薛龙，刘天云，张建民.基于能量最小化原理的弹性波 CT 成像频域有限元反演算法[J].地震工程学报，2018，40(2)：376-383.doi：10.3969/j.issn.1000－0844.2018.02.376
XUE Long，LIU Tianyun，ZHANG Jianmin.FEM Inversion Algorithm in Frequency Domain for Elastic Wave CT Based on Energy Minimization Principles[J].China Earthquake Engineering Journal，2018，40(2)：376-383.doi：10.3969/j.issn.1000－0844.2018.02.376

基于能量最小化原理的弹性波 CT 成像频域有限元反演算法①

薛 龙，刘天云，张建民
（清华大学 水沙科学与水利水电工程国家重点实验室/土木水利学院，北京 100084）

摘要：在材料和模型实验中，试样内部位移场的精确量测对于加载过程中试样力学性质的研究有着十分重要的意义。提出基于能量最小化原理的弹性波 CT 成像频域有限元反演算法，并在波动方程的基础上通过有限元数值实验，利用估计位移场和实际位移场的偏差，得出包括密度 ρ 和拉梅常数 λ 在内的单元材料参数的更新梯度，进一步经过若干次正负反馈的迭代，实现试样参数的反演。该算法避开已有方法中求解参数更新梯度 Jacobi 矩阵的过程，计算效率得到极大的提高。计算结果表明，在已知位移场的情况下，迭代更新 λ 的效率和准确性较高；在已知部分节点实际位移的情况下，参数迭代效率与观测网格密度正相关。

关键词：反演算法；能量最小化原理；有限元；弹性波
中图分类号：TU459.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1000－0844(2018)02－0376－08
DOI：10.3969/j.issn.1000－0844.2018.02.376

FEM Inversion Algorithm in Frequency Domain for Elastic Wave CT Based on Energy Minimization Principles

XUE Long，LIU Tianyun，ZHANG Jianmin
(*State Key Laboratory of Hydroscience and Engineering/School of Civil Engineering，Tsinghua University，Beijing 100084，China*)

Abstract：In element and model tests，high-accuracy measurement for the internal displacement field of a sample is crucial in investigating the mechanical property of the material under loading. In this study，a frequency-domain finite element method based on the energy minimization principle is developed for elastic wave CT. Through solving the wave equation numerically，the displacement fields are estimated and then compared with their actual values. Thus，the renewal gradients of the parameters of every element are obtained，including the density (ρ) and the Lame constant (λ). Furthermore，the distribution of density (ρ) and the Lame constant (λ) can be acquired upon several iterations. The new method can avoid solving the Jacobi matrix，leading to a great improvement in calculation efficiency. In addition，the numerical inversion iteration of the Lame constant (λ) shows high efficiency and accuracy when the whole displacement field is known，and the efficiency and accuracy gradually decrease with an increased number of unknown

① **收稿日期**：2016-10-26
作者简介：薛 龙(1992－)，男，博士研究生，从事岩土工程方面研究。E-mail：xuel14@mails.tsinghua.edu.cn。

displacement nodes.

Key words: inversion algorithm; energy minimization principle; finite element method (FEM); elastic wave

0　引言

岩石、混凝土破坏是裂缝萌生、扩展和贯通的演化过程，具有宏观尺度强度低，细观尺度强度高，并随外荷载增加发生破坏层次逐渐由宏观向细观层次过渡[1]，需要开展宏细观相结合试验加以研究[2]，即混凝土内部结构的成像。同时，土工试验中土样材料内部位移场变化的追踪和土样内传感器位置变化的监控，可尝试对材料内部进行弹性波成像来实现，其核心是如何反演跟踪土体内部的弹性参数变化及分布，但实际试验中往往只能观测到材料边界处的位移或者力的变化。

静力问题中，电阻抗断层成像[3-6]可能是最早通过使用边界量测来解决的反演问题。

Bonnet 等[7]综述了多种反演问题的求解方法，其中使用高斯牛顿方法求解的最小二乘法是比较流行的。但 Rivas 等[8]的研究认为，反演问题不像正演问题一样，并不是网格划分得越密越能保证结果的收敛。Reddy 等[9]通过高斯牛顿迭代方法，一方面研究了力和位移的残差作为目标函数的优劣，另一方面研究了边界信息的多少对于计算结果的影响。

Kavanagh 等[10]考虑了均一弹性体内材料的各向异性和非线性。一些已知边界数据的弹性体反演问题的特殊情况也在一些文献中有过研究，如 Morassi 等[11]研究了检测弹性体内的孔洞或坚硬包含物的反演方法。

另外，部分学者也放宽了条件，利用材料内部的量测来计算材料参数的分布。Barbone 等[12]针对各向同性、线弹性体，利用整体的实际位移分布，分别研究两个拉梅常数 λ、μ 和泊松比 ν 的反演计算，分别控制 λ、μ 或 ν 不变来反演其他几个参数。

利用弹性波动力成像的方法来自于地质勘探，主要是利用地震波(弹性波)带来的一些动力特性来反演整个地层的一些材料参数。

19 世纪末，主要从使用波传播的时间信息来获得现代地震学的发现[13-15]。全波形反演主要是利用波场中的运动信息来成像。地震波波动方程非线性反演是地震勘探反演领域中的研究内容。Tarantola[16-17]和 Mora[18]最早提出利用模型的正演数据和波场实际观测数据的残差最小二乘的方法，通过求解目标函数针对各个参数的偏导，求出迭代到残差最小的梯度，再利用高斯牛顿等数值方法实现求解迭代，最终求出介质实际的物理参数。但此方法大多是在时域中进行的，需要做大量的正反演计算，其计算成本很高。

上世纪 90 年代，Pratt[19-20]和 Forgues 等[21]利用频域有限差分方程，提出频率域反演的方法。由于频率域中求解的是求解技术已经成熟的大型稀疏带状矩阵的线性方程，其计算效率得到很大的提高。Shin 等[22]又提出了利用频率域的有限元方程来进行反演。

许琨等[23-24]在频域有限单元的基础上，利用有限元刚度矩阵和质量矩阵压缩存储、广义共轭梯度算法、同一介质单元 Jacobi 矩阵压缩组装来降低计算成本，提高算法的稳定性，并利用地下介质的分布规律，进一步提高计算效率。

本文仍利用频域有限元的方法，基于能量最小化原理，避免了求解 Jacobi 矩阵，计算效率得到了极大的提高。

1　频率域波动方程有限元计算和参数更新原理

1.1　基本动力学方程

假设模型是无阻尼的，频域中弹性波动方程为

$$\boldsymbol{S}(\omega)\boldsymbol{U}(\omega)=\boldsymbol{F}(\omega) \tag{1}$$

其中：

$$\boldsymbol{S}(\omega)=\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M} \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{S}$ 为动刚度矩阵；$\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵；$\boldsymbol{M}$ 为质量矩阵；$\boldsymbol{U}$ 为位移矩阵；$\boldsymbol{F}$ 为荷载矩阵。

利用有限元的方法，对整个模型进行离散化。

对于每一个边长为 Δx 的正方形单元而言，其单元质量矩阵和单元刚度矩阵分别如下：

$$\boldsymbol{M}^e=\mathrm{Diag}\left[\frac{1}{4}\rho\Delta x^2,\frac{1}{4}\rho\Delta x^2,\frac{1}{4}\rho\Delta x^2,\frac{1}{4}\rho\Delta x^2,\frac{1}{4}\rho\Delta x^2,\frac{1}{4}\rho\Delta x^2,\frac{1}{4}\rho\Delta x^2,\frac{1}{4}\rho\Delta x^2\right] \tag{3}$$

$$
\boldsymbol{K}^e=\frac{\rho c_S^2}{2}\begin{bmatrix}
2e & h & -2e+1 & -g & -e & -h & e-1 & g \\
h & 2e & g & e-1 & -h & -e & -g & -2e+1 \\
-2e+1 & g & 2e & -h & e-1 & -g & -e & h \\
-g & e-1 & -h & 2e & g & -2e+1 & h & -e \\
-e & -h & e-1 & g & 2e & h & -2e+1 & -g \\
-h & -e & -g & -2e+1 & h & 2e & g & e-1 \\
e-1 & -g & -e & h & -2e+1 & g & 2e & -h \\
g & -2e+1 & h & -e & -g & e-1 & -h & 2e
\end{bmatrix} \tag{4}
$$

其中：

$$e=\frac{1}{3}(1+c_P^2/c_S^2),g=\frac{1}{2}(3-c_P^2/c_S^2),$$

$$h=\frac{1}{2}(c_P^2/c_S^2-1) \tag{5}$$

式中：ρ 表征密度；c_S 表征材料中的剪切波波速；c_P 表征材料中的压缩波波速；$\rho c_P^2=\lambda+2\mu$，$\rho c_S^2=\mu$；λ、μ 为两个拉梅常数。

1.2 材料参数变化引起的位移变化公式推导

对于一个特定的模型，假设模型的材料参数分布是 $\boldsymbol{S}$ 矩阵，在荷载 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，得到力的平衡方程：

$$\boldsymbol{S}_n(\omega)\boldsymbol{U}_n(\omega)=\boldsymbol{F}(\omega) \tag{6}$$

对于单元物理参数（$\rho,\rho c_S^2,\rho c_P^2$），有增量形式 $\rho_{n+1}=\rho_n(1+\Delta\rho)$，$\rho c_{Pn+1}^2=\rho c_{Pn}^2[1+\Delta(\rho c_P^2)]$，则有

$$[\boldsymbol{S}_n(\omega)+\Delta\boldsymbol{S}(\omega)]\ [\boldsymbol{U}_n(\omega)+\Delta\boldsymbol{U}(\omega)]=\boldsymbol{F}(\omega) \tag{7}$$

略去高阶量，与式(6)作差得到传播与校正方程组：

$$\Delta\boldsymbol{S}(\omega)\boldsymbol{U}_n(\omega)=-\boldsymbol{S}_n(\omega)\Delta\boldsymbol{U}(\omega) \tag{8}$$

其中：$\Delta\boldsymbol{S}(\omega)=-\omega^2\boldsymbol{M}\Delta\rho+\boldsymbol{K}_1\Delta(\rho c_P^2)$，$\boldsymbol{K}_1$ 为刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 中的体积压缩项，它在 $\boldsymbol{K}$ 矩阵中是与剪切项解耦的，这里假设剪切项不变。

其中脚标 n 表示迭代到第 n 次时的计算结果。

1.3 正反演计算过程

首先，解式(6)所示的正向传播方程得到 $\boldsymbol{U}_{估计}$。

计算任意节点位移偏差 $\Delta\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_{实际}-\boldsymbol{U}_{估计}$，$\boldsymbol{U}_{实际}$ 和 $\boldsymbol{U}_{估计}$ 分别表示实际的位移场以及利用假设的参数正演计算得到的位移场。

最后，基于式(8)与能量差最小求解单元物理参数增量：

$$\boldsymbol{U}^{e*}\Delta\boldsymbol{S}^e(\omega)\boldsymbol{U}^e=-\boldsymbol{U}^{e*}\boldsymbol{S}^e(\omega)\Delta\boldsymbol{U}^e(\omega) \tag{9}$$

由于单元惯性、弹性的能量偏差应分别相等，即

$$-\Delta\rho\omega^2\boldsymbol{U}^{e*}\boldsymbol{M}^e\boldsymbol{U}^e(\omega)=\omega^2\boldsymbol{U}^{e*}\boldsymbol{M}^e\Delta\boldsymbol{U}^e(\omega)$$

$$\Delta\rho c_P^2\boldsymbol{U}^{e*}\boldsymbol{K}_1^e\boldsymbol{U}^e(\omega)=-\boldsymbol{U}^{e*}\boldsymbol{K}_1^e\Delta\boldsymbol{U}^e(\omega) \tag{10}$$

由此得到最优更新参数

$$\Delta\rho=-\frac{\boldsymbol{U}^{e*}\boldsymbol{M}^e\Delta\boldsymbol{U}^e}{\boldsymbol{U}^{e*}\boldsymbol{M}^e\boldsymbol{U}^e},\Delta\rho c_P^2=-\frac{\boldsymbol{U}^{e*}\boldsymbol{K}_1^e\Delta\boldsymbol{U}^e}{\boldsymbol{U}^{e*}\boldsymbol{K}_1^e\boldsymbol{U}^e} \tag{11}$$

将所有单元的参数更新之后，重新求解正向传播方程，再进行一次迭代。当 $\boldsymbol{U}_{实际}$ 和 $\boldsymbol{U}_{估计}$ 非常接近时，认为计算结果收敛，即得到了实际材料参数。

1.4 通过部分已知点的位移反算模拟实际位移场

实际上，只能观测到一个模型有限点的位移，因此需要通过有限点的位移来反推实际的位移场。

$\boldsymbol{S}$ 矩阵可以根据边界(Γ)和内部(Ω)的对应关系来进行分块，就可以得出

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_{\Gamma\Gamma} & \boldsymbol{S}_{\Gamma\Omega}\\ \boldsymbol{S}_{\Omega\Gamma} & \boldsymbol{S}_{\Omega\Omega}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_{\Gamma}\\ \boldsymbol{U}_{\Omega}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_{\Gamma}\\ \boldsymbol{F}_{\Omega}\end{bmatrix} \tag{12}$$

假设没有体积力，则内部的力为 0，即 $\boldsymbol{F}_\Omega=0$。所以未知的位移可以通过求解式(12)得到，即

$$\boldsymbol{U}_\Omega=-\boldsymbol{S}_{\Omega\Omega}^{-1}\boldsymbol{S}_{\Omega\Gamma}\boldsymbol{U}_\Gamma \tag{13}$$

实际上并不知道内部材料的真实分布，因此假设迭代前后内部材料一样，通过上一次迭代得到的材料参数来得出一个真实位移场的近似。

2 计算流程

本文以数值实验的方法为主，真实的位移场和估计的位移场均通过数值计算得出。计算流程如图 1。

其中 $\boldsymbol{U}_{实际}$ 有两种确定方法：一种是直接求解正演方程即可得到整个位移场；另一种是在已知部分节点的实际位移的条件下，利用 1.4 中谈到的方法反算得到的整个位移场来作为实际位移场。

本程序采用 LU 分解的方法来求解方程，其计算的稳定性较好，结果可靠。采用了一维压缩存储之后，一方面极大地节省了存储空间（动刚度矩阵本身就是稀疏的带状矩阵）；另一方面求解过程中直接跳过了很多 0 元素的运算，极大地节省了时间。

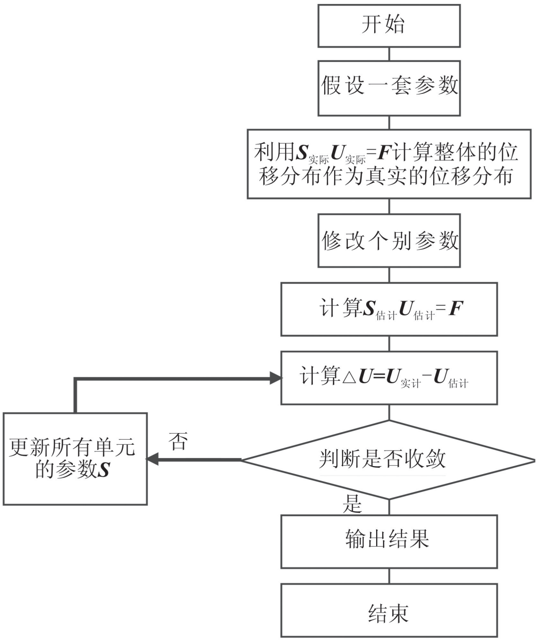

图 1　迭代计算代码流程图

Fig.1　Code flowchart of iterative calculation

3　更新体积压缩项 ρc_P^2 的计算结果

3.1　工况介绍

对于一个 300 mm×300 mm 的矩形模型(图 2)，网格划分为 10 mm×10 mm，共计 900 个单元，961 个节点。在下侧和左侧的所有节点处分别约束竖向位移和水平向位移为 0。在模型的右侧和上侧边缘分别均匀施加 5 个水平向左或向下的正弦力，即 $F=F_{max}\sin(\omega t)$，其中 $F_{max}=1\ 000$ kN，它们的初始相位均为 0。

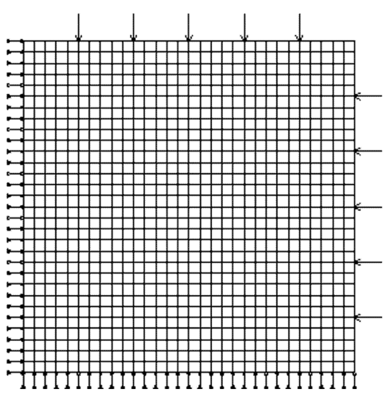

图 2　工况一示意图

Fig.2　Schematic diagram of condition 1

整个模型的实际参数仿照 C20 混凝土的参数来选取。密度 $\rho=2\ 000$ kg/m^3，体积压缩项 $\rho c_P^2=25.5$ GPa$=\lambda+2\mu$，剪切项 $\rho c_S^2=10.2$ GPa$=\mu$。其中 λ 和 μ 是两个拉梅常数。

3.2　振动频率对于计算结果的影响

针对一个均一材质，即实际模型的每一个单元的实际材料参数都是相同的。假设材料的实际密度、剪切项已知，体积压缩项未知，更新迭代求解体积压缩项 ρc_P^2。实际的体积压缩项为 25.5 GPa，初始估计体积压缩项为 27 GPa。

针对不同的频率，在迭代了 7 次之后，计算结果如图 3。图中绘出了 900 个单元参数的分布，每个单元颜色的深浅代表了体积压缩项 ρc_P^2 的高低，下同。

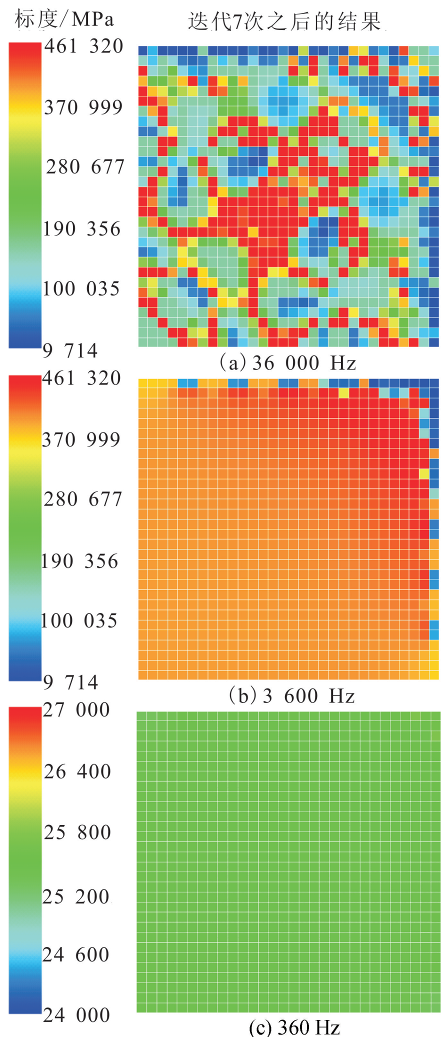

图 3　不同荷载频率计算结果图

Fig.3　Calculation results at different loading frequencies

从结果来看，当频率为 36 000 Hz 和 3 600 Hz 时，计算结果均不理想，材料的参数值与真值偏离较大。当频率为 360 Hz 时，迭代 7 次之后(图 4)900 个单元体积压缩项的均值为 25.41 GPa，标准差为 0.03 GPa，计算材料参数分布与真实值 25.50 GPa

的近似度非常高。

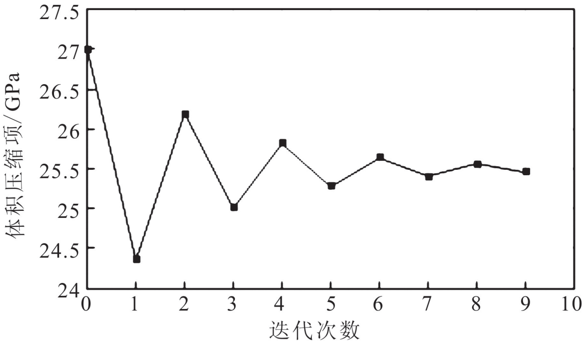

图 4 均一模型体积压缩项均值随迭代次数变化情况(360 Hz)

Fig.4 Change of average value of ρc_P^2 with number of iterations in a uniform model (360 Hz)

同时,计算结果也说明了对于一个均一材质而言,利用能量最小化原理来更新参数的合理性和高效性。

实际上,当频率为 360 Hz 时,动力平衡方程中的质量项远远小于弹性项,这是保证计算结果稳定的一个重要原因。

3.3 局部有缺陷模型的计算结果及其分析

如图 5,针对一个局部有缺陷(图中涂黑的部分)的模型,背景材料的体积压缩项 ρc_P^2 为 25.5 GPa,4 个缺陷对应的体积压缩项分别为 17 GPa(左下)、19 GPa(右下)、21 GPa(左上)、23 GPa(右上),迭代计算的起始值是整个模型均为 27 GPa。

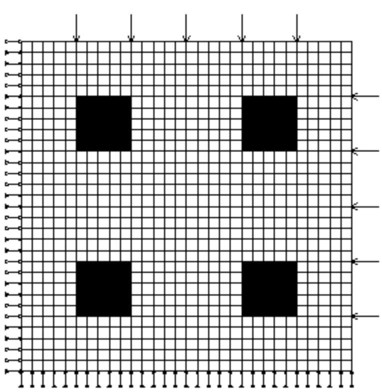

图 5 工况二示意图

Fig.5 Schematic diagram of condition 2

从计算结果来看,迭代算法很好地找出了缺陷所在的位置以及对应的数值(图 6)。在迭代到 9 次以后,数值震荡得也很小(图 7)。

笔者也做过尝试,即使只有一个单元的参数与背景材料不同,在知道所有节点位移的条件下也能很好地找出该缺陷,即计算方法的分辨率为单元大小。

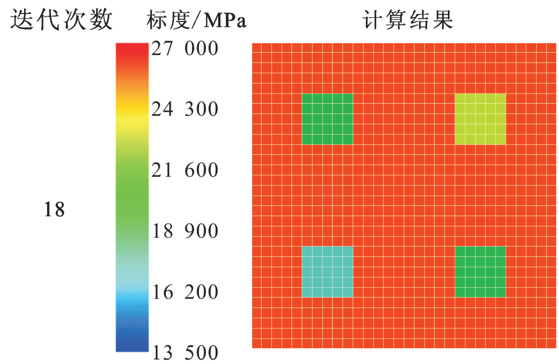

图 6 工况二计算结果图

Fig.6 Calculation results under condition 2

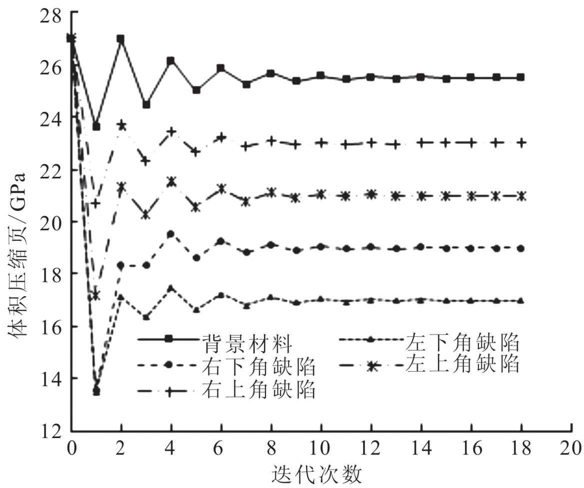

图 7 内部有缺陷模型体积压缩项均值随迭代次数变化情况

Fig.7 Change of average value of ρc_P^2 with number of interations in a local defect model

3.4 有限观测点来反算整个位移场

实际上,我们只能观测到有限个节点的位移。图 8 中绘制出了两个疏密不同的观测网格。

为了提高计算的准确度,针对一个相对较小的模型进一步增加计算网格的密度。新的模型为 150 mm×150 mm。网格划分为 1 mm×1 mm,共计 22 500 个单元,22 801 个节点。约束四周边界上所有节点的水平和竖直向位移为 0。

两个观测网格的左下点坐标均为(10,10)(单位:mm)。27×27 网格的单个网格边长为 5 mm,共有 27×27 个测点;13×13 网格的单个网格边长为 10 mm,共有 13×13 个测点。分别利用 27×27 和 13×13 个节点处的位移,反算整个位移场,然后进行迭代计算。

在坐标为（135，30）、（135，75）、（135，120）（单位：mm）处分别施加 3 个水平向左的正弦力（图中绘制箭头的地方），即 $F=F_{max}\sin(\omega t)$，其中 $F_{max}=1\ 000$ kN，它们的初始相位均为 0。此处力的频率取 8 kHz，保证质量项远小于弹性项。剪切项 $\rho c_S^2=10.2$ GPa，密度 $\rho=2\ 000$ kg/m^3。

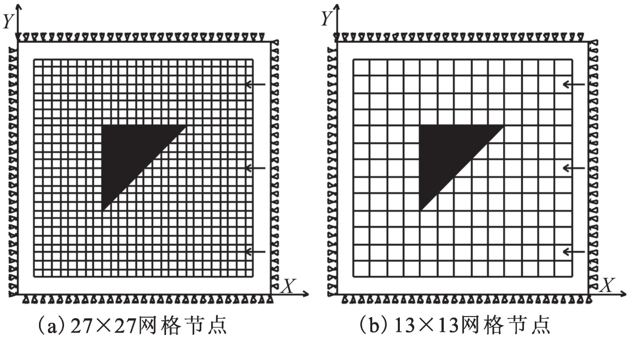

图 8　利用两个观测网格节点处位移计算示意图

Fig.8　Schematic diagram of calculation with two observation grids

背景材料的压缩项为 25.5 GPa，中心处有一个等腰三角形的缺陷，腰长 50 mm，缺陷的压缩项为 23 GPa，迭代 8 次之后的计算结果如图 9。

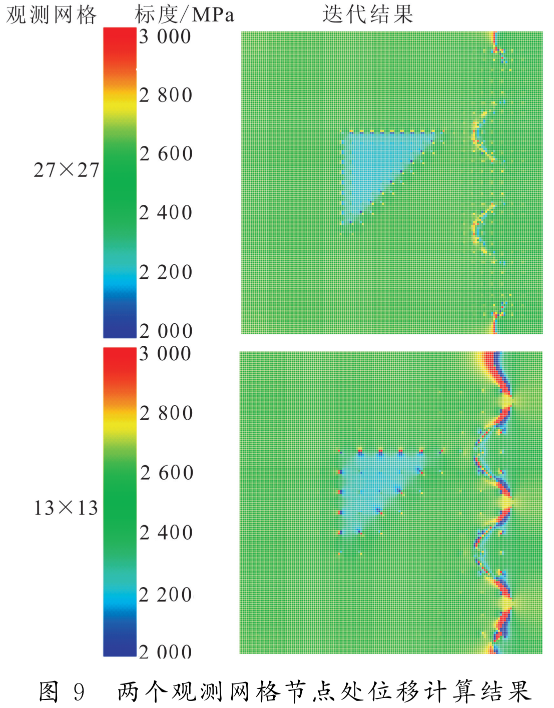

图 9　两个观测网格节点处位移计算结果

Fig.9　Calculation results by using two observation grids

从结果来看，对于 27×27 观测网格能很好地找出缺陷所在的位置，三角形缺陷出现了明显的内外侧分层，在内侧的参数值与真实值更加接近。内层的均值为 22.27 GPa，标准差为 0.34 GPa；外层的均值为 23.02 GPa，标准差为 0.92 GPa。背景材料能很好地趋向于真值，均值 25.58 GPa，标准差为 0.59 GPa。越靠近缺陷的中心，反演的效果越好。

13×13 网格的反演结果明显差于 27×27 网格。随着观测点的减少，缺陷的边界与真实边界的误差逐渐增大，反演值与真值的偏差也逐渐增大，而且荷载作用的局部误差也更大。

4　更新密度项 ρ 的计算结果及分析

仍旧利用 3.4 的模型，计算网格划分为 150×150。为了减少局部应力集中带来的影响，只在坐标为（135，75）（单位：mm）处施加 1 个水平向左的初始相位为 0 的正弦力 $F=F_{max}\sin(\omega t)$，$F_{max}=1\ 000$ kN。力的频率取 8 kHz，保证质量项远小于弹性项。体积压缩项 $\rho {c_P}^2=25.5$ GPa，剪切项 $\rho c_S^2=10.2$ GPa。

4.1　均一模型的计算结果及分析

针对一个均一材质，实际的密度为2 000 kg/m^3，初始假设整个材料的密度为 2 200 kg/m^3，然后开始迭代计算。每个节点的实际位移已知。

迭代 20 次之后，整个材料的均值为 1 999 kg/m^3，标准差为 19 kg/m^3，与真值非常接近，在力作用点的区域会出现比较大的偏差。计算结果如图 10。

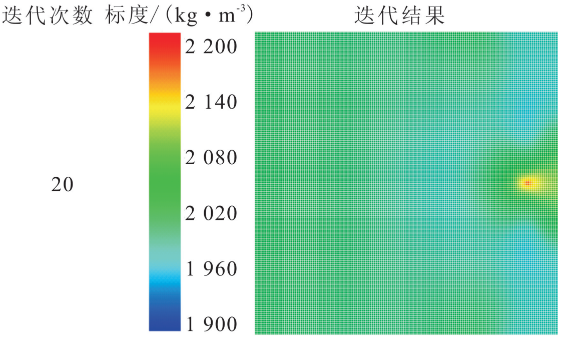

图 10　均一模型密度反演结果图

Fig.10　Inversion results of density using a uniform model

4.2　中心有缺陷模型的计算结果及分析

背景材料的密度为 2 000 kg/m^3，中心处有一个等腰三角形的缺陷，腰长 50 mm，缺陷的压缩项为1 700 kg/m^3，迭代的起始值为 2 200 kg/m^3。

整体收敛的速度非常慢，即使迭代了 50 次之后

(图 12),仍旧只能找出缺陷大概位置,无法找出参数的准确值。

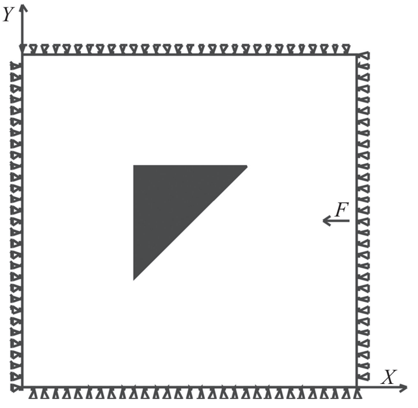

图 11 内部密度缺陷模型示意图

Fig.11 Schematic diagram of an internal density defect model

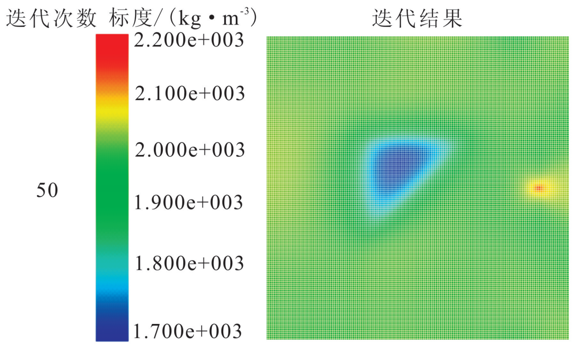

图 12 内部密度缺陷模型反演结果图

Fig.12 Inversion results using an internal density defect model

5 结语

本文运用自主开发的 C 语言有限元波动方程计算程序,对基于能量最小化原理的反演计算方法进行研究,在本文的研究范围内,得到的主要结论为:

(1) 频率对于模型的反演效果有较大影响。在频率较高,即质量项相对于弹性项而言较大时,较小的参数变化会带来位移场的巨大改变,致使材料参数的更新变得非常不合理,从而无法反演出真实的材料参数值。

(2) 在已知整个位移场的情况下,迭代更新体积压缩项 ρc_P^2 的效率和准确性较高,参数的分辨率与网格划分的大小一致。但是迭代更新密度 ρ 的效果一般,收敛缓慢,且很难找到材料的真实值。

(3) 在已知部分节点实际位移的情况下,可利用本文 1.4 中提到的方法模拟实际位移场,从而实现迭代计算,这样的迭代效率与观测网格密度正相关。

参考文献(References)

[1] 戚承志,钱七虎.岩体动力变形与破坏的基本问题[M].北京:科学出版社,2009.
QI Chengzhi,QIAN Qihu.Basic Problems of Dynamic Deformation and Fracture of Rock Mass[M].Beijing:Science Press,2009.

[2] 张楚汉,金峰,侯艳丽,等.岩石和混凝土离散-接触-断裂分析[M].北京:清华大学出版社,2008.
ZHANG Chuhan, JIN Feng, HOU Yanli, et al. Analysis of Rock and Concrete Discrete-Contact-Fracture[M].Beijing:Tsinghua University Press,2008.

[3] CALDERÓN A P. On an Inverse Boundary Value Problem [C]//Rio de Janeiro:Societie Brasileira de Matematica,1980:65-73.

[4] WEXLER A,FRY B,NEUMAN M R.Impedance-computed Tomography Algorithm and System [J]. Applied Optics, 1985,24(23):3985-3992.

[5] YORKEY T J,WEBSTER J G,TOMPKINS W J.Comparing Reconstruction Algorithms for Electrical-Impedance Tomography[J]. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 1987,34(11):843-852.

[6] KOHN R V,MCKENNEY A.Numerical Implementation of a Variational Method for Electrical Impedance Tomography[J]. Inverse Problems,1990,6(3):389-414.

[7] BONNET M,CONSTANTINESCU A.Inverse Problems in Elasticity[J].Inverse Problems,2005,21(2):R1-R50.

[8] RIVAS C,BARBONE P,OBERAI A.Divergence of Finite Element Formulations for Inverse Problems Treated as Optimization Problems[C]//Journal of Physics:Conference Series 135 (2008) 012088.IOP Publishing Ltd,2008.

[9] REDDY A N,ANANTHASURESH G K.A Numerical Approach to Determine the Sufficiency of Given Boundary Data Sets for Uniquely Estimating Interior Elastic Properties[J].Inverse Problems in Science and Engineering,2012,20(7):1057-1077.

[10] KAVANAGH K T.Finite Element Applications in the Characterization of Elastic Solids[J].International Journal of Solids and Structures,1970,7(1):11-23.

[11] MORASSI A,ROSSET E.Detecting Rigid Inclusions or Cavities in an Elastic Body[J].Journal of Elasticity,2003,73(1/3):101-126.

[12] BARBONE P E,OBERAI A A.Elastic Modulus Imaging:Some Exact Solutions of the Compressible Elastography Inverse Problem[J].Physics in Medicine and Biology,2007,52(6):1577-1593.

[13] OLDHAM R.The Constitution of the Earth[J].Quarterly Journal of the Geological Society of London,1906,62:456-475.

[14] GUTENBERG B,ÜBER Erdbenwellen Viia.Beobachtungen an Registrierungen Von Fernbeben in Gttingen und Folgerungen

über die Konstitution Des Erdkörpers[J]. Nachrichten Von Der Könglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttinge, MathematischúPhysikalische Klasse,1914:125-176.

[15] LEHMANN, I. P′ [J]. Publications du Bureau Central Séismologique International,1936,14:87-115.

[16] TARANTOLA A.Inversion of Seismic Reflection Data in the Acoustic Approximation[J]. Geophysics,1984,49(8):1259-1266.

[17] TARANTOLA A.A Strategy for Nonlinear Elastic Inversion of Seismic Reflection Data[J].Geopyisics,1986,51(10):1893-1903.

[18] MORA P. Nonlinear Two-dimensional Elastic Inversion of Mutioffset Seismic Data[J]. Geophysics,1987,52(9):1211-1228.

[19] PRATT R G.Seismic Waveform Inversion in the Frequency Domain,Part 1:Theory and Verification in a Physical Scale Model[J].Geophysics,1999,64(3):888-901.

[20] PRATT R G.Seismic Waveform Inversion in the Frequency Domain,Part 2:Fault Delineation in Sediments Using Cross-hole Data[J].Geophysics,1999,64(3):902-914.

[21] FORGUES E,SCALA E, PRATT R G.High Resolution Velocity Model Estimation from Refraction and Reflection Data [C]//1998 SEG Annual Meeting,1998:1211-1214.

[22] SHIN C,YOON K,MARFURT K J,et al.Efficient Calculation of Partial-Derivative Wavefield Using Reciprocity for Seismic Imaging and Inversion[J].Geophysics,2001,66(6):1856-1863.

[23] 许琨,王妙月.声波方程频率域有限元参数反演[J].地球物理学报,2001,44(6):852-864.
XU Kun, WANG Miaoyue. Finite Element Inversion of the Coefficients of Acoustic Equation in Frequency Domain[J]. Chinese Journal of Geophysics,2001,44(6):852-864.

[24] 许琨,王妙月.利用地质规则块体建模方法的频率域有限元弹性波速度反演[J].地球物理学报,2004,47(4):708-717.
XU Kun,WANG Miaoyue.Frequency Domain Finite Element Inversion of Elastic Wave Velocity using Geological Regular Blocky Model Method[J]. Chinese Journal of Geophysics,2004,47(4):708-717.