

付艳艳,余云燕.全埋入单桩基础横向振动模态正交性研究[J].地震工程学报,2020,42(4):833-839.doi:10.3969/j.issn.1000-0844.2020.04.833

FU Yanyan, YU Yunyan. Orthogonality of Transverse Vibration Modes of Single, Fully-Embedded Piles[J]. China Earthquake Engineering Journal, 2020, 42(4): 833-839. doi: 10.3969/j.issn.1000-0844.2020.04.833

全埋入单桩基础横向振动模态正交性研究

付艳艳, 余云燕

(兰州交通大学 土木工程学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 采用 Timoshenko 梁模型作为挠曲波在全埋入单桩基础中的传播模型, 根据频域中全埋入单桩基础横向振动时的运动微分方程, 结合各节点的力平衡、位移协调方程及局部对偶坐标系中内力及位移的对偶变换关系, 严格推导全埋入单桩基础横向振动的模态正交性条件。以回传射线矩阵法为基础, 求解全埋入单桩基础横向振动的自振频率、衰减系数及不同自振频率所对应的模态, 并通过具体算例验证全埋入单桩基础横向振动模态的正交性条件公式推导的正确性。

关键词: 全埋入单桩基础; 横向振动; 模态; 正交性

中图分类号: TU470.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-0844(2020)04-0833-07

DOI: 10.3969/j.issn.1000-0844.2020.04.833

Orthogonality of Transverse Vibration Modes of Single, Fully-Embedded Piles

FU Yanyan, YU Yunyan

(School of Civil Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: The Timoshenko beam model was used as the flexural wave propagation model in a single, fully-embedded pile. Based on the differential equation of transverse vibration of single, fully-embedded piles in a frequency domain, combined with the force balance and displacement compatibility equations of nodes and the dual transformation of the internal forces and displacements in two local dual coordinate systems, the orthogonality conditions of transverse vibration modes of a single, fully-embedded pile were derived. By virtue of the reverberation-ray matrix method, the natural frequencies, attenuation coefficients, and modes corresponding to different natural frequencies for a single, fully-embedded pile were solved. A specific case study is proposed to verify the correctness of the orthogonality conditions of modes.

Keywords: single, fully-embedded pile; transverse vibration; mode; orthogonality

收稿日期: 2018-12-11

基金项目: 国家自然科学基金(51268031, 11662007); 甘肃省基础研究创新群体(145RJIA332)

第一作者简介: 付艳艳(1987—), 女, 甘肃定西人, 博士研究生, 主要研究方向为: 岩土与地下工程, 土-结构耦合动力学。

E-mail: 648009089@qq.com.

通信作者: 余云燕(1968—), 女, 浙江江山人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为: 岩土与地下工程, 土-结构耦合动力学。

E-mail: yuyunyan@mail.lzjtu.cn.

0 引言

桩基础在桥梁、港口码头及海洋平台等工程中应用广泛。它除了要支承上部结构,还会受到船舶、流凌、水流、水浪的撞击作用。这些作用大都可以简化为作用在桩基础上的横向动力荷载。对于桩基横向振动问题的研究,前人已做了大量的工作。刘宗贤等^[1]通过动力分析,给出了桩基础横向自振特性及在横向动力与地震载荷作用下强迫反应的解析解。王立忠等^[2]通过解析法建立了瑞利波作用下多层介质中桩体横向位移的计算公式,分析了影响桩体横向位移变化规律的主要因素。冯永正等^[3]推导出了瑞利波作用下双桩横向相互作用因子的计算公式。王海东等^[4]将采用 Novak 薄层法计算地基土动力阻抗的方法引入到瑞利波作用下桩土横向动力响应分析中,分别分析了长径比、桩土刚度比、地基土的泊松比对单桩横向响应的影响。马亮亮^[5]和任夏丽^[6]基于回传射线矩阵法研究了斜向激振力(分解为横向和轴向)作用时结构的瞬态动力响应。以上研究均是围绕结构振动的位移解析解和振动响应展开的,而对全埋入单桩基础横向振动模态正交性方面的研究则甚少涉及。

模态正交性在结构的动力分析中占有十分重要的地位,在结构自振特性的计算中模态正交性是检验模态计算结果是否正确的方法之一,故对其进行研究是十分必要的。目前,国内外学者对地上结构模态正交性的研究已有了一些进展。例如,Clough 等^[7]采用 Betti 互易定理推导了单根杆轴向振动和单根梁横向振动的模态正交性;Guo 等^[8]应用 Betti 互易定理推导了复杂框架结构的模态正交性。彭丽^[9]运用复模态方法分析了黏弹性 Pasternak 地基梁上弹性 Euler-Bernoulli 梁的模态函数的正交性,并利用正交性将振动方程解耦。但在以往的研究中对埋入土体中结构的模态正交性的研究却很少。如付艳艳等^[10]基于回传射线矩阵法,仅对全埋入单桩基础纵向振动的模态正交性进行了研究。

本文考虑桩周土体对桩身的作用,对全埋入单桩基础横向振动的模态正交性进行研究,基于频域中全埋入单桩基础横向振动的运动方程,推导全埋入单桩基础对应于不同自振频率的位移模态的正交性条件,并通过具体的数值算例对公式推导结果的正确性进行验证。

1 全埋入单桩基础横向振动基本方程

图 1 所示为本文研究的全埋入单桩基础横向振动时的力学模型和坐标系,基本假定为:

- (1) 桩身材料为弹性材料;
- (2) 桩土紧密接触;
- (3) 桩周土均质;
- (4) 桩周土体变形已稳定;
- (5) 桩土系统振动为小变形;
- (6) 挠曲波在全埋入单桩基础中的传播模型为 Timoshenko 梁模型,桩侧土体对桩身作用采用并联的线性弹簧 k_v 和线性阻尼器 β_v 组成的模型模拟。

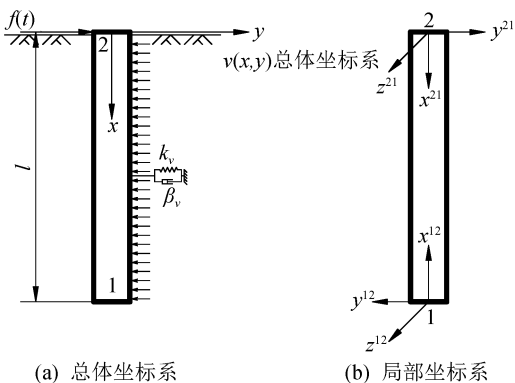


图 1 全埋入单桩基础横向振动力学模型及坐标系
Fig.1 Mechanical model and coordinate system for transverse vibration of single fully-embedded pile

图 1(b)所示的对偶局部坐标系 (x^{12}, y^{12}, z^{12}) 及 (x^{21}, y^{21}, z^{21}) 的坐标原点分别位于节点 1 和节点 2 处,两个对偶局部坐标系的 x 及 y 轴的方向各自相反。若以 l 表示桩身长度,则两对偶局部坐标系有如下的对偶变换关系:

$$x^{12} = l - x^{21}, y^{12} = -y^{21}, z^{12} = z^{21} \quad (1)$$

图 1 所示的全埋入单桩基础横向振动的运动方程为:

$$\begin{cases} \kappa'AG \frac{\partial^2 v_{ys}}{\partial x^2} - k_v v_y - \beta_v \frac{\partial v_y}{\partial t} = \rho A \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} \\ EI_z \frac{\partial^3 v_{yb}}{\partial x^3} + \kappa'AG \frac{\partial v_{ys}}{\partial x} = \rho I_z \frac{\partial^3 v_{yb}}{\partial x \partial t^2} \end{cases} \quad (2)$$

式中: $v_y = v_{yb} + v_{ys}$ 为桩基横向振动时沿 y 方向的横向位移,其中 v_{yb} 为绕 z 轴的弯矩所引起的挠度, v_{ys} 为沿 y 轴的剪力所引起的挠度; ρ 、 A 、 I_z 分别表示桩身材料密度、桩身横截面面积和桩身横截面对其形心主轴 z 轴的惯性矩; κ' 、 E 、 G 分别表示桩身材料的横截面剪力系数、杨氏模量和剪切模量。

令:

$$v_{yb}(x, t) = \hat{v}_{yb}(x, \omega) e^{i\omega t} \quad (3)$$

$$v_{ys}(x, t) = \hat{v}_{ys}(x, \omega) e^{i\omega t} \quad (4)$$

式中: $i = \sqrt{-1}$; $\omega = \omega_n + i\lambda_n$ 为角频率, 其中 ω_n 为自振频率, λ_n 为衰减系数; $\hat{v}_{yb}$ 及 $\hat{v}_{ys}$ 分别为频域中弯矩和剪力引起的挠度。将式(3)及式(4)代入式(2), 并整理得:

$$\begin{cases} \kappa'AG \frac{d^2 \hat{v}_{ys}(x, \omega)}{dx^2} = (-\omega^2 \rho A + k_v + i\omega \beta_v) \hat{v}_y(x, \omega) \\ EI_z \frac{d^3 \hat{v}_{yb}(x, \omega)}{dx^3} + \kappa'AG \frac{d \hat{v}_{ys}(x, \omega)}{dx} = \\ -\omega^2 \rho I_z \frac{d \hat{v}_{yb}(x, \omega)}{dx} \end{cases} \quad (5)$$

对式(5)进行求解, 得:

$$\hat{v}_{yb}(x, \omega) = a_3(\omega) e^{ik_3 x} + d_3(\omega) e^{-ik_3 x} + a_4(\omega) e^{ik_4 x} + d_4(\omega) e^{-ik_4 x} \quad (6)$$

$$\hat{v}_{ys}(x, \omega) = \alpha_3 [a_3(\omega) e^{ik_3 x} + d_3(\omega) e^{-ik_3 x}] + \alpha_4 [a_4(\omega) e^{ik_4 x} + d_4(\omega) e^{-ik_4 x}] \quad (7)$$

式中: a_3 、 a_4 为待定的入射波波幅, d_3 、 d_4 为待定的出射波波幅; k_3 、 k_4 为波数, α_3 、 α_4 分别为与 k_3 、 k_4 对应的波引起的 v_{ys} 与 v_{yb} 的比值, 其表达式如下:

$$k_j = \sqrt{\frac{\left(\frac{\omega^2}{c_0^2} + nQ\right) + (-1)^j \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c_0^2} + nQ\right)^2 - 4\left(\frac{\omega^2 nQ}{c_0^2} - \frac{Q}{R_z^2}\right)}}{2}} \quad (8)$$

$j = 3, 4$

$$\alpha_j(\omega) = nR_z^2 \left(k_j^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2} \right) \quad j = 3, 4 \quad (9)$$

其中: $Q = \frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{k_v}{EA} - i\omega \frac{\beta_v}{EA}$; $n = \frac{E}{\kappa'G}$ 为杨氏模量与

修正后的剪切模量之比; $R_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$ 为截面的回转半

径; $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 为纵波波速。

根据材料的本构关系, 可以得到剪力、弯矩、转角的稳态解表达式为:

$$\hat{V}_y(x, \omega) = i\kappa'AG [\alpha_3 k_3 (a_3(\omega) e^{ik_3 x} - d_3(\omega) e^{-ik_3 x}) + \alpha_4 k_4 (a_4(\omega) e^{ik_4 x} - d_4(\omega) e^{-ik_4 x})] \quad (10)$$

$$\hat{M}_z(x, \omega) = -EI_z [k_3^2 (a_3(\omega) e^{ik_3 x} + d_3(\omega) e^{-ik_3 x}) + k_4^2 (a_4(\omega) e^{ik_4 x} + d_4(\omega) e^{-ik_4 x})] \quad (11)$$

$$\hat{\varphi}_z(x, \omega) = ik_3 (a_3(\omega) e^{ik_3 x} - d_3(\omega) e^{-ik_3 x}) + ik_4 (a_4(\omega) e^{ik_4 x} - d_4(\omega) e^{-ik_4 x}) \quad (12)$$

2 回传射线矩阵法求解全埋入单桩基础横向振动的频率及模态

首先建立节点的散射关系及总体散射关系。根据图 2 所示的受力分析图, 在频域中对节点 1 建立力平衡和位移协调条件, 有:

$$\begin{cases} -\hat{V}_y^{12}(0, \omega) = 0 \\ \hat{M}_z^{12}(0, \omega) = 0 \\ -\hat{v}_y^{12}(0, \omega) = \hat{u}_Y^1(\omega) \\ \hat{\varphi}_z^{12}(0, \omega) = \hat{\theta}_z^1(\omega) \end{cases} \quad (13)$$

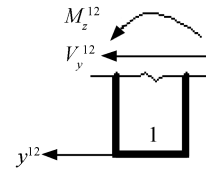


图 2 节点 1 受力分析图

Fig.2 The force analysis diagram of node 1

将式(13)写成矩阵形式:

$$\mathbf{T}_q^{12} \hat{\mathbf{f}}_q^{12}(0, \omega) = \hat{\mathbf{p}}_q^1 = \mathbf{0} \quad (14)$$

$$\mathbf{T}_q^{12} \hat{\mathbf{\delta}}_q^{12}(0, \omega) = \hat{\mathbf{u}}_q^1 \quad (15)$$

式中: $\hat{\mathbf{f}}_q^{12} = \begin{bmatrix} V_y^{12}(0, \omega) \\ M_z^{12}(0, \omega) \end{bmatrix}$ 为频域中节点 1 的内力向

量; $\hat{\mathbf{\delta}}_q^{12} = \begin{bmatrix} \hat{v}_y^{12}(0, \omega) \\ \hat{\varphi}_z^{12}(0, \omega) \end{bmatrix}$ 为频域中节点 1 的位移向量;

$\hat{\mathbf{p}}_q^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 为节点 1 所受的外力向量; $\hat{\mathbf{u}}_q^1 = \begin{bmatrix} \hat{u}_Y^1(\omega) \\ \hat{\theta}_z^1(\omega) \end{bmatrix}$ 为

节点 1 的位移向量; $\mathbf{T}_q^{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为局部坐标系 (y^{12}, z^{12}) 的坐标变换矩阵。

根据图 3 所示的受力分析图, 在频域中对节点 2 建立力平衡和位移协调条件, 有:

$$\begin{cases} \hat{V}_y^{21}(0, \omega) + \hat{f}(\omega) = 0 \\ \hat{M}_z^{21}(0, \omega) = 0 \\ \hat{v}_y^{21}(0, \omega) = \hat{u}_Y^2(\omega) \\ \hat{\varphi}_z^{21}(0, \omega) = \hat{\theta}_z^2(\omega) \end{cases} \quad (16)$$

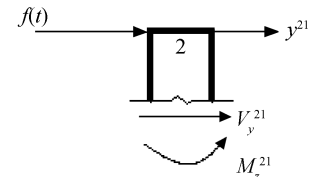


图 3 节点 2 受力分析图

Fig.3 The force analysis diagram of node 2

将式(16)写成矩阵形式:

$$\mathbf{T}_q^{21} \hat{\mathbf{f}}_q^{21}(0, \omega) = \hat{\mathbf{p}}_q^2 \quad (17)$$

$$\mathbf{T}_q^{21} \hat{\boldsymbol{\delta}}_q^{21}(0, \omega) = \hat{\mathbf{u}}_q^2 \quad (18)$$

其中: $\hat{\mathbf{f}}_q^{21}(0, \omega) = \begin{bmatrix} V_y^{21}(0, \omega) \\ M_z^{21}(0, \omega) \end{bmatrix}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\delta}}_q^{21}(0, \omega) =$

$\begin{bmatrix} \hat{v}_y^{21}(0, \omega) \\ \hat{\varphi}_z^{21}(0, \omega) \end{bmatrix}$ 分别为频域中节点 2 的内力向量和位

移向量; $\hat{\mathbf{p}}_q^2 = \begin{bmatrix} -\hat{f}(\omega) \\ 0 \end{bmatrix}$ 为节点 2 所受的外力向量;

$\hat{\mathbf{u}}_q^2 = \begin{bmatrix} \hat{u}_y^2(\omega) \\ \hat{\theta}_z^2(\omega) \end{bmatrix}$ 为节点 2 的位移向量; $\mathbf{T}_q^{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为

局部坐标系(y^{21}, z^{21})的坐标变换矩阵。

将式(10)、(11)代入式(14)、(17)中,整理可得:

$$\mathbf{d}^J = \mathbf{S}^J \mathbf{a}^J + \mathbf{s}^J \quad (19)$$

式中: $\mathbf{d}^J$ 和 $\mathbf{a}^J$ 分别表示节点 J 的入射波和出射波波幅向量; $\mathbf{S}^J$ 和 $\mathbf{s}^J$ 分别表示节点 J 的局部散射矩阵和波源矢量,即外荷载向量。

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^1 &= \begin{bmatrix} d_3^{12} \\ d_4^{12} \end{bmatrix}; \mathbf{a}^1 = \begin{bmatrix} a_3^{12} \\ a_4^{12} \end{bmatrix}; \mathbf{s}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{S}^1 &= \begin{bmatrix} \alpha_3 k_3 & \alpha_4 k_4 \\ k_3^2 & k_4^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_3 k_3 & \alpha_4 k_4 \\ -k_3^2 & -k_4^2 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{d}^2 &= \begin{bmatrix} d_3^{21} \\ d_4^{21} \end{bmatrix}; \mathbf{a}^2 = \begin{bmatrix} a_3^{21} \\ a_4^{21} \end{bmatrix}; \mathbf{s}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{\hat{f}(\omega)}{i\kappa'AG} \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{S}^2 &= \begin{bmatrix} \alpha_3 k_3 & \alpha_4 k_4 \\ k_3^2 & k_4^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_3 k_3 & \alpha_4 k_4 \\ -k_3^2 & -k_4^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

将各节点的散射关系组集到总体散射关系中,写成紧凑形式:

$$\mathbf{d} = \mathbf{S} \mathbf{a} + \mathbf{s} \quad (20)$$

其中:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^1 \\ \mathbf{d}^2 \end{bmatrix}; \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^1 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}^2 \end{bmatrix}; \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \end{bmatrix}; \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{s}^2 \end{bmatrix}$$

式中: $\mathbf{d}$ 、 $\mathbf{S}$ 、 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{s}$ 分别表示全埋入单桩基础横向振动时的总体出射波波幅向量、总体散射矩阵、总体入射波波幅向量和总体波源向量。

根据单元的相位关系:

$$\mathbf{a}_n^{JK}(\omega) = \mathbf{P}_n^{JK} \mathbf{d}_n^{KJ} \quad (21)$$

式中: $\mathbf{P}_n^{JK} = -e^{-ik_n l}$, $n = 3, 4$ 。于是得到入射波波幅 $\mathbf{a}$ 和新定义的出射波波幅 $\tilde{\mathbf{d}}$ 之间的关系式:

$$\mathbf{a} = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{d}} \quad (22)$$

式中: 新定义的出射波波幅向量 $\tilde{\mathbf{d}} = [d_3^{21} \ d_4^{21} \ d_3^{12} \ d_4^{12}]^T$; 散射矩阵 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -e^{-ik_3 l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-ik_4 l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-ik_3 l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-ik_4 l} \end{bmatrix}$ 。

引入置换矩阵 $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 得到入射波

波幅 $\mathbf{a}$ 和出射波波幅 $\mathbf{d}$ 之间的关系为:

$$\mathbf{a} = \mathbf{P} \mathbf{U} \mathbf{d} \quad (23)$$

将式(23)代入式(20)中,整理后可得:

$$[\mathbf{I} - \mathbf{R}] \mathbf{d} = \mathbf{s} \quad (24)$$

式中: $\mathbf{R} = \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{U}$, 为全埋入单桩基础发生横向振动时的回传射线矩阵。模态分析时,结构受到扰动离开平衡位置后不再受外力的影响,此时 $\mathbf{s} = 0$,将其代入式(24)中得:

$$[\mathbf{I} - \mathbf{R}] \mathbf{d} = 0 \quad (25)$$

式中: $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{d}$ 都是关于自振频率 ω 的函数。要使式(25)中的出射波波幅 $\mathbf{d}$ 有非零解,则系数矩阵必须为零,即得到全埋入单桩基础横向振动时的频率方程:

$$|\mathbf{I} - \mathbf{R}| = 0 \quad (26)$$

式(26)为超越方程,在数学上无法求到其精确解,本文参考文献[11],基于回传射线矩阵法采用二分法及黄金分割法对其进行求解。通过参考文献[11]~[13]可知,利用该方法求解自振频率,方法有效且精度较高。

根据伴随矩阵的性质可知:

$$[\mathbf{I} - \mathbf{R}] \times [\mathbf{I} - \mathbf{R}]^* = |\mathbf{I} - \mathbf{R}| \times \mathbf{E} \quad (27)$$

式中: $[\mathbf{I} - \mathbf{R}]^*$ 表示矩阵 $[\mathbf{I} - \mathbf{R}]$ 的伴随矩阵; $\mathbf{E}$ 表示与 $[\mathbf{I} - \mathbf{R}]$ 同阶的单位矩阵。则 $[\mathbf{I} - \mathbf{R}]^*$ 的每一个非零列可看作出射波波幅向量 $\mathbf{d}$ 的解。得到出射波波幅向量 $\mathbf{d}$ 后,就可以通过相位变换关系式(23)求得入射波波幅向量 $\mathbf{a}$ 。将求得的 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{d}$ 代入位移表达式(6)、(7)和(12),可得桩基础任意一点的挠度和转角位移,将各点位移归一化后即可得桩基础的模态。

3 模态正交性

本文讨论的单桩基础为对称横截面,故文中仅讨论 y 轴方向位移模态的正交性。设 $\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12} = [\hat{v}_{y,i}^{12}, \hat{\varphi}_{z,i}^{12}]^T$ 和 $\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12} = [\hat{v}_{y,j}^{12}, \hat{\varphi}_{z,j}^{12}]^T$ 是单元 12 在局部坐标系

(x^{12}, y^{12}, z^{12}) 下分别与固有频率 ω_i 和 ω_j 相对应的位移模态, $\hat{f}_{q,i}^{12} = [\hat{V}_{y,i}^{12}, \hat{M}_{z,i}^{12}]$ 和 $\hat{f}_{q,j}^{12} = [\hat{V}_{y,j}^{12}, \hat{M}_{z,j}^{12}]$ 是单元 12 在局部坐标系 (x^{12}, y^{12}, z^{12}) 下分别与固有频率 ω_i 和 ω_j 相对应的内力向量。单元 21 在局部坐标系 (x^{21}, y^{21}, z^{21}) 下的量对应表示。

由于 $v_y = v_{yb} + v_{ys}$, $\varphi_z = \frac{\partial v_{yb}}{\partial x}$, 故全埋入单桩基础横向振动运动方程(5)亦可写为:

$$\begin{cases} \kappa'AG \frac{d^2 \hat{v}_y}{dx^2} - \kappa'AG \frac{d\hat{\varphi}_z}{dx} = -\omega^2 \rho A \hat{v}_y + k_v \hat{v}_y + i\omega \beta_v \hat{v}_y \\ \kappa'AG \frac{d\hat{v}_y}{dx} + EI_z \frac{d^2 \hat{\varphi}_z}{dx^2} - \kappa'AG \hat{\varphi}_z = -\omega^2 \rho I_z \hat{\varphi}_z \end{cases} \quad (28)$$

将式(28)写成矩阵形式:

$$\mathbf{L}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_q = -\omega^2 \mathbf{M}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_q + \mathbf{K}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_q + i\omega \mathbf{B}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_q \quad (29)$$

式中: $\mathbf{L}_q$ 、 $\mathbf{M}_q$ 、 $\mathbf{K}_q$ 、 $\mathbf{B}_q$ 分别为全埋入单桩基础横向振动方程的刚度算子矩阵、质量算子矩阵、弹簧刚度矩阵和阻尼系数矩阵,其表达式为:

$$\mathbf{L}_q = \begin{bmatrix} \kappa'GA \frac{d^2}{dx^2} & -\kappa'GA \frac{d}{dx} \\ \kappa'GA \frac{d}{dx} & EI_z \frac{d^2}{dx^2} - \kappa'GA \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M}_q = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I_z \end{bmatrix}; \mathbf{K}_q = \begin{bmatrix} k_v & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_q = \begin{bmatrix} \beta_v & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \hat{\boldsymbol{\delta}}_q = \begin{bmatrix} \hat{v}_y \\ \hat{\varphi}_z \end{bmatrix}$$

根据式(29),有:

$$\int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12})^T \mathbf{L}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12} dx = \int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12})^T (-\omega_j^2 \mathbf{M}_q + \mathbf{K}_q + i\omega_j \mathbf{B}_q) \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12} dx \quad (30)$$

$$\int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12})^T \mathbf{L}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12} dx = \int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12})^T (-\omega_i^2 \mathbf{M}_q + \mathbf{K}_q + i\omega_i \mathbf{B}_q) \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12} dx \quad (31)$$

对全埋入单桩基础,满足以下关系式:

$$\int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12})^T \mathbf{M}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12} dx = \int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12})^T \mathbf{M}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12} dx \quad (32)$$

$$\int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12})^T \mathbf{K}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12} dx = \int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12})^T \mathbf{K}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12} dx \quad (33)$$

$$\int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12})^T \mathbf{B}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12} dx = \int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12})^T \mathbf{B}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12} dx \quad (34)$$

参照文献[14]的方法,用式(30)减去式(31),并根据刚度算子矩阵 $\mathbf{L}_q$ 的形式及分部积分可得:

$$\int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12})^T \mathbf{L}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12} dx - \int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12})^T \mathbf{L}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12} dx = [(\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12})^T \hat{f}_{q,j}^{12} - (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12})^T \hat{f}_{q,i}^{12}]_0^{x^{12}} \text{ 记作 } \Delta_{ij}^{12} \Big|_0^{x^{12}} \quad (35)$$

同理,可以在局部坐标系 (y^{21}, z^{21}) 下建立与式(35)类似的从 0 到 x^{21} 的公式,并将该式与式(35)相加,可得:

$$\int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12})^T \mathbf{L}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12} dx - \int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12})^T \mathbf{L}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12} dx + \int_0^{x^{21}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{21})^T \mathbf{L}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{21} dx - \int_0^{x^{21}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{21})^T \mathbf{L}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{21} dx = \Delta_{ij}^{12} \Big|_0^{x^{12}} + \Delta_{ij}^{21} \Big|_0^{x^{21}} = [\Delta_{ij}^{12}(x^{12}) + \Delta_{ij}^{21}(x^{21})] - [\Delta_{ij}^{12}(0) + \Delta_{ij}^{21}(0)] \quad (36)$$

由于内力和位移存在如下对偶变换关系:

$$\mathbf{V}_y^{12}(x^{12}) = \mathbf{V}_y^{21}(l^{12} - x^{12}) \quad (37)$$

$$\mathbf{M}_z^{12}(x^{12}) = -\mathbf{M}_z^{21}(l^{12} - x^{12}) \quad (38)$$

$$v^{12}(x^{12}) = -v^{21}(l^{12} - x^{12}) \quad (39)$$

$$\varphi_z^{12}(x^{12}) = \varphi_z^{21}(l^{12} - x^{12}) \quad (40)$$

故式(36)中的 $[\Delta_{ij}^{12}(x^{12}) + \Delta_{ij}^{21}(x^{21})] = 0$, 因此式(36)可进一步简化为:

$$\int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12})^T \mathbf{L}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12} dx - \int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12})^T \mathbf{L}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12} dx + \int_0^{x^{21}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{21})^T \mathbf{L}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{21} dx - \int_0^{x^{21}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{21})^T \mathbf{L}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{21} dx = -[\Delta_{ij}^{12}(0) + \Delta_{ij}^{21}(0)] \quad (41)$$

进行模态分析时,式(17)中的 $\hat{p}_q^2 = 0$ 。根据频率中各节点的力平衡和位移协调方程可知,式(41)中的

$$\Delta_{ij}^{12}(0) + \Delta_{ij}^{21}(0) = 0 \quad (42)$$

综合式(30)、(31)及(41)、(42),有:

$$\int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12})^T \mathbf{L}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12} dx - \int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12})^T \mathbf{L}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12} dx + \int_0^{x^{21}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{21})^T \mathbf{L}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{21} dx - \int_0^{x^{21}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{21})^T \mathbf{L}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{21} dx = (\omega_i^2 - \omega_j^2) \left[\int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12})^T \mathbf{M}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12} dx + \int_0^{x^{21}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{21})^T \mathbf{M}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{21} dx \right] + i(\omega_j - \omega_i) \left[\int_0^{x^{12}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{12})^T \mathbf{B}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{12} dx + \int_0^{x^{21}} (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,i}^{21})^T \mathbf{B}_q \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q,j}^{21} dx \right] = 0 \quad (43)$$

式(43)为一复数方程,由于 $\omega_j \neq \omega_i$, 要使方程得以成立,则需复数的实部和虚部均为零,即得到全埋入单桩基础横向振动在对偶局部坐标系下的正交性条件为:

$$\int_0^{x^{12}}(\hat{\delta}_{q,i}^{12})^T\boldsymbol{M}_q\hat{\delta}_{q,j}^{12}\mathrm{d}x+\int_0^{x^{21}}(\hat{\delta}_{q,i}^{21})^T\boldsymbol{M}_q\hat{\delta}_{q,j}^{21}\mathrm{d}x=0$$
$$\int_0^{x^{12}}(\hat{\delta}_{q,i}^{12})^T\boldsymbol{B}_q\hat{\delta}_{q,j}^{12}\mathrm{d}x+\int_0^{x^{21}}(\hat{\delta}_{q,i}^{21})^T\boldsymbol{B}_q\hat{\delta}_{q,j}^{21}\mathrm{d}x=0$$

(44)

根据式(1)、(39)和(40),将式(44)转化到单一局部坐标系下:

$$\int_0^l(\hat{\delta}_{q,i}^{12})^T\boldsymbol{M}_q\hat{\delta}_{q,j}^{12}\mathrm{d}x=0$$
$$\int_0^l(\hat{\delta}_{q,i}^{12})^T\boldsymbol{B}_q\hat{\delta}_{q,j}^{12}\mathrm{d}x=0$$

(45)

4 数值算例

为验证全埋入单桩基础横向振动正交性条件公式推导的正确性,下面进行具体的数值算例的分析。对图 1 所示的全埋入单桩基础的几何参数、材料参数及桩周土体参数进行取值,并列于表 1 及表 2。

表 1 全埋入单桩基础计算参数(1)

Table 1 Calculation parameters of single, fully-embedded pile (1)

桩长	半径	截面面积	截面惯性矩	材料密度
l/m	r/m	A/m^2	I_x/m^4	$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$
4	0.1	$\pi\times0.1^2$	$\pi\times0.1^4/4$	2 400

表 2 全埋入单桩基础计算参数(2)

Table 2 Calculation parameters of single, fully-embedded pile (2)

泊松比	弹性模量	弹簧系数	阻尼系数
μ	E/Pa	$k_v/(\text{N}\cdot\text{m}^{-2})$	$\beta_v/(\text{N}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s})$
0.2	2.7e10	2e5	2.5e5

根据式(26),采用二分法及黄金搜索法迭代求解,并利用 MATLAB 语言编程计算出全埋入单桩基础横向振动的前 5 阶自振频率及其所对应的衰减系数,其结果如表 3 所列。

表 3 全埋入单桩基础横向振动自振频率及衰减系数

Table 3 Natural frequencies and attenuation coefficients of transverse vibration of single, fully-embedded pile

阶数	自振频率 $\omega_n/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$	衰减系数 λ_n
1	1 194.696	1 625.938
2	2 447.520	1 611.011
3	3 645.881	1 594.961
4	4 899.301	1 578.664
5	6 223.585	1 562.820

求解全埋入单桩基础横向振动的位移模态,将图 1 所示的桩长 l 为 4 m 的单桩基础划分为 40 个单元,采用 MATLAB 语言编程求解出全埋入单桩基础各阶频率所对应的 41 个节点在频率中的位移组成的模态向量,并对其两两求数量积,结果如

表 4、5 所列。

表 4 全埋入单桩基础横向振动模态正交性(横向位移)

Table 4 The orthogonality of transverse vibration modes of single fully-embedded pile (transverse displacement)

	$\hat{v}_{y,2}$	$\hat{v}_{y,3}$	$\hat{v}_{y,4}$	$\hat{v}_{y,5}$
$\hat{v}_{y,1}$	0	-0.000 99	0	0
$\hat{v}_{y,2}$		0.001 01	3.82E-08	0.000 44
$\hat{v}_{y,3}$			0	2.31E-08
$\hat{v}_{y,4}$				0

表 5 全埋入单桩基础横向振动模态正交性(转角位移)

Table 5 The orthogonality of transverse vibration modes of single fully-embedded pile (angular displacement)

	$\hat{\varphi}_{y,2}$	$\hat{\varphi}_{y,3}$	$\hat{\varphi}_{y,4}$	$\hat{\varphi}_{y,5}$
$\hat{\varphi}_{y,1}$	0	0.122 06	-0.000 34	0.136 58
$\hat{\varphi}_{y,2}$		2.06E-05	0.126 74	0
$\hat{\varphi}_{y,3}$			-0.000 26	0.131 54
$\hat{\varphi}_{y,4}$				-0.000 26

由表 4、5 可以看出,不同阶模态向量的数量积等于或接近于零,若忽略数值计算过程中所产生的误差,我们可以认为其结果为零,而一个等于零的数乘以任何常数其结果均为零。因此全埋入单桩基础的横向振动模态均满足正交性条件,此结果与公式推导结果相符。

5 结语

本文应用回传射线矩阵法的基本思路,将各物理量进行 Fourier 变换,在频域中对全埋入单桩基础的横向振动模态正交性进行研究。通过严格的公式推导,得到全埋入单桩基础横向振动的模态正交性条件;基于回传射线矩阵法求解了全埋入单桩基础横向振动的自振频率、衰减系数及模态,并将计算结果代入模态正交性条件中进行验证,得出数值计算结果与公式推导结果吻合度高,表明全埋入单桩基础横向振动不同阶模态满足正交性。

参考文献(References)

[1] 刘宗贤,李玉亨.桩基础在阻尼与分层弹性地基场地土波动影响下的横向地震反应分析[J].地震工程与工程振动,1994,14(3):47-59.
LIU Zongxian,LI Yuting.The Lateral Seismic Response Analysis for the Pile Foundation under the Influence of Damping and Layer Elasto-foundation Bed Site Soil Wave Motion[J].Earthquake Engineering and Engineering Vibration,1994,14(3):47-59.

[2] 王立忠,冯永正,柯瀚,等.瑞利波作用下成层地基中单桩横向振动分析[J].振动工程学报,2001,14(2):85-90.
WANG Lizhong,FENG Yongzheng,KE Han,et al.Lateral Dynamic Response of Single Pile in Multiple Layers Soil during

- the Passage of Rayleigh Waves[J].Journal of Vibration Engineering,2001,14(2):85-90.
- [3] 冯永正,王立忠,陈云敏.瑞利波作用下双层地基中群桩横向动力响应[J].振动工程学报,2001,14(3):40-47.
FENG Yongzheng, WANG Lizhong, CHEN Yunmin. Lateral Dynamic Response of Pile Group in Double-layered Soils during the Passage of Rayleigh Waves[J].Journal of Vibration Engineering,2001,14(3):40-47.
- [4] 王海东,尚守平,周志锦,等.瑞利波作用下桩土相互作用横向动力响应计算研究[J].湖南大学学报(自然科学版),2009,36(11):1-5.
WANG Haidong, SHANG Shouping, ZHOU Zhijin, et al. Computational Research on the Horizontal Dynamic Response of Single-pile Considering Pile-Soil Interaction during Passage of Rayleigh Waves[J].Journal of Hunan University (Natural Sciences),2009,36(11):1-5.
- [5] 马亮亮.斜向激振力作用下有阻尼埋置框架的瞬态波动响应研究[D].兰州:兰州交通大学,2015.
MA Liangliang. Study of Transient Response Analysis of Damping Frame Structure Embedded Partially in Soil under Oblique Impact [D]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2015.
- [6] 任夏丽.回传射线矩阵法分析有阻尼二维埋置框架结构的瞬态动力响应[D].兰州,兰州交通大学,2016.
REN Xiali. Transient Response Analysis of Two-dimensional Frame Structure with Damping Embedded Partially in Soil by the Method of Reverberation-ray Matrix[D].Lanzhou:Lanzhou Jiaotong University,2016.
- [7] CLOUGH R W, PENZIEN J. Dynamics of Structure [M]. McGraw-Hill, New York, 2003.
- [8] GUO Y Q, CHEN W Q, PAO Y H. Dynamic Analysis of Space Frames: The Method of Reverberation-ray Matrix and the Orthogonality of Normal Modes[J].Journal of Sound and Vibration,2008,317:716-738.
- [9] 彭丽.黏弹性基础梁横向振动复模态分析[D].上海:上海大学,2015.
PENG Li. Complex Mode Analysis for Transverse Vibration of Beams on Viscoelastic Foundation [D]. Shanghai: Shanghai University, 2015.
- [10] 付艳艳,余云燕.全埋入单桩基础纵向振动模态正交性研究[J].兰州交通大学学报,2017,36(3):6-11.
FU Yanyan, YU Yunyan. The Orthogonality of Modes of Single Fully Embedded Pile in Longitudinal Vibration[J].Journal of Lanzhou Jiaotong University,2017,36(3):6-11.
- [11] 陈进浩.三维埋置框架结构的自振特性与动力响应研究[D].兰州:兰州交通大学,2016.
CHEN Jinhao. Research on Natural-vibration Characteristics and Dynamic Response of Three-dimensional Embedded Frame Structure[D].Lanzhou:Lanzhou Jiaotong University, 2016.
- [12] 陈进浩,余云燕.框架结构瞬态波动响应及自振频率的回传射线矩阵法分析[J].振动与冲击,2016,35(10):83-90.
CHEN Jinhao, YU Yunyan. Analysis of the Transient Response and Natural Frequency of a Frame by the Reverberation-ray Matrix Method[J].Journal of Vibration and Shock, 2016,35(10):83-90.
- [13] 柳伟,余云燕.桩顶固定且部分桩体埋入黏弹性地基中时桩的自振特性分析[J].噪声与振动控制,2018,38(2):127-132.
LIU Wei, YU Yunyan. Analysis of Vibration Characteristics of Piles with Top Fixed and Part Embedded in a Viscoelastic Foundation[J]. Noise and Vibration Control, 2018, 38(2): 127-132.
- [14] 郭永强.回传射线矩阵法的理论及其应用[D].杭州:浙江大学,2008.
GUO Yongqiang. The Method of Reverberation-ray Matrix and Its Application[D].Hangzhou:Zhejiang University,2008.