*$ 表示褶积，式中$g_1(x)$为与核函数有关的函数，而$g_2(x)$则是与贝塞尔函数有关的函数。

2.对核函数项$g_1(x)$离散化。由数字信号处理中的取样定理，当取样间隔Δx满足$\Delta x \leqslant \frac{\pi}{k_c} = \frac{\lambda_c}{2}$时（$k_c$是$g_1(x)$的波数谱中截止波数、类似于时间—频率域中的截止频率，λ_c是截止波数相应的波长），$g_1(x)$可表为[9]：

$$g_1(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_1(m\Delta x) \frac{\sin\frac{\pi x - m\Delta x}{\Delta x}}{\frac{\pi(x - m\Delta x)}{\Delta x}} \tag{24}$$

于是（23）式可化为：

$$g(i\Delta x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_1(m\Delta y) b(i\Delta x - m\Delta y) \tag{25}$$

取$\Delta x = \Delta y = \Delta$，令$g(i\Delta x) = g_i$；$g_1(m\Delta y) = g_m(1)$，$b[(i-m)\Delta] = b_{i-m}$，于是有

$$g_i = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(1) b_{i-m} \tag{26}$$

式中 $b_{i-m} = b[(i-m)\Delta] = \int_{-\infty}^{\infty} g_2[(i-m)\Delta - u] \frac{\sin\frac{\pi u}{\Delta}}{\frac{\pi u}{\Delta}} du$

3.实际上，b_{i-m}的形式並不是直接算积分而求得的，由于公式（17）所表示的是一个$u(r)$和$\lambda f(\lambda)$的变换关系，因此总可以通过一组简单的$\lambda f(\lambda)$及其相应的已知$u(r)$的关系，求得$g_2(x)$在波数域中的谱函数，並利用付里叶变换找到（26）式中的b_i（$i=-\infty, \infty$），因此通常b_i的值总可以在有关的手册中查到[10]。

4.公式（23）所反映的褶积关系与数字滤波中的褶积关系形式上是相同的。设有输入信号$g_1(t)$通过一个线性时不变系统（滤波器），其时间响应为$g_2(t)$，则根据数字滤波理论，其输出信号$g(t)$如下式表示：

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau)g_2(t-\tau)d\tau \tag{27}$$

比较(27)与（23）式，可以看出$g_2(x)$与这里的$g_2(t)$的作用相同，起了一种“滤波器”的作用。因此$b_i(i=-\infty,\infty)$又称滤波系数。上述方法求得点电源位函数称为滤波系数法。

5.滤波系数法的精度与离散化时的间隔Δx、Δy有关。Δx、Δy愈小，精度愈高。此外，滤波系数的数目对计算结果亦有一定的影响。。

如前所述，在无法从单一的方法确定计算精度的情况下，采取两种完全不同的方法，将其计算结果加以对比，可能是一个可行的办法，表3给出$MN\doteqdot 0$修正的高斯积分法和$J_0(x)$滤波系数法在三层水平介质上的对比计算结果、由这两种完全不同的计算方法所得结果来看，其精度优于1‰。

表3

剖面	参数	数值积分法	$J_0(x)$滤波系数法
三层剖面	$\frac{\rho_2}{\rho_1}=10^{-3}$，$\frac{\rho_3}{\rho_2}=10^{-3}$		
	$\rho_1=1$，$h_1=0.03AB$		
	$h_2=0.01AB$	0.04407	0.04407
	$h_2=0.02AB$	0.02255	0.02255
	$h_2=0.05AB$	0.00915	0.00915
	$h_2=0.15AB$	0.00308	0.00308
	$h_2=0.25AB$	0.00190	0.00190

三、结　　论

1.由于以上介绍的各种计算方法采用了减小步长、变步长辛卜生积分、增加滤波系数个数等技术措施，使得计算结果都具有较高的精度；又由于采用了核函数递推、滤波系数以及欧拉变换，使得它们同时又具有较快的计算速度。根据我们的计算结果，以上各公式的计算精度均可达到相对误差为1‰。

2.本文提供的各种视电阻率计算公式可以方便地计算n层水平介质的情况，而且可供在不同类型问题中使用：在有关理论问题讨论中，$J_1(x)$滤波系数法简单、方便，因而较为适用；对各种具体装置的实际条件下的计算，使用$MN\doteqdot 0$的视电阻率计算方法，其效果较好。

3.从传输线方程推导核函数递推关系的过程说明：在积分计算中起重要作用的核函数是介质表面阻抗$Z^0(\lambda)$与积分变量λ的乘积，而$Z^{(0)}(\lambda)$与介质表面电位分布$u_0(r)$互为汉克变换。

（本文1985年12月11日收到）

参　考　文　献

〔1〕Qian Jiadong, Regional Study on the Anomalous Change in Apparent Resistivity before the Tangshan Earthquake (M=7.8, 1976) in China, Pure and Applied Geophysics, Vol.122, (1984/85).

〔2〕赵和云等，地电阻率观测中一类反常年变化的分析讨论，西北地震学报，Vol.7，No.1，1985.

〔3〕Г.M.菲赫金哥尔茨，微积分学教程，第二卷，第二分册，高等教育出版社.

〔 4 〕钱家栋等，地电阻率法在地震预报中的应用，地震出版社，1985.
〔 5 〕武汉地质学院金属物探教研室，电法勘探教程，地质出版社，1980.
〔 6 〕唐大荣等，直流电测深曲线的自动解释，石油地球物理勘探，No. 5 ,1980.
〔 7 〕南京大学等，计算方法，人民教育出版社，1960.
〔 8 〕Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, INC., Newyork, 1972.
〔 9 〕程乾生，信号数字处理的数学原理，石油工业出版社，1979.
〔10〕Walter L. Anderson, Improved Digital Filters for Evaluating Fourier and Hankel Transform Integrals, USGS-GD-75-012.
〔11〕曹昌祺，电动力学，人民教育出版社，1961.

CALCULATION FORMULA OF APPARENT RESISTIVITY OF HORIZONTAL LAYERED MEDIUM WITH HIGH ACCURACY AND ANALYSIS OF THEIR ERROR

Qian Jiadong
(*Siesmological Institute of Lanzhou, State seismological Bureau*)

Zhao Heyun　　Zhang Wenxiao
(*Seismological Bureau of Ningxia Autonomic Region*)

Abstract

To meet the requirements in earthquake research by means of earth resistivity, the methods of calculating apparent resistivity of horizontal layered medium with high accuracy have been developed. The methods by series summation and numerical integral as well as $J_0(x)$-and $J_1(x)$-fielter are dealt with in detail and compared with each other. The kernel function in the integral and filter methods was briefly discussed in the paper also.