

关于地下热应力波的传播问题

刘慈群

(中国科学院兰州冰川冻土研究所)

前言

在地震孕育过程中, (由于断层的预滑等) 有可能产生热, 从而引起温度变化。而地壳介质既有弹性又有导热性。因此, 探讨地下热应力波的传播问题, 在地震学中是有意义的。有可能通过测量热应力波来预报地震以及鉴别地下核爆炸的能级等。

考虑温度传导的影响时, 介质的形变将等于应力所引起的形变加上温度差所引起的形变^[1]。例如, 在x方向的形变可表示为:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{xx} + \alpha T = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} - \nu \sigma_{zz}) + \alpha T$$

式中 E——介质的弹性模量;

ν ——介质的泊桑比;

σ_{ij} ——应力张量;

α ——介质的温度膨胀系数;

T——相对于初始状态的温度。

假定温度的传导与介质的力学状态无关; 便可用热传导方程近似地代替能量方程。这就是热弹性问题的非耦合理论^[1]。

本文将在上述前提条件下, 求解热应力波的传播问题。

(一) 平面热应力波

平推断层蠕滑时产生的热应力, 可看作平面热应力波传播问题^[2]。这时, 运动方程为:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}; \quad (1.1)$$

热应力应变物理方程为:

$$\sigma = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - m T; \quad (1.2)$$

热传导方程为:

$$-\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad ; \quad (1.3)$$

式中 λ, μ ——介质的拉美弹性常数;

$$m = (3\lambda + 2\mu)\alpha = E\alpha / (1 - 2\nu)$$

如 $\kappa = K/\rho C_0$ ——温度传导系数;

C_0 ——比热, ρ ——比重。

将式(1.2)代入式(1.1), 得平面热应力波动方程:

$$C^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = m \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad ; \quad (1.4)$$

式中 $C = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ ——弹性纵波波速。

式(1.4)可理解为: 有热源作用下, 弹性介质波动方程。它的解等于: 非齐次方程的特解 $\sigma_1(x, t)$ (相当于温度梯度所引起的应力) 和齐次方程的一般解 $\sigma_2(x, t)$ (相当于外力所引起的应力) 之和。

首先考虑在下述边值条件下:

$$T(x, 0) = \sigma(x, 0) = 0; \quad (1.5)$$

$$T(0, t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ T_0, & t \geq 0; \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\sigma(0, t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \sigma_0, & t \geq 0; \end{cases} \quad (1.7)$$

$$T(\infty, t) = \sigma(\infty, t) = 0; \quad (1.8)$$

联立求解方程组(1.3)——(1.4)。

问题(1.3)——(1.8)相当于平推断层蠕滑时所引起的热应力波的数学模型; $\sigma_0 = 0$ 对应着无外力作用 (仅有热的作用) 的情况; $\sigma_0 = -mT_0$ 对应着 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$ 的情况。

应用拉氏变换求解上述方程组, 从而得:

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} = -\frac{S}{\kappa} \bar{T} \quad ; \quad (1.9)$$

$$C^2 \frac{d^2 \bar{\sigma}}{dx^2} - S^2 \bar{\sigma} = m S^2 \bar{T} \quad ; \quad (1.10)$$

$$\bar{T}(0) = -\frac{T_0}{S} \quad ; \quad (1.11)$$

$$\bar{\sigma}(0) = -\frac{\sigma_0}{S}; \quad (1.12)$$

$$\bar{T}(\infty) = \bar{\sigma}(\infty) = 0 \quad ; \quad (1.13)$$

式中 $\bar{T} = \int_0^\infty T \cdot e^{-st} dt$ ——温度影象;

$$\bar{\sigma} = \int_0^{\infty} \sigma e^{-st} dt \text{——应力影象。}$$

考虑到边界条件 (1.11)、(1.13)，式 (1.9) 的解为：

$$\bar{T} = -\frac{T_0}{S} \exp\left(-\sqrt{\frac{S}{\kappa}} x\right) ; \quad (1.14)$$

将式 (1.14) 代入式 (1.10) 得：

$$C^2 \frac{d\bar{\sigma}}{dx^2} - S^2 \bar{\sigma} = mT_0 S \exp\left(-\sqrt{\frac{S}{\kappa}} x\right) ; \quad (1.15)$$

式 (1.15) 的特解为

$$\bar{\sigma}_1 = \Lambda \exp\left(-\sqrt{\frac{S}{\kappa}} x\right) ; \quad (1.16)$$

代入 (1.15) 式可得：

$$\Lambda = -mT_0 / \left(S - \frac{C^2}{\kappa}\right)$$

在 $X = 0$ 处应力影象

$$\bar{\sigma}_1(0) = -\frac{mT_0}{S - \frac{C^2}{\kappa}} ; \quad (1.17)$$

式 (1.16) 的原象，即由温度变化所引起的应力为：

$$\begin{aligned} \sigma_1(\bar{x}, \bar{t}) = & -\frac{mT_0}{2} \left[\exp(\bar{t} - \bar{x}) \operatorname{erfc} \frac{\bar{x} - 2\bar{t}}{2\sqrt{\bar{t}}} + \right. \\ & \left. + \exp(\bar{t} + \bar{x}) \operatorname{erfc} \frac{\bar{x} + 2\bar{t}}{2\sqrt{\bar{t}}} \right] ; \quad (1.18) \end{aligned}$$

式中： $\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-x^2) dx$ ——高斯误差函数；

$$\frac{\bar{t}}{t} = \frac{C^2 t}{\kappa} ; \quad \frac{\bar{x}}{x} = cx/\kappa$$

当 S 足够小或者时间 t 足够长时；式 (1.16) 式 (1.18) 分别简化为：

$$\bar{\sigma}_1(x) \approx -\frac{\kappa m T_0}{C^2} \exp\left(-\sqrt{\frac{S}{\kappa}} x\right) ; \quad (1.16a)$$

$$\sigma_1(\bar{x}, \bar{t}) \approx \frac{mT_0}{2} \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{\pi \bar{t}^3}} \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{4\bar{t}}\right) \quad (1.18a)$$

当 S 足够大或者时间 t 足够小时，从式 (1.16)、(1.18) 可知：由温度变化所引起的应力 σ_1 近似等于零。

考虑到边界条件 (1.13), 齐次方程 (1.15) 的一般解为:

$$\bar{\sigma}_2 = B \cdot \exp\left(-\frac{S}{C}x\right), \quad (1.19)$$

式中 B 决定于边界条件 (1.12), 考虑到 (1.17) 得:

$$B = \bar{\sigma}_2(0) = \frac{\sigma_0}{S} + \frac{mT_0}{S - \frac{C^2}{K}};$$

式 (1.19) 的原象, 即由外力所引起的应力为:

$$\sigma_2(\bar{x}, \bar{t}) = \sigma_0 H(\tau) + mT_0 \cdot \exp\left(-\frac{c^2}{K}\tau\right) \tau H(\tau), \quad (1.20)$$

式中 $\tau = \bar{t} - \bar{x}$; $H(\tau)$ —— 单位阶跃函数。

从式 (1.18)、(1.20) 可得总应力:

$$\sigma(\bar{x}, \bar{t}) = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_0 \cdot H(\tau) + mT_0 \phi(\bar{x}, \bar{t}), \quad (1.21)$$

式中: $\phi(\bar{x}, \bar{t}) = \exp(\bar{t} - \bar{x}) \cdot H(\tau) - \frac{1}{2} [\exp(\bar{t} - \bar{x}) \cdot$

$$\cdot \operatorname{erfc} \frac{\bar{x} - 2\bar{t}}{2\sqrt{\bar{t}}} + \exp(\bar{t} + \bar{x}) \cdot \operatorname{erfc} \frac{\bar{x} + 2\bar{t}}{\sqrt{\bar{t}}}]$$

函数 ϕ 的性质是: $\bar{t} > \bar{x}$, $\phi > 0$; $\bar{x} \rightarrow 0$, $\phi \rightarrow 0$; $\bar{t} < \bar{x}$, $\phi < 0$; $\bar{x} \rightarrow \infty$, $\phi \rightarrow 0$; $\bar{t} = \bar{x}$, ϕ 产生间断, 其值等于 1。

当温度膨胀系数 $\alpha = 0$ 时, 从式 (1.21) 得熟知的不考虑温度影响时、一维应力波传播方程:

$$\sigma = \sigma_0 H\left(t - \frac{X}{C}\right).$$

函数 $\phi(\bar{x}, \bar{t})$ 反映着热应力波的性质。它从理论上启示我们, 测量热应力 (变形) 的变化, 可能对地震预报有助益。

在 $x = 0$ 处, 温度应力为任意函数时, 根据拉氏变换影象乘积定理, 可得热应力波动方程的一般解。

(二) 球面热应力波

地下核爆炸产生的热应力, 可看作球面热应力波传播问题〔2〕。

由于球对称, 介质的位移函数为 $\varphi(r, t)$,

即 $u(r, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$, $v = w = 0$ 。这时, 运动方程为:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_\theta), \quad (2.1)$$

热应力、应变物理方程为:

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \alpha T \right) + 2\lambda \left(\frac{u}{r} - \alpha T \right), \quad (2.2)$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \lambda \left(-\frac{\partial u}{\partial r} - \alpha T \right) + 2(\lambda + \mu) \left(\frac{u}{r} - \alpha T \right); \quad (2.3)$$

不考虑变形对温度分布影响的能量方程, 即热传导方程为:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}; \quad (2.4)$$

将式(2.2)、(2.3)代入式(2.1)得热应力球面波动方程:

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - m T; \quad (2.5)$$

今在半径为 a 的空洞中, 加一阶跃应力和温度, 求在无限均匀介质中球面波传播问题, 即在下述边值条件下:

$$u(r, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = T(r, 0) = 0 \quad (2.6)$$

$$\sigma(a, t) = \sigma_0 \cdot H(t) \quad (2.7)$$

$$T(a, t) = T_0 \cdot H(t) \quad (2.8)$$

$$\sigma(\infty, t) = T(\infty, t) = 0 \text{ 求解微分方程组(2.4) - (2.5).} \quad (2.9)$$

应用拉氏变换求解上述方程组, 从而得:

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d \bar{T}}{dr} = \frac{S}{\kappa} \bar{T} \quad (2.10)$$

$$S^2 \bar{\varphi} - C_1^2 \left(\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d \bar{\varphi}}{dr} \right) = -C_2^2 \alpha \bar{T} \quad (2.11)$$

$$\bar{\sigma}(a) = \frac{\sigma_0}{S} \quad (2.12)$$

$$\bar{T}(a) = \frac{T_0}{S} \quad (2.13)$$

$$\bar{T}(\infty) = \bar{\sigma}(\infty) = 0; \quad (2.14)$$

式中

$$\bar{\varphi} = \int_0^\infty \varphi \cdot e^{-st} dt \text{——位移函数影象}$$

$$C_1 = \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right]^{1/2}, \quad C_2 = \left[\frac{3\lambda + 2\mu}{\rho} \right]^{1/2}.$$

式(2.10)、(2.13)、(2.14)的解为:

$$\bar{T}(r) = \frac{T_0}{S} \frac{a}{r} \exp \left(-\sqrt{\frac{S}{\kappa}} (r-a) \right) \quad (2.15)$$

方程(2.11)的解 $\bar{\varphi}$ 等于非齐次方程的特解 $\bar{\varphi}_1$ 和齐次方程的一般解 $\bar{\varphi}_2$ 之和, 即

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2 \quad (2.16)$$

相应的应力影象为:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 \quad (2.17)$$

从而边界条件(2.12)可写成

$$\bar{\sigma}_1(a) + \bar{\sigma}_2(a) = \frac{\sigma_0}{S} \quad (2.18)$$

从式(2.2)得热应力与位移函数影象关系为:

$$\bar{\sigma}_r = (\lambda + 2\mu) \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dr^2} + \frac{2\lambda}{r} \frac{d \bar{\varphi}}{dr} - m \bar{T} \quad (2.19)$$

将(2.15)代入(2.11)求得非齐次方程的特解:

$$\bar{\varphi}_1 = -\frac{C_2^2 \alpha T_0}{S^2(S - C_1^2/\kappa)} \cdot \frac{a}{r} \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{S}{\kappa}}(r-a)\right) \quad (2.20)$$

由于运算繁赘, 不一般求原函数。下面着重讨论一些特殊情况。

当时间 t 足够大时或者 S 足够小时, 从式(2.20)可得位移函数:

$$\varphi_1(r, t) \approx 4 \frac{C_2^2 \alpha T_0}{C_1^2} \frac{at}{r} i^2 \operatorname{erfc} \frac{r-a}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (2.21)$$

式中

$$i^n \operatorname{erfc} x = \int_x^\infty i^{n-1} \cdot \operatorname{erfc} \xi d\xi$$

特解在 $x=a$ 处的热应力形象为:

$$\bar{\sigma}_1(a) = -\frac{C_2^2 \alpha T_0}{S^2 \left(S - \frac{C_1^2}{\kappa}\right)} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\kappa} S + \frac{4\mu}{a} \sqrt{\frac{S}{\kappa} + \frac{4\mu}{a^2}} \right] \quad (2.22)$$

考虑到边界条件(2.14), 齐次方程的一般解为:

$$\bar{\varphi}_2 = B \frac{a}{r} \exp\left(-\frac{S}{C_1}(r-a)\right) \quad (2.23)$$

式中 B 决定于边界条件(2.18), 从式(2.19)、(2.22)得

$$B = \frac{\sigma_0/\rho + C_2^2 \alpha T_0}{S \left(S^2 + \frac{4C_3^2}{aC_1} S + \frac{4C_3^2}{a^2}\right)} + \frac{C_2^2 \alpha T_0 \left(\frac{C_1^2}{\kappa} S + 4 \frac{C_3^2}{a} \sqrt{\frac{S}{\kappa} + 4 \frac{C_3^2}{a^2}}\right)}{S^2 \left(S - \frac{C_1^2}{\kappa}\right) \left(S^2 + \frac{4C_3^2}{aC_1} S + \frac{4C_3^2}{a^2}\right)}$$

式中 $C_3 = \left[\frac{\mu}{\rho}\right]^{\frac{1}{2}}$ ——横波速度。

当 S 足够小时, 从式(2.23)得位移函数:

$$\varphi_2(r, t) \approx \left(\frac{\sigma_0}{\rho} + C_2^2 \alpha T_0\right) \frac{a^2}{4C_3^2} H(\tau) - \frac{C_2^2}{C_1^2} \alpha T_0 \tau \cdot H(\tau)$$

式中 $\tau = t - \frac{X}{C}$ (2.34)

微分式(2.20)、(2.23)得位移影象:

$$\begin{aligned} \bar{u} = & -A \left(\frac{a}{r^2} + \sqrt{\frac{S}{\kappa}} \frac{a}{r} \right) \exp\left(-\sqrt{\frac{S}{\kappa}}(r-a)\right) - \\ & -B \left(\frac{a}{r^2} + \frac{S}{C_1} \frac{a}{r} \right) \exp\left(-\frac{S}{C_1}(r-a)\right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

因为地震记录仪器都有一定的频率响应范围, 而传播介质亦有波作用, 因此讨论位移频谱比较合适。在式(2.25)中令 $S = i\omega$, 即得位移频谱函数。

当 r 很大时, 即当 $r^2 \gg r$, $\exp\left(-\sqrt{-\frac{\omega}{2\kappa}}(r-a)\right) \ll 1$ 时, 由于高频成份吸收

很快, 即 $\omega \ll \frac{C_1}{a}$ 则由(2.25)可得远处记录到的位移频谱应为:

$$|\bar{U}(\omega)| \approx \left[-\frac{(\sigma_0/\rho + C_2^2 \alpha T_0)^2 a^4}{16 C_1^2 C_3^4} + \frac{C_2^4}{C_1^6} - \frac{\kappa^2 a^2 T_0^2}{\omega^2} \right]^{1/2} \cdot \frac{a}{r}; \quad (2.26)$$

式(2.26)中第二项反映了温度对位移频谱的影响; 频率愈小, 影响愈大。如不考虑温度的影响, 位移频谱就近似与频率无关, 看来, 在空洞中产生的高温 T_0 将对长周期的位移频谱有较大的影响。

根据上述分析: 若设计和安装长周期的地震仪, 有可能预先记录到大地震的前震以及鉴别地下核爆炸的能级。

参 考 文 献

- [1] Boleg, B.A., and Weiner, J.H., Theore of Thermal Stresses, New York, 1960.
- [2] 帕尔库斯, H., 非定常热应力, 科学出版社, 1965.

(上接第36页)

- [10] 时振梁、环文林、武宦英、曹新玲, 我国强震活动和板块构造, 地质科学1973年, 第4期。
- [11] 魏顺民、李志义等, 唐山地震区区域构造背景和发震构造模式的讨论, 地质科学1977, 第3期。
- [12] 张文佑、钟嘉猷, 中国断裂构造体系的发展, 地质科学1977年, 第3期。
- [13] 郭增建、秦保燕等, 从水平和垂直力的相互作用讨论我国境内地震的孕育和发生, 地球物理学报1977年第20卷, 第3期。
- [14] 叶洪等, 喜马拉雅弧形山系及其邻近地区现代构造应力分析, 地质科学1975年, 第1期。
- [15] 郭令智、施央申、马瑞士, 论古海沟岛弧系的研究方法及其意义, 福建地质1977年, 4。
- [16] 郭令智、施央申、马瑞士, 论现代海沟岛弧系和海沟形山脉系的形成和演化, 福建地质1977年, 4。
- [17] 叶大年、李达周、董光复、邱秀文, 信阳变质带的3T型多硅白云母和C类榴辉岩及其大地构造意义, 科学出版社即将出版。
- [18] 李志义等, 对我国地震地质特点的一些初步认识, 地质科学1974年, 第4期。