

刘庆林,孙攀旭,杨红.基于复阻尼理论的混合结构 Rayleigh 阻尼模型[J].地震工程学报,2018,40(5):983-987.doi:10.3969/j.issn.1000-0844.2018.05.983
LIU Qinglin, SUN Panxu, YANG Hong. Rayleigh Damping Model of Mixed Structures Based on Complex Damping Theory[J]. China Earthquake Engineering Journal, 2018, 40(5): 983-987. doi: 10.3969/j.issn.1000-0844.2018.05.983

基于复阻尼理论的混合结构 Rayleigh 阻尼模型

刘庆林¹, 孙攀旭², 杨 红^{2,3}

(1. 深圳信息职业技术学院交通与环境学院, 广东 深圳 518172; 2. 重庆大学土木工程学院, 重庆 400045;
3. 重庆大学山地城镇建设与新技术教育部重点实验室, 重庆 400045)

摘要: 混合结构的阻尼矩阵不满足经典阻尼条件, 导致传统的模态叠加法无法适用。复阻尼理论无法适用于时域计算, 其自由振动响应中存在发散现象。针对混合结构的阻尼矩阵非比例性和复阻尼理论的时域发散性, 基于频域等效原则构建了求解 Rayleigh 阻尼系数的数学优化模型, 进而得到与复阻尼理论等效的 Rayleigh 阻尼运动方程。算例分析表明: 依据位移时程响应和结构等效阻尼比可证明 Rayleigh 阻尼运动方程的正确性。基于本文研究成果, 等效复阻尼理论的混合结构 Rayleigh 阻尼运动方程可直接采用模态叠加法, 结合其确定的结构等效阻尼比, 为混合结构的振型分解反应谱法提供理论依据。

关键词: 混合结构; 复阻尼; 频域等效原则; Rayleigh 阻尼; 等效阻尼比

中图分类号: TU311.3

文献标志码: A

文章编号: 1000-0844(2018)05-0983-05

DOI: 10.3969/j.issn.1000-0844.2018.05.983

Rayleigh Damping Model of Mixed Structures Based on Complex Damping Theory

LIU Qinglin¹, SUN Panxu², YANG Hong^{2,3}

(1. School of Traffic and Engineering, Shenzhen Institute of Information Technology, Shenzhen 518172, Guangdong, China;

2. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China;

3. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area of Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

Abstract: The traditional modal superposition method cannot be used to model mixed structures because the damping matrix of mixed structures does not meet the classical damping condition. In addition, the complex damping theory cannot be applied in time domain calculations because of the divergence in structural free vibration response. To solve these problems, in this paper, a mathematical optimization model for solving Rayleigh damping coefficients is constructed based on the frequency domain equivalence principle. Modal mass participation factors are used as weighting function and the coefficients are used as variables, which can be calculated by the mathematical model. The Rayleigh damping motion equation, which is equivalent to complex damping theory, is obtained. The calculated results show that the correctness of Rayleigh damp-

收稿日期: 2017-08-18

基金项目: 国家自然科学基金项目(51578343)

第一作者简介: 刘庆林(1969—), 男, 博士, 高级工程师, 主要从事结构设计及抗震理论研究。E-mail: liu2xa@vip.163.com。

ing motion equation is proved according to the displacement-time history response and structural equivalent damping ratio. Based on the results of this study, the Rayleigh damping motion equation of mixed structures, which is equivalent to complex damping theory, can directly use the modal superposition method. Combined with structural equivalent damping ratios, it can provide a theoretical basis for mode-superposition response spectrum methods of mixed structures.

Keywords: mixed structures; complex damping; frequency domain equivalent principle; Rayleigh damping; equivalent damping ratio

0 引言

复阻尼理论具有使结构能量耗散与激励频率无关从而与实际相符的优点^[1],但存在计算结果可能发散的缺陷^[2]。Rayleigh 阻尼矩阵为结构质量矩阵和刚度矩阵的线性组合,满足经典阻尼条件,易于求解且不存在计算结果发散现象,因而得到广泛应用^[3]。Rayleigh 阻尼矩阵依赖于质量矩阵和刚度矩阵的合理组合,系数的选取对计算结果的合理性影响显著^[4-5],因此许多学者针对 Rayleigh 阻尼矩阵系数提出了不同的计算方法:Yoshida 等^[6]提出了在结构频率敏感范围内构建 Rayleigh 阻尼矩阵的方法;董云等^[7]建议基于结构基频、地震波反应谱和结构模态分析结果确定 Rayleigh 阻尼矩阵系数;邹德高等^[8]依据结构的频率特性和地震动的频谱特性计算 Rayleigh 阻尼矩阵系数;陈旭等^[9]选取控制结构反应的子结构周期来计算 Rayleigh 阻尼矩阵系数;潘旦光^[10]以结构位移反应峰值的误差为目标函数,建立求解 Rayleigh 阻尼系数的优化方程;黄维等^[11]基于随机地震动激励下位移响应误差最小,得到相应的混合结构 Rayleigh 阻尼模型。

针对不同材料单元组成的混合结构,即使各单元的阻尼矩阵满足经典阻尼条件,结构总阻尼矩阵也不再满足经典阻尼条件^[12]。本文利用 Rayleigh 阻尼易于求解的优点,基于与复阻尼等效的原则,确定 Rayleigh 阻尼矩阵系数,进而实现混合结构的模态叠加法。

1 等效复阻尼的 Rayleigh 阻尼

1.1 基于频域等效原则的 Rayleigh 阻尼

黏性阻尼理论存在能量耗散与激励频率相关的缺陷,导致结构高频模态地震作用效应偏小^[13]。相比黏性阻尼理论,复阻尼理论具有耗散能量与激励频率无关的优点,其阻尼矩阵仅依赖于结构的阻尼特性,更适用于混合结构的动力响应分析。

在地震作用下,多自由度结构基于复阻尼假定的动力方程为:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{iK}_\eta \mathbf{x}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = -\mathbf{MI}_g \mathbf{g}(t) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{M}$ 为结构质量矩阵; $\mathbf{K}$ 为结构刚度矩阵; $\mathbf{K}_\eta = \sum_e \eta_e \mathbf{K}_e$ 为结构复阻尼矩阵, η_e 和 $\mathbf{K}_e$ 分别为单元 e 的复阻尼系数和刚度矩阵; $\mathbf{g}(t)$ 为地震加速度; $\mathbf{i}$ 为虚数单位; $\mathbf{I}_g$ 为与地震动输入有关的向量,与 $\mathbf{g}(t)$ 方向相同的位移自由度元素为 1。

同一个结构基于 Rayleigh 阻尼假定的动力方程如下:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + (\alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{K})\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = -\mathbf{MI}_g \mathbf{g}(t) \quad (2)$$

式中: α_1 和 α_2 分别为质量矩阵和刚度矩阵的组合系数。

将式(1)和式(2)从时域转化到频域,得:

$$-\omega^2 \mathbf{M}\Gamma + \mathbf{iK}_\eta \Gamma + \mathbf{K}\Gamma = -\mathbf{MI}_g \Omega \quad (3)$$

$$-\omega^2 \mathbf{M}\Gamma + \mathbf{i}\omega(\alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{K})\Gamma + \mathbf{K}\Gamma = -\mathbf{MI}_g \Omega \quad (4)$$

式中: Γ 为 $\mathbf{x}(t)$ 的傅里叶变换; Ω 为 $\mathbf{g}(t)$ 的傅里叶变换。

要使式(4)与式(3)等效,两式的阻尼力项应该相等,即:

$$\alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{K} = \frac{1}{\omega} \mathbf{K}_\eta \quad (5)$$

此时结构的第 t 阶振型的阻尼比为:

$$\xi_t = \frac{\alpha_1}{2\omega_t} + \frac{1}{2}\alpha_2 \omega_t \quad (6)$$

式中: ω_t 为第 t 阶振型的频率。

混合结构由 m 种材料组成,每种材料对应的阻尼比为 $\xi_i (i=1,2,\dots,m)$,以 Rayleigh 阻尼矩阵的系数 α_1 和 α_2 为变量,采用最小二乘法进行拟合,引入目标函数。理论上,要求等式(5)在全部外荷载作用频率范围内成立,实际上是做不到的。为尽可能等效,应该选取尽可能多的结构对外荷载作用响应显著的频率,即结构自振频率。考虑到小阻尼情况下,结构有阻尼自由振动的频率与无阻尼自由振动的频率差别较小,因此将 ω 取为后者是合理可行的。

将式(5)等号两边分别表示为:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \text{ 和 } \frac{1}{\bar{\omega}} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

以振型参与质量系数作为每阶自振频率处逼近程度的权系数,构建目标函数。同时,结构的振型等效阻尼比不能超出材料阻尼比范围,增加相应的约束方程,从而构建以下数学模型

$$z = \min \left(\frac{\sum_{t=1}^s \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} r_t \left(c_{ij} - \frac{1}{\omega_t} d_{ij} \right)^2}{\sum_{t=1}^s r_t} \right)$$
$$\begin{cases} \frac{\alpha_1}{2\omega_t} + \frac{1}{2}\alpha_2\omega_t \geq \xi_{\min} & (t=1,2,\cdots,s) \\ \frac{\alpha_1}{2\omega_t} + \frac{1}{2}\alpha_2\omega_t \leq \xi_{\max} & (t=1,2,\cdots,s) \end{cases} \quad (7)$$
$$\begin{cases} \xi_{\min} = \min(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \\ \xi_{\max} = \max(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \end{cases}$$

式中: r_t 为结构第 t 阶振型的质量参与系数; s 为振型个数,根据计算精度要求确定,具体可以参考有关规范规程。

1.2 算例分析

如图 1 所示,以钢-混凝土组成的 5 层剪切型混合框架结构为例进行分析,钢结构的阻尼比为 0.02,钢筋混凝土结构的阻尼比为 0.05。

质量矩阵为:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.0 \end{bmatrix} \times 1\,000 \text{ kg} \quad (8)$$

刚度矩阵为:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1.5 & -1.5 & 0 & 0 & 0 \\ -1.5 & 3.0 & -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & 3.3 & -1.8 & 0 \\ 0 & 0 & -1.8 & 3.6 & -1.8 \\ 0 & 0 & 0 & -1.8 & 4.2 \end{bmatrix} \times 10^5 \text{ N/m} \quad (9)$$

复阻尼矩阵为:

$$\mathbf{K}_\eta = \begin{bmatrix} 0.06 & -0.06 & 0 & 0 & 0 \\ -0.06 & 0.12 & -0.06 & 0 & 0 \\ 0 & -0.06 & 0.24 & -0.18 & 0 \\ 0 & 0 & -0.18 & 0.36 & -0.18 \\ 0 & 0 & 0 & -0.18 & 0.42 \end{bmatrix} \times 10^5 \text{ N/m} \quad (10)$$

选取混合结构的前 4 阶振型即可满足精度计算要求^[14],由式(7) 计算出 Rayleigh 阻尼矩阵系数 $\alpha_1=2.245\,9\times 10^{-1}$ 和 $\alpha_2=5.501\,8\times 10^{-3}$ 。分别采用复阻尼理论和等效复阻尼的 Rayleigh 阻尼理论进行不同地震波作用下结构顶层结构水平位移响应的时域数值计算,结果如图 2 所示。可以看出,两种

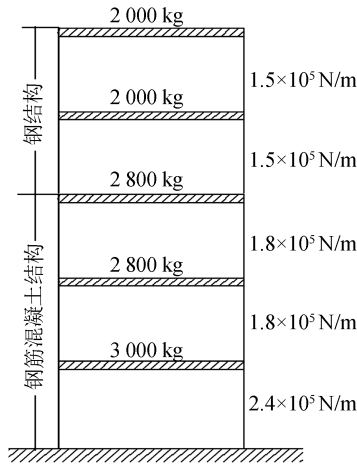
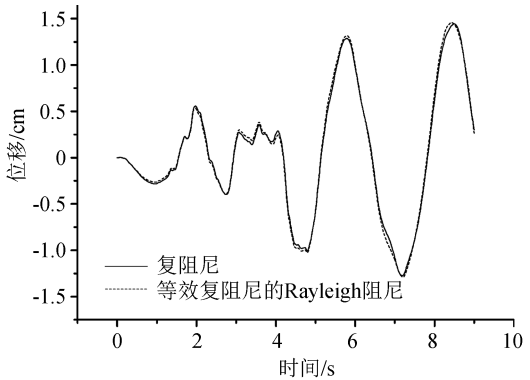
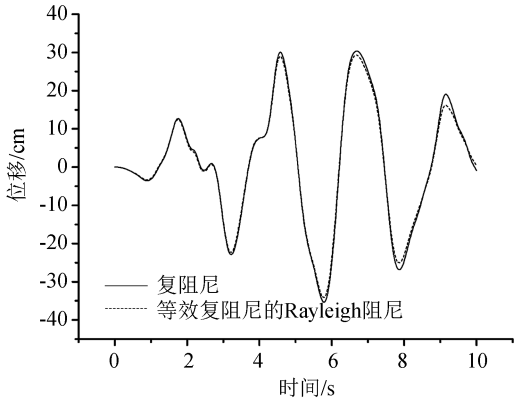


图 1 混合框架结构的质量和刚度分布图
Fig.1 Mass and stiffness distribution of the hybrid frame structure



(a) 迁安波东西分量作用下结构顶层位移结果



(b) El Centro 波南北分量作用下结构顶层位移结果

图 2 复阻尼和 Rayleigh 阻尼对比分析

Fig.2 Comparative analysis of complex damping and Rayleigh damping

阻尼理论得到的位移响应基本一致,证明了等效复阻尼的 Rayleigh 阻尼理论的正确性,进而使得混合结构的动力响应求解可以使用常规的振型分解法实现。

2 结构的等效阻尼比对比分析

由式(6)可以求得结构的各振型等效阻尼比,参考以往研究成果,以模态振型的质量参与系数作为权系数,对结构的各振型等效阻尼比进行加权平均,可得混合结构的等效阻尼比^[15]:

$$\xi_e = \frac{\sum_{i=1}^s r_i \xi_i}{\sum_{i=1}^s r_i} \tag{11}$$

以下将本文方法和具有代表性的其他几种方法计算得到的结果进行对比,进一步验证等效复阻尼的 Rayleigh 阻尼的正确性。

以图 1 所示 5 层钢-混凝土剪切型框架为例,将钢筋混凝土和钢构件的临界阻尼比分别取为 0.05 和 0.02,并将 0.05 和 0.02 作为等效结构阻尼比的上限值和下限值,根据本文方法(FR 法)、文献[16]基于应变能法(ND 法)、文献[17]和[18]基于复频率法(FPD 法)计算得到的各振型等效阻尼比和结构等效阻尼比分别如表 1、表 2 所列。

表 1 不同方法计算的振型等效阻尼比
Table 1 Modal equivalent damping ratios of different methods

振型阶数	等效阻尼比 (ND 法)	等效阻尼比 (FPD 法)	等效阻尼比 (FR 法)
1	0.045 8	0.040 2	0.050 0
2	0.031 7	0.028 0	0.035 3
3	0.041 4	0.032 8	0.040 2
4	0.038 2	0.030 6	0.046 6
5	0.033 0	0.044 2	0.050 0

表 2 不同方法计算的结构等效阻尼比
Table 2 Structural equivalent damping ratios of different methods

方法类型	ND 法	FPD 法	FR 法
结构等效阻尼比	0.044 0	0.038 5	0.048 0

由表 1 可知,ND 法、FPD 法和 FR 法的振型阻尼比均在材料的临界阻尼比区间范围内,与实际情况相符。

将表 2 的 3 个结构等效阻尼比代入式(1),可计算得到图 1 所示 5 层钢-混凝土剪切型混合框架结构的顶层位移,如图 3 所示。由图 3 可知,ND 法、

FR 法与 FPD 法的计算结果基本相同,从而进一步证明了本文方法的正确性。

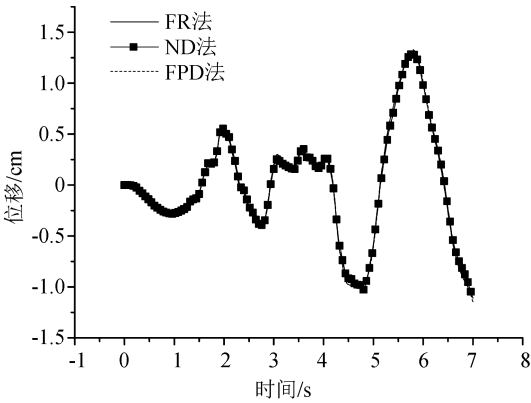


图 3 迁安波东西分量作用下混合结构顶层位移响应对比

Fig.3 Comparison between top displacement responses of the structure under east-west component of Qianan wave

3 结论

经理论推导和算例分析,得到以下结论:

(1) 在复阻尼理论的基础上,利用频域内阻尼力等效原则构建求解 Rayleigh 阻尼系数的数学优化模型,计算得到等效复阻尼的 Rayleigh 阻尼,使得结构动力方程易于采用常规的振型分解法求解,避免了复阻尼假定时动力方程求解的复杂性。

(2) 针对混合结构,分别采用等效复阻尼的 Rayleigh 阻尼与采用复阻尼两种方法计算,结果基本吻合,说明本文提出的等效复阻尼的 Rayleigh 阻尼方法是合理可行的。

参考文献(References)

[1] 朱镜清.结构抗震分析原理[M].北京:地震出版社,2002.
ZHU Jingqing. Seismic Analysis of Structures [M]. Beijing: Seismological Press,2002.

[2] 朱敏,朱镜清.逐步积分法求解复阻尼结构运动方程的稳定性问题[J].地震工程与工程振动,2001,21(4):59-62.
ZHU Min,ZHU Jingqing.Studies on Stability of Step-by-step Methods under Complex Damping Conditions[J].Earthquake Engineering and Engineering Vibration,2001,21(4):59-62.

[3] CRISTIAN Cruz,EDUARDO Miranda.Evaluation of the Rayleigh Damping Model for Buildings[J].Engineering Structures, 2017,138:324-336.

[4] 楼梦麟,隋磊,沈飞.不同阻尼矩阵建模对超高层结构地震反应分析的影响[J].结构工程师,2013,29(1):55-61.
LOU Menglin,SUI Lei,SHEN Fei.Effects of Damping Matrix Modeling on Seismic Responses of Super High-rise Structures

- [J].Structural Engineers,2013,29(1):55-61.
- [5] 潘旦光,高莉莉.Rayleigh 阻尼系数解法比较及对结构地震反应影响[J].工程力学,2015,32(6):192-198.
- PAN Danguang,GAO Lili.Comparison of Determination Methods for Rayleigh Damping Coefficients and Effects on Seismic Responses of Structures[J].Engineering Mechanics,2015,32(6):192-198.
- [6] YOSHIDA N,KOBAYASHI S,SUETOMI I,et al.Equivalent Linear Method Considering Frequency Dependent Characteristics of Stiffness and Damping[J].Soil Dynamics and Earthquake Engineering,2002,22(3):205-222.
- [7] 董云,楼梦麟.基于结构基频确定 Rayleigh 阻尼系数的优化方法及其讨论[J].湖南大学学报(自然科学版),2014,41(2):8-13.
- DONG Yun,LOU Menglin.An Optimization Solution for Rayleigh Damping Coefficients Based on the Fundamental Frequency of Structure[J].Journal of Hunan University (Natural Sciences),2014,41(2):8-13.
- [8] 邹德高,徐斌,孔宪京.Rayleigh 阻尼系数确定方法对高土石坝地震反应的影响研究[J].岩石力学,2011,32(3):797-803.
- ZOU Degao,XU Bin,KONG Xianjing.Study of Influence of Different Methods for Calculating Rayleigh Damping Coefficient on High Earth-rock Dam Seismic Response[J].Rock and Soil Mechanics,2011,32(3):797-803.
- [9] 陈旭,李建中.结构动力分析中 Rayleigh 阻尼合理取值研究[J].结构工程师,2013,29(5):28-33.
- CHEN Xu,LI Jianzhong.Selection of the Rayleigh Damping Matrix in Structural Dynamic Analysis[J].Structural Engineers,2013,29(5):28-33.
- [10] 潘旦光.地震反应分析中 Rayleigh 阻尼系数的优化解[J].工程力学,2013,30(11):15-20.
- PAN Danguang. An Optimization Solution for Rayleigh Damping Coefficients in Seismic Response Analysis[J].Engineering Mechanics,2013,30(11):15-20.
- [11] 黄维,钱江,周知.基于 Rayleigh 阻尼模型的竖向混合结构设计阻尼比研究[J].工程力学,2015,32(10):60-67.
- HUANG Wei,QIAN Jiang,ZHOU Zhi.Research on Equivalent Damping Ratio of Vertically Mixed Structures Based on Rayleigh Damping Model[J].Engineering Mechanics,2015,32(10):60-67.
- [12] 刘庆林,傅学怡,杨先桥.基于黏性阻尼假定的反应谱 CCQC 法研究[J].建筑科学与工程学报,2011,28(4):55-62.
- LIU Qinglin,FU Xueyi,YANG Xianqiao.Research on Response Spectrum CCQC Method Based on Viscous Damping Assumption[J].Journal of Architecture and Civil Engineering,2011,28(4):55-62.
- [13] 刘庆林,傅学怡,孙占琦.基于复阻尼假定的不同材料阻尼特性混合结构抗震分析复模态叠加法[J].建筑结构学报,2011,32(9):27-33.
- LIU Qinglin,FU Xueyi,SUN Zhanqi.A Complex Mode Superposition Method for Seismic Analysis of Structures of Multiple Material Damping Characteristics Based on Complex Damping Assumption[J].Journal of Building Structures,2011,32(9):27-33.
- [14] 高层建筑混凝土结构技术规程:JGJ3-2010[S].北京:中国建筑工业出版社,2010.
- Technical Specification for Concrete Structures of Tall Building:JGJ3-2010[S].Beijing:China Architecture & Building Press,2010.
- [15] WANG Judith.Rayleigh Coefficients for Series Infrastructure Systems with Multiple Damping Properties[J].Journal of Vibration and Control,2015,21(6):1234-1248.
- [16] 薛彦涛,韦承基,孙仁范,等.采用不同材料夹层时结构阻尼比计算方法(应变能法)[J].工程抗震与加固改造,2008,30(2):91-95.
- XUE Yantao,WEI Chengji,SUN Renfan,et al.Calculation Method for Damping Ratio of Different Story Added Structures (Strain Energy Method)[J].Earthquake Resistant Engineering and Retrofitting,2008,30(2):91-95.
- [17] 黄本才.组合结构振动的等效阻尼比[J].上海力学,1998,19(2):141-145.
- HUANG Bencai.Equivalent Modal Damping Ratios of Vibration in Composite Structures[J].Shanghai Journal of Mechanics,1998,19(2):141-145.
- [18] 王孝军,霍正存,马山明.钢混混合桥梁结构等效阻尼比的推算[J].公路工程,2009,34(1):81-83.
- WANG Xiaojun,HUOZhengcun,MA Shanming.Deduction of the Equivalent Modal Damping Ratio for the Composite Bridge Structure of Steel-reinforced Concrete[J].Highway Engineering,2009,34(1):81-83.