

地球自转产生的应力场

范家参 黎家佑

(云南省地震局)

摘 要

以匀速自转时地球产生的变形做为有限弹性变形去计算, 再迭加地球自转角速度变化而产生的弹性变形, 从而得出问题的力学解析表达式。

一、前 言

李四光同志指出〔1〕: “我们可以提出一个简单的推断: 即在全球性大规模的构造运动发生以前, 地球角速度应该在一个时期中逐渐加大, 而在大规模运动的期间及其以后, 它的角速度就会显著地变小了, 并且继续变小, 直到它的角速度又重新加大”。

本文就是为地球自转使地球内部, 特别是在地壳内部产生的应力场, 提供一种力学解析方法, 计算的要点已在摘要中说明, 为使我们的立论背景清楚, 下面要分别说清几个问题:

(1) 为什么要分别用两种不同的弹性理论去计算?

我们首先把地球现在的扁率 $\frac{1}{298.25}$ ^{〔2〕}当作(基本上)是在长期匀速自转下产生的有限弹性变形, 然而再迭加自转角速度变化产生的微量变形。因为根据经典线性弹性力学有关公式〔3〕, 认为地球是均匀各向同性弹性圆球, 没有考虑已有的扁率。再则其公式指出, 地球自转产生的弹性位移(当然应变和应力也如此), 是与自转角速度 ω 的平方成正比。但地球自转角速度变化的极大值是 $\dot{\omega}/\omega \leq 500 \times 10^{-10}$ /年。以 $\Delta\omega$ 表示自转角速度改变的附加值, 易知,

$$\Delta\omega = \dot{\omega} \times 365 \leq 2\pi \times 500 \times 10^{-10} / 365 = 1.37 \times 2\pi \times 10^{-10} / \text{天}$$

$$\therefore \Delta\omega \leq 1.37 \times 10^{-10} \omega$$

$$(\omega + \Delta\omega)^2 = \omega^2 + 2\omega\Delta\omega + (\Delta\omega)^2 = \omega^2 + 2.74 \times 10^{-10} \omega + 1.8769 \times 10^{-20} \omega$$

根据以上计算表明, 如果直接按经典线性弹性理论的公式去计算, 则匀速自转时的应力和变形与自转速度变化后的应力和变形相差的只是 10^{-10} 及更小的微量, 这根本无法在公式及数字中显示出来。而我们认为地球已有的扁率, 是地球长期匀速自转(10^8 年以内)产生的弹性变形, 这个扁率比较附加的角速度变化产生的弹性变形要大得多, 故前者用有限弹性变形理论, 后者用微量线性弹性变形理论。我们认为现存的扁率已使地球内部积累了大量的弹

性应变能，而突然的角速度改变只是一个触发应变能突然释放而引起地震的因素。所谓“一根稻草压断骆驼的脊梁骨”就是一个生动的写照。

(2) 既然采用有限弹性变形，为什么对于变形前后的余纬度 θ 角（见图1及图2）不加区别？

既然采用有限弹性变形，则必须在变形前后的物体几何形状之间建立相应的关系而建立描述公式，我们从扁率可以推知，地球变形前后极径 R 的变化大约是小于 $\frac{1}{298.25} \approx 3\%$ ，即千分之三这个数量级。再看变形前后余纬度 θ 的变化。

地球赤道半径 $a = 6378.160$ 公里

地球两极半径 $b = 6356.755$ 公里

地球平均半径 $\bar{R} = 6371$ 公里

按文献[2]， $\bar{R}^3 = a^2 b$ 求得 \bar{R} 之值，即假定地球是一个实心各向同性均质体的回转椭球，本文以后也正是应用这一原理。设

$$\frac{1}{4} \text{圆周长为 } S = \frac{\pi R}{2} = \frac{\pi}{2} \times 6371 = 10000 \text{ 公里}$$

$$\frac{1}{4} \text{椭圆弧长 } S' = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0.00663, \therefore e = 0.0815, \sin^{-1} e = 4^\circ 41'$$

查椭圆积分表得，

$$S' = 6378.16 \times 1.568 = 10003 \text{ 公里}$$

我们知道，变形前后 $\theta = 0$ 与 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 这两处的角度是不会变化的， θ 变化的范围是 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 。

地球纬度圈这个椭圆是十分近似于圆的，以变形前后的余纬角分别用 θ 和 θ' 表示，则有：

$$\max(\theta' - \theta) < \frac{S' - S}{\bar{R}} = \frac{3}{6371} = 0.00047 \text{ (弧度)} = 0.0444^\circ = 0^\circ 2' 0''$$

既然余纬角变形前后相差最大值不到 2 分，影响大小可忽略不计，故变形前后的余纬角我们都以 θ 表示，这一来既做了合理简化，又大大方便了以后的计算工作。

(3) 为什么可以把地球当作匀质各向同性弹性体并且假定体积是不可压缩的？

大家知道，地球从地表以下 0 ~ 33 公里是地壳，33 ~ 2900 公里是地幔，2900 ~ 6371 公里是地核。地幔是粘滞流体，地核是高温高压下的坚实固体。这两者都是不可压缩体积的，仅仅是薄薄的一层地壳固体体积可压缩。 $\frac{33}{6371} = 0.0052$ ，即地壳厚与地球平均半径之比仅为 5.2%，所以从整个地球来说，体积不可压缩部份占了绝对优势，认为它是属于体积不可压缩的是有足够根据的。当然如果只考虑地壳上某部份的局部效应，例如断层的形成及发展，弹性波在地壳中的传播……等，就必须考虑地壳体积的可压缩。因此，地球整体当做体积

不可压缩，地壳局部的体积可压缩，是合理的，文献〔2〕在计算地球平均半径时就应用了地球体积不可压缩这一假定。

除了文献〔8〕的经典方法把地球自转的弹性变形是按匀质各向同性弹性体圆球对待之外，在文献〔5〕〔6〕〔7〕中处理地壳裂缝问题亦是把地面以下当作匀质各向同性半无限大弹性体的。还有文献〔12〕亦是最近的文献，把自转的地球当作各向同性匀质弹性体对待的。还有经典文献〔14〕指出：「假定地球作为整体是一个“匀质、不可压缩的弹性球”」。

当然以上假定只是近似合理的假定，但如果放弃这些假定，特别在有限变形弹性理论中就难于进行下去，这个工作现在才开始初创，不免要粗糙些，但总比没有强。

(4) 为什么忽略了地表各点重力加速度的差异？

地球赤道处 $g_e = 978.0318$ 伽。两极处 $g_p = 983.2177$ 伽。两者相差的相对值约为 5%，所以本文按一般物理上通用值取 $g = 980$ 伽。这是合乎常理的。

当然本文发展的方向是努力提高精度，考虑地球内部构造的差异，而得出更合理的结果来。最近，北大王仁教授来信指出，希望考虑把地球分层，并指出王仁教授的一篇近作可参考。鉴于本文已排好版，今后将把分层做为下一步的工作，就王仁教授的指导表示感谢。

二、地球在匀速自转下的有限弹性变形〔4〕

如图1所示的圆球，在匀角速度 ω 及地心引力共同作用下，变形为图2所示的回转扁椭球。

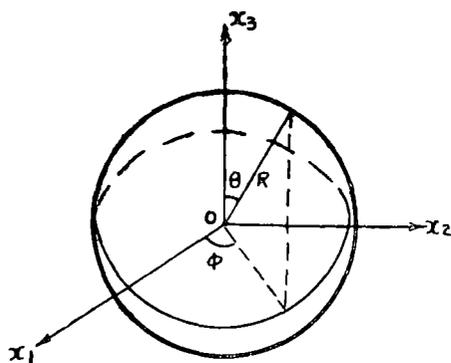


图 1

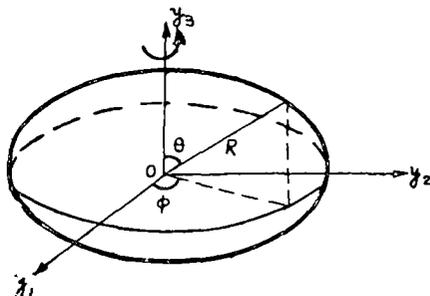


图 2

文献〔2〕指出：地球的真正形状是一个扁球，但略去扁率平方以上的高阶微量（约为 $\frac{1}{90000}$ ）及更高阶微量以后，就可以做为一个回转扁椭球。文献〔9〕260页也提到：地球在自转及地心引力共同作用下，是一个回转扁椭球（an oblate ellipsoid of revolution）。

取变形前的直角坐标为 x_i ($i = 1, 2, 3$)，变形后的直角坐标为 y_i ，对于曲线坐标 θ_i ，我们取：

$$\theta_1 = R, \theta_2 = \theta, \theta_3 = \phi \quad (2.1)$$

故有：

$$x_1 = R \cdot \sin\theta \cos\phi, x_2 = R \cdot \sin\theta \sin\phi, x_3 = R \cdot \cos\theta \quad (2.2)$$

$$y_1 = a \cdot \sin\theta \cos\phi, y_2 = a \cdot \sin\theta \sin\phi, y_3 = b \cdot \cos\theta \quad (2.3)$$

变形前后余纬度角 θ 不加区别的道理已在前面说过了。由于假定体积是不可压缩, 故有:

$$R^3 = a^2 b$$

所以我们可以设:

$$a = \sqrt{\eta} R, b = \frac{R}{\eta} \quad (\eta > 1)$$

$$\therefore y_1 = \sqrt{\eta} R \cdot \sin\theta \cos\phi, y_2 = \sqrt{\eta} R \sin\theta \sin\phi, y_3 = \frac{R}{\eta} \cos\theta \quad (2.3)$$

严格说来, η 是 R 和 θ 的函数, 即 $y = \eta(R \cdot \theta)$ 。但是如果现在就这么做, 将使后面的计算太复杂而无法进行下去, 因而首先取 $\eta(R \cdot \theta)$ 在每一纬度圈的平均值 $\bar{\eta}$ 这个常数代替 (2.3) 式的函数值 $\eta(R, \theta)$, 即取:

$$\bar{\eta} = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \eta(R \cdot \theta) R \cdot dR \cdot d\theta \quad (2.4)$$

在未变形时:

$$\vec{v} = R \sin\theta \cos\phi \vec{i} + R \sin\theta \sin\phi \vec{j} + R \cos\theta \vec{k} \quad (2.5)$$

$$\vec{g}_1 = \frac{\partial \vec{V}}{\partial R} = \sin\theta \cos\phi \vec{i} + \sin\theta \sin\phi \vec{j} + \cos\theta \vec{k} \quad (2.6)$$

$$\vec{g}_2 = \frac{\partial \vec{V}}{\partial \theta} = R \cos\theta \cos\phi \vec{i} + R \cos\theta \sin\phi \vec{j} - R \sin\theta \vec{k} \quad (2.7)$$

$$\vec{g}_3 = \frac{\partial \vec{V}}{\partial \phi} = -R \sin\theta \sin\phi \vec{i} + R \sin\theta \cos\phi \vec{j} \quad (2.8)$$

$$g_{ik} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_k = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & R^2, & 0 \\ 0, & 0, & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \cdot g^{ik} = \vec{g}^i \cdot \vec{g}^k = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{R^2}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{R^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$g = |g_{ik}| = R^4 \sin^2\theta \quad (2.9')$$

在变形后:

$$\vec{V} = \sqrt{\eta} R \sin\theta \cos\phi \vec{i} + \sqrt{\eta} R \sin\theta \sin\phi \vec{j} + \frac{R}{\eta} \cos\theta \vec{k} \quad (2.10)$$

$$\vec{G}_1 = \frac{\partial \vec{V}}{\partial R} = \sqrt{\eta} \sin\theta \cos\phi \vec{i} + \sqrt{\eta} \sin\theta \sin\phi \vec{j} + \frac{\cos\theta}{\eta} \vec{k} \quad (2.11)$$

$$\vec{G}_2 = \frac{\partial \vec{V}}{\partial \theta} = \sqrt{\eta} R \cdot \cos\theta \cos\phi \vec{i} + \sqrt{\eta} R \cos\theta \sin\phi \vec{j} - \frac{R}{\eta} \sin\theta \vec{k} \quad (2.12)$$

$$\vec{G}_3 = \frac{\partial \vec{V}}{\partial \phi} = -\sqrt{\eta} R \cdot \sin\theta \sin\phi \vec{i} + \sqrt{\eta} R \sin\theta \cos\phi \vec{j} \quad (2.13)$$

$$G_{ik} = \vec{G}_i \cdot \vec{G}_k = \begin{pmatrix} \bar{\eta} \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\eta}, & \left(\bar{\eta} - \frac{1}{\eta} \right) R \sin \theta \cos \theta, & 0 \\ \left(\bar{\eta} - \frac{1}{\eta} \right) R \sin \theta \cos \theta, & R^2 \left(\bar{\eta} \cos^2 \theta + \frac{1}{\eta} \sin^2 \theta \right), & 0 \\ 0, & 0, & \bar{\eta} R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$\vec{G}^1 = \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}}} \sin \theta \cos \phi \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}}} \sin \theta \sin \phi \vec{j} + \bar{\eta} \cos \theta \vec{k} \quad (2.11')$$

$$\vec{G}^2 = \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}} R} \cos \theta \cos \phi \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}} R} \cos \theta \sin \phi \vec{j} - \frac{\bar{\lambda}}{R} \sin \theta \vec{k} \quad (2.12')$$

$$\vec{G}^3 = \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}} R \sin \theta} (-\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}) \quad (2.13')$$

$$G^{ik} = \vec{G}^i \cdot \vec{G}^k = \begin{pmatrix} \bar{\eta}^2 \cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\eta}, & -\frac{1}{R} \left(\bar{\eta}^2 - \frac{1}{\eta} \right) \sin \theta \cos \theta, & 0 \\ -\frac{1}{R} \left(\bar{\eta}^2 - \frac{1}{\eta} \right) \sin \theta \cos \theta, & \frac{1}{R^2} \left(\bar{\eta}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{\eta} \cos^2 \theta \right), & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{\bar{\eta} R^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (2.14')$$

$$G = |G_{ik}| = R^4 \sin^2 \theta \quad (2.14'')$$

由于假定体积是不可压缩的, 必须 $g = G$, 从 (2.9') 与 (2.14'') 的结果表明, 此假定得到满足。

应变不变量为:

$$I_1 = g^{rr} G_{rr} = 2\bar{\eta} + \frac{1}{\eta}, \quad I_2 = g_{rr} G^{rr} = \frac{2}{\eta} + \bar{\eta}^2, \quad I_3 = 1 \quad (2.15)$$

$$B^{ik} = I_1 g^{ik} - g^{ir} g^{ks} G_{rs}$$

$$\therefore B^{ik} = \begin{pmatrix} \bar{\eta} (1 + \cos^2 \theta) + \frac{\sin^2 \theta}{\eta^2}, & -\frac{1}{R} \left(\bar{\eta} - \frac{1}{\eta} \right) \sin \theta \cos \theta, & 0 \\ -\frac{1}{R} \left(\bar{\eta} - \frac{1}{\eta} \right) \sin \theta \cos \theta, & \frac{1}{R^2} \left(\bar{\eta} + \bar{\eta} \sin^2 \theta + \frac{1}{\eta} \cos^2 \theta \right), & 0 \\ 0, & 0, & \left(\bar{\eta} + \frac{1}{\eta} \right) \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

应力张量 $\tau^{ij} = \Phi g^{ij} + \Psi B^{ij} + P G^{ij}$ 故有:

$$\left. \begin{aligned}
 \tau^{11} &= \Phi + \left[\bar{\eta} (1 + \cos^2 \theta) + \frac{1}{\bar{\eta}^2} \sin^2 \theta \right] \Psi - \frac{1}{R} \left[\bar{\eta}^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{\bar{\eta}} \sin^2 \theta \right] P \\
 \tau^{12} = \tau^{21} &= -\frac{1}{R} \left[\left(\bar{\eta} - \frac{1}{\bar{\eta}^2} \right) \Psi + \left(\bar{\eta}^2 - \frac{1}{\bar{\eta}} \right) P \right] \sin \theta \cos \theta \\
 \tau^{13} = \tau^{23} &= 0 \\
 \tau^{22} &= \frac{1}{R^2} \left[\Phi + \left(\bar{\eta} + \bar{\eta} \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\bar{\eta}^2} \right) \Psi + \left(\bar{\eta}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{\bar{\eta}} \cos^2 \theta \right) P \right] \\
 \tau^{33} &= \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \left[\Phi + \left(\bar{\eta}^2 + \frac{1}{\bar{\eta}} \right) \Psi + \frac{P}{\bar{\eta}} \right]
 \end{aligned} \right\} (2.17)$$

在(2.17)各式中:

$$\Phi = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \Psi = 2 \frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad W = W(I_1, I_2) \quad (2.17')$$

W叫做弹性势函数, P叫静水压力或围压, P只能由下面的平衡方程去求出。

把地球匀速自转产生的离心力和地心引力当做体力, 则问题成为求解下面的平衡方程:

$$\tau^{ij}{}_{;i} + \rho F^j = 0 \quad (2.18)$$

或写成:

$$\tau^{ij}{}_{;i} + \Gamma_{i'}^j \tau^{i'k} + \Gamma_{i'}^k \tau^{i'j} + \rho F^j = 0 \quad (2.19)$$

如图3所示, 把地球以角速度 ω 自转时产生的离心力 $\rho R \omega^2 \sin \theta$, ρ 是地球的平均密度。我们要把这个离心力投影到R与 θ 的方向上去。

图3所示为 $y_1 o y_3$ 平面上的一个纬度圈代表的椭圆, 其切线方程为:

$$\frac{y_1^{(0)}}{a^2} y_1 + \frac{y_3^{(0)}}{b^2} \frac{dy_3}{dy_1} = 0$$

$$\therefore \operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{y_1^{(0)}}{y_3^{(0)}} = \frac{\left(\frac{R}{\bar{\eta}} \right)^2}{\left(\sqrt{\frac{R}{\bar{\eta}}} R^2 \right)} \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\bar{\eta}^3} \operatorname{ctg} \theta$$

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{\bar{\eta}^6 + \operatorname{ctg}^2 \theta}}, \quad \cos \alpha = \frac{\bar{\eta}^{-3}}{\sqrt{\bar{\eta}^6 + \operatorname{ctg}^2 \theta}}$$

离心力在R方向的投影以 $F^{R(1)}$ 表示, 在 θ 方向投影以 F^θ 表示, 则有:

$$\frac{\rho R \omega^2 \sin \theta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{F^\theta}{\sin \beta} = \frac{F^{R(1)}}{\sin \alpha}$$

故得到:

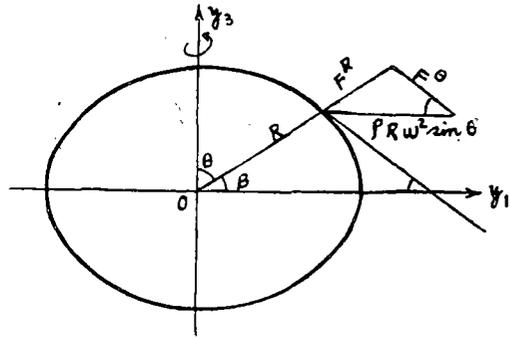


图 3

$$F^{R(1)} = \frac{\rho R \omega^2}{1 + \bar{\eta}^3}, \quad F^\theta = \frac{\sqrt{\bar{\eta}^6 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}{1 + \bar{\eta}^3} \rho R \omega^2 = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}{1 + \bar{\eta}^3} \rho R \omega^2 \quad (2.20)$$

$$(k^2 = 1 - \bar{\eta}^6)$$

还有地心引力在R方向作用产生另一体力 $F^{R(2)}$ 。按照文献^[8]单独考虑地心引力作用时，球内任一点受到地心引力产生的重力为 $\rho \bar{g} = \frac{R}{\bar{R}}$ ，这里的 \bar{g} 就是地表平均重力加速度980伽， \bar{R} 是地球的平均半径6371公里。现在要考虑 $F^{R(1)}$ 与 $F^{R(2)}$ 共同作用，故可设：

$$F^{R(2)} = -\rho \bar{g} \frac{R}{\bar{R}} K \quad (K \text{ 为一待定常数})$$

$$F^{(R)} = F^{R(1)} + F^{R(2)} = \frac{\rho R \omega^2}{1 + \bar{\eta}^3} - \rho \bar{g} \frac{R}{\bar{R}} K$$

当 $R = \bar{R}$ 时有 $F^{(R)} = -\rho g$ ，故得出：

$$K = \frac{\bar{R} \omega^2}{g (1 + \bar{\eta}^3)} + 1 \quad (2.21)$$

下面用公式 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k = \vec{G}^k \cdot \vec{G}_{i,j} = \vec{G}^k \cdot \vec{G}_{j,i}$ 求出变形后各个非零的Christoffel符号 Γ_{ij}^k 之值：

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -R, \quad \Gamma_{12}^1 = -R \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{R}, \quad \Gamma_{22}^2 = \text{ctg} \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

(2.22)式与文献^[4]105页关于厚球壳均匀膨胀的Christoffel符号完全一致，说明本文的结果还可以适用于球壳的情况。

代(2.17)、(2.20)、(2.21)及(2.22)各值入平衡微分方程(2.19)式而得：

$$\Phi + \left(\bar{\eta}^2 + \frac{1}{\bar{\eta}} \right) \Psi + \frac{P}{\bar{\eta}} - \frac{\rho R^2 \omega^2}{1 + \bar{\eta}^3} + \frac{2}{3} K \rho \bar{g} = 0 \quad (j=1) \quad (2.23)$$

$$\left(\bar{\eta} + \frac{3}{\bar{\eta}^2} \right) (\Psi + \bar{\eta} P) \sin \theta \cos \theta + \frac{\rho R^2 \omega^2}{1 + \bar{\eta}^3} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} = 0 \quad (j=2) \quad (2.24)$$

当 $j=3$ 时方程两端均为零而自行满足。由以上两式看出，对于未知常数 $\bar{\eta}$ 及 ρ ，还要随 θ 而变化而不能取常数值，故必须对(2.24)式在每一纬度圈内取平均值。如(2.4)那样。即有：

$$P = \frac{1}{2} \rho \bar{R}^2 \omega^2 \left(\bar{\eta} + \frac{1}{\bar{\eta}^2} \right) - (\bar{\eta}^3 + 1) \Psi - \bar{\eta} \Phi - \frac{2}{3} \bar{\eta} K \rho \bar{g} \quad (2.25)$$

$$\left(\bar{\eta} + \frac{3}{\bar{\eta}^2} \right) (\Psi + \bar{\eta} P) + \frac{\rho \bar{R}^3 \omega^2}{5(1 + \bar{\eta}^3)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = 0 \quad (2.26)$$

由以上两式即可求出未知常数 $\bar{\eta}$ 及 P 。

现在我们进而求函数 $\eta(R, \theta)$ ，当然这时应该是求解(2.4)式这个积分方程，但这很困难，必须预先对 $\eta(R, \theta)$ 的函数形式做某些合理的假定。例如在文献[8]里，Hertz研究两个任意曲面的物体接触时，其接触面上的挤压力如何分布？也是要求解类似本文(2.4)式的积分方程，但Hertz假定接触面是一个椭圆，就避开了积分方程的困难。据此，我们取

$$\eta(R, \theta) = \eta_1(R)\eta_2(\theta)$$

设变形前后 θ 取 $\bar{\theta}$ 的地方 R 值不变，故有：

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$$

$$\therefore \sqrt{\bar{\eta} \sin^2 \bar{\theta} + \frac{1}{\bar{\eta}^2} \cos^2 \bar{\theta}} = 1$$

$$\bar{\theta} = \arcsin \sqrt{\frac{\bar{\eta}^2 - 1}{\bar{\eta}^3 - 1}} \quad (2.27)$$

易知 $\theta < \bar{\theta}$ 之处 R 在变形后缩短，反之伸长。故可设：

$$\eta_2(\theta) = 1 + \sin(\theta - \bar{\theta}) \quad (2.28)$$

对于 $\eta_1(R)$ ，我们取：

$$\eta_1(R) = \left(\frac{R}{\bar{R}}\right)^c \quad (2.29)$$

在上式中 C 为待定指数。必须指出类似(2.29)式在自然科学中应用很广，例如对于塑性硬化的公式 $\sigma = \alpha e^n$ 。 σ 是正应力， α 是系数， e 是正应变， n 是待定指数。气体力学公式 $PV^n = C$ 。 P 是压力， V 是体积， n 是待定指数， C 是常数。还有小汇水面积求流量的半经验公式也是如此。

代(2.28)及(2.29)入(2.4)而得：

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \frac{4}{\pi \bar{R}^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\bar{R}} \left(\frac{R}{\bar{R}}\right)^c [1 + \sin(\theta - \bar{\theta})] R dR d\theta \\ &= \frac{1}{C+2} \left[2 + \frac{4}{\pi} (\cos \bar{\theta} - \sin \bar{\theta}) \right] \end{aligned}$$

$$\therefore C = \frac{1}{\bar{\eta}} \left[2 + \frac{4}{\pi} (\cos \bar{\theta} - \sin \bar{\theta}) \right] - 2 \quad (2.30)$$

这时以：

$$\eta(R, \theta) = \left(\frac{R}{\bar{R}}\right)^c [1 + \sin(\theta - \bar{\theta})] \quad (2.31)$$

代替本节前面各公式中出现的常数 $\bar{\eta}$ ，就可以得到有限弹性变形的近似解。从理论上说，应该以(2.31)之值首先代入(2.3)式，再往下一步重复本文的计算，就可得到第二次近似解。实际上这么做运算太复杂而使以后对协变微分方程(2.18)或(2.19)的求解成为不可能，因为这是含自变量 R 和 θ 的两个非线性偏微分方程的方程组，目前无法求其解析解，即

使采用文献〔9〕第五章介绍的小参数法求逐次逼近解也很困难。在这里，我们借用了偏微分方程中的平均法〔10〕，才避开了巨大的数学困难。

下面求出地球的 $\bar{\eta}$ 值和 C 值：

$$\bar{\eta} = 1 + \frac{1}{298.25} = 1.003354, \quad \bar{\eta}^2 = 1.00671924, \quad \bar{\eta}^3 = 1.00954$$

$$\bar{\theta} = \arcsin \sqrt{\frac{\bar{\eta}^2 - 1}{\bar{\eta}^3 - 1}} = \arcsin \sqrt{0.6659} = \arcsin 0.8160 = 54^\circ 42'$$

$$\therefore C = -0.28839$$

$$\eta(R \cdot \theta) = \left(\frac{\bar{R}}{R}\right)^{0.128839} [1 + \sin(\theta - 54^\circ 42')] \quad (2.31')$$

有限变形弹性理论是本世纪50年代才兴起的新学科，其关键性的W函数形式目前只见到文献〔4〕及〔11〕222—226页列举了一些橡皮类材料的W函数形式，如何求得地球的W函数形式，是有待努力的，目前既然地球的W未知，就无从写出地球自转的应力的明显表达式来。好在文献〔9〕第十章第三节专门讲到如何通过试验求W。较早的试验地球自转扁率的工作，见文献〔8〕的介绍。

三、地球自转角速度变化产生的附加应力

根据经典的线性弹性理论〔8〕，各向同性匀质圆球以角速度 ω 自转时产生的弹性位移是：

$$\frac{u_1}{x_1} = \frac{u_2}{x_2} = \frac{\rho \omega^2}{3} \left\{ \frac{1}{5(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} \bar{R}^2 - R^2 \right) + \frac{1}{\mu(+9\lambda + 14\mu)} \times \right. \\ \left. \left[(4\lambda + 3\mu)R \cdot \bar{R}^2 - \frac{1}{2}(5\lambda + 4\mu)R^2 + (\lambda + \mu)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2) \right] \right\} \quad (3.1')$$

$$\frac{u_3}{x_3} = \frac{\rho \omega^2}{3} \left\{ \frac{1}{5(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} \bar{R}^2 - R^2 \right) + \frac{1}{\mu(19\lambda + 14\mu)} \left[-(8\lambda + 6\mu) \bar{R}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + (5\lambda + 4\mu)R^2 + (\lambda + \mu)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2) \right] \right\} \quad (3.1'')$$

以 ω' 表示变化后的角速度，设：

$$\Delta \omega^2 = \omega'^2 - \omega^2 \quad (3.2)$$

因为地球在匀速自转时，已有扁率，故必须把 (3.1') 及 (3.2') 的 x_i 改为 y_i ，这样就可以合理地使用这两式，而得角速度改变的附加位移为：

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{\rho}{3} \Delta \omega^2 y_1 [C_1 \bar{R}^2 - C_2 R^2 + C_3 (y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2)] \\ u_2 &= \frac{\rho}{3} \Delta \omega^2 y_2 [C_1 \bar{R}^2 - C_2 R^2 + C_3 (y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2)] \\ u_3 &= \frac{\rho}{3} \Delta \omega^2 y_3 [C_4 \bar{R}^2 - C_5 R^2 + C_3 (y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2)] \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned}
 C_1 &= \frac{5\lambda + 9\mu}{5(\lambda + 2\mu)(3\lambda + 2\mu)} + \frac{4\lambda + 3\mu}{\mu(19\lambda + 14\mu)} \\
 C_2 &= \frac{1}{5(\lambda + 2\mu)} + \frac{5\lambda + 4\mu}{2\mu(19\lambda + 14\mu)} \\
 C_3 &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(19\lambda + 14\mu)} \\
 C_4 &= C_1 - \frac{3(4\lambda + 3\mu)}{\mu(19\lambda + 14\mu)} \\
 C_5 &= C_2 - \frac{3(5\lambda + 4\mu)}{2\mu(19\lambda + 14\mu)}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.3')$$

按线弹性理论公式:

$$\Delta \sigma_{y_i} = 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial y_i}, \quad \Delta \tau_{y_i y_j} = \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial y_i} + \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \right) \quad (3.4)$$

需要下面的各个偏导数:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} &= \frac{\rho}{3} \Delta \omega^2 \left\{ \sqrt{\eta} R \sin \theta (1 + \cos^2 \phi) \left[C_1 \bar{R}^2 - C_2 R^2 \left(\eta \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\eta^2} \right) + C_3 R^2 \times \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left(\eta \sin^2 \theta - \frac{2}{\eta^2} \cos^2 \theta \right) \right] + 2(C_3 - C_2) \eta^{3/2} R^3 \sin^3 \theta \cos^2 \phi \right\} \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_1}{\partial y_2} &= \frac{\rho}{3} \Delta \omega^2 \sqrt{\eta} R \sin \theta \sin \phi \cos \phi \left[C_1 \bar{R}^2 - C_2 R^2 \left(3\eta \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\eta^2} \right) + C_3 R^2 \times \right. \\
 &\quad \left. \left(3\eta \sin^2 \theta - \frac{2}{\eta^2} \cos^2 \theta \right) \right] \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_3} = -\frac{2}{3} \rho \Delta \omega^2 R^3 \sin^2 \theta \cos \phi \sin \theta \cos \phi (C_2 + 2C_3) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_2}{\partial y_1} &= \frac{\rho}{3} \Delta \omega^2 \sqrt{\eta} R \sin \theta \sin \phi \cos \phi \left[C_1 \bar{R}^2 - C_2 R^2 \left(3\eta \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\eta^2} \right) + C_3 R^2 \times \right. \\
 &\quad \left. \left(3\eta \sin^2 \theta - \frac{2}{\eta^2} \cos^2 \theta \right) \right] \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_2}{\partial y_2} &= \frac{\rho}{3} \Delta \omega^2 \left\{ \sqrt{\eta} R \sin \theta (1 + \sin^2 \phi) \left[C_1 \bar{R}^2 - C_2 R^2 \left(\eta \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\eta^2} \right) + C_3 R^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left(\eta \sin^2 \theta - \frac{2}{\eta^2} \cos^2 \theta \right) \right] + 2\eta^{3/2} R^3 \sin^3 \theta \sin^2 \phi (C_3 - C_2) \right\} \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y_3} = \frac{-2}{3} \rho \Delta \omega^2 R^3 (C_2 + 2C_3) \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_3}{\partial y_1} &= \frac{\rho}{3} \Delta \omega^2 \left\{ \frac{R}{\eta} \cos \theta \cos \phi \left[C_4 \bar{R}^2 - C_5 R^2 \left(\eta \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\eta^2} \right) + C_3 R^2 \left(\eta \sin^2 \theta \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - \frac{2}{\eta^2} \cos^2 \theta \right) \right] - (C_5 - C_3) R^3 \sin^2 \theta \cos \theta \cos \phi \right\} \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y_2} = \frac{\rho}{3} \Delta \omega^2 R \cos \theta \sin \phi \left[\frac{C_4}{\eta} \bar{R}^2 - C_5 R^2 \left(3 \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\eta^3} \right) + C_3 R^2 \left(3 \sin^2 \theta - \frac{\cos^2 \theta}{\eta^3} \right) \right] \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y_3} = \frac{\rho}{3} \Delta \omega^2 \sqrt{\eta} R \sin \theta \left[C_4 \bar{R}^2 + C_3 R^2 (\eta \sin^2 \theta - \frac{6}{\eta^2} \cos^2 \theta) - C_5 R^2 (\eta \sin^2 \theta + \frac{3}{\eta^2} \cos^2 \theta) \right] \quad (3.13)$$

代 (3.5) 至 (3.13) 有关之值入 (3.4) 式，即求出附加的应力分量之值。

我们还要把直角坐标中的应力分量化到曲线坐标方向上去，为此首先给出下表中各方向余弦之值。

	y_1	y_2	y_3
$\theta = R$	$l_1 = \sin \theta \cos \phi$	$m_1 = \sin \theta \sin \phi$	$n_1 = \cos \theta$
$\theta_2 = \theta$	$l_2 = \cos \theta \cos \phi$	$m_2 = \cos \theta \sin \phi$	$n_2 = -\sin \theta$
$\theta_3 = \phi$	$l_3 = -\sin \theta \sin \phi$	$m_3 = \sin \theta \cos \phi$	$n_3 = 0$

然后利用下面的公式：

$$\left. \begin{aligned} F_R = \Delta \tau_{11} = \Delta \sigma_{y_1} l_1^2 + \Delta \sigma_{y_2} m_1^2 + \Delta \sigma_{y_3} n_1^2 + 2 \Delta \tau_{y_1 y_2} l_1 m_1 + 2 \Delta \tau_{y_2 y_3} m_1 n_1 + 2 \Delta \tau_{y_3 y_1} n_1 l_1 \\ \Delta \tau_{R\theta} = \Delta \tau_{12} = \Delta \sigma_{y_1} l_1 l_2 + \Delta \sigma_{y_2} m_1 m_2 + \Delta \sigma_{y_3} n_1 n_2 + \Delta \tau_{y_1 y_2} (l_1 m_2 + l_2 m_1) \\ + \Delta \tau_{y_2 y_3} (m_1 n_2 + m_2 n_1) + \Delta \tau_{y_3 y_1} (n_1 l_2 + n_2 l_1) \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

在 (3.14) 式中，我们只写出了两个应力分量的表达式，而其它四个分量可依此两式轮换相应的指标而得。

地球自转的角速度发生突然变化时，地球内部的应力是 (2.17) 式中相应值，以 (2.31') 的 $\eta(R, \theta)$ 代替其常数 η 及 (3.14) 两者迭加而得。

四、结 束 语

文献^[13]介绍深水上的浮冰层受点源脉冲而产生的弯曲波，结果得到冰层的垂直位移 W_1 满足 Winklev 型弹性地基的薄板弯曲振动方程。地球的地壳可视为浮在地幔粘滞流体上的球壳。在法向荷再不大时，冰层上的水及地壳下的岩浆都可当作弹性体看待，假定地球是弹性有理。

既然我们最关心的是地壳的应力，前面用弹性理论求应力场的公式当然只适用于地壳这部份弹性固体而不适用地壳以下的流体，即限制 $\bar{R} \leq R \leq \bar{R}$ ， $\bar{R} = 6371$ 公里， $\bar{R} = 6338$ 公里，这时代替 (2.30)，我们用下面壳体公式：

$$\bar{\eta} = \frac{4}{\pi (\bar{R}^2 - R^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{R}{\bar{R}}}^{\frac{\bar{R}}{R}} \left(\frac{R}{\bar{R}} \right)^c [1 + \sin(\theta - \bar{\theta})] R dR d\theta \quad (4.1)$$

$$\therefore \bar{\eta} = \frac{4}{\pi(C+2)(\bar{R}^2 - \bar{R}^2)} \left[\bar{R}^2 - \left(\frac{\bar{R}}{\bar{R}} \right)^C \bar{R}^2 \right] \left(\frac{\pi}{2} - \sin \bar{\theta} + \cos \bar{\theta} \right) \quad (4.1')$$

由(4.1)式, 只能用试算法求C之值, 这当然不如前面的(2.30)式方便, 但我们已经把地壳单独分离出来进行处理, 结果必然更精确。同样对(2.23)及(2.24)进行积分时亦应如(4.1)式那样。结果(2.25)照旧, 而(2.26)由于积分R的限由 \bar{R} 至0改为 \bar{R} 至 \bar{R} 而变成:

$$\left(\bar{\eta} + \frac{3}{\bar{\eta}^2} \right) (\Phi + \bar{\eta} P) + \frac{\rho(\bar{R} - \bar{R})}{5(1 + \bar{\eta}^3)} + \frac{\rho\omega^2(\bar{R}^3 - \bar{R}^3)}{5(1 + \bar{\eta}^3)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = 0 \quad (4.2)$$

这样我们又完成了壳体的计算工作。

(本文1980年2月6日收到)

参 考 文 献

- [1] 李四光, 地质力学概论, 131, 1973.
- [2] 付承义, 地球十讲, 53—63, 1976.
- [3] A.E.H. love, A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th edition, 235, 260, 1944.
- [4] A.E. Green, W. Zerna, Theoretical elasticity, Chap. III.V, 1954.
- [5] Paul Madariaga, Dynamics on expanding circular fault, Bull, Seism Soc. Am., 66, 1976.
- [6] L.B. Freund, D.M. Barnett, Two-dimensional analysis of Surface deformation due to dip-slip faulting, Bull Seism, Soc, Am, 66, 1976.
- [7] 曾心传, 半无限地下介质中与垂直张性裂缝相关联的应力场和地面形变, 地球物理学报, 21卷4期, 1978.
- [8] 钱伟长、叶开源, 弹性力学, 322—326, 335—336, 1956.
- [9] A.E. Green, J.E. Adkins, Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics, Oxford, clarendon Press, 222—225, 1960.
- [10] A.H. 吉洪诺夫, A.A. 萨马尔斯基, 数学物理方程, 第五章 § 1, 黄克欧等译, 1957.
- [11] J.T. Oden, Finite elements of nonlinear Continua, Mc Graw Hill, 1970.
- [12] F.A. Dahlen, Excitation of the normal modes of a rotating earth model by an earthquake fault, Geophy, J. of R.A.S, Vol, 54, №.1; 1978.
- [13] W. 伊文等, 层状介质中的弹性波, 刘光鼎译, 303—304, 1966.
- [14] 李四光, 地质力学方法, 科学出版社, 4, 1979. (引用 Darwin, G.H., Scientific Papers, Vol. II, 476—480, 501—506)

THE STRESS FIELD OF THE EARTH DUE
TO ITS ROTATION

Fan Ja-shen

Li Ja-you

(The Seismological Bureau of Yunnan Province)

Abstract

In this paper, based on the theory of finite elastic deformation, we have obtained the stress components of the crust of the Earth under uniform angular velocity. After this, infinitesimal elastic deformation theory is applied to get the additional stress due to the change of angular velocity.