

线性波浪加载下海底斜坡失稳机制的数值分析^①

刘 敏¹, 刘 博¹, 年廷凯^{1,2,3}, 印 萍², 宋 雷³

(1.大连理工大学土木工程学院及海岸和近海工程国家重点实验室,辽宁 大连 116024;

2.国土资源部海洋油气资源与环境地质重点实验室,山东 青岛 266071;

3.中国矿业大学深部岩土力学与地下工程国家重点实验室,江苏 徐州 221008)

摘要:基于大型有限元软件 ABAQUS 中的荷载模块,添加一阶波浪力载荷模式,并结合强度折减技术,实现波浪力作用下海底斜坡稳定性与失稳机制的弹塑性有限元数值分析。引入典型算例,利用先前提出的波浪荷载下海底斜坡稳定性的极限分析上限方法开展数值解的对比验证;在此基础上,通过深入地变动参数比较分析,探讨不同波长、波高和水深等波浪参数对计算结果的影响以及波浪力影响下海底斜坡潜在滑动面的变化规律,获得波浪荷载下海底斜坡失稳滑动机制的初步认识。

关键词:海底滑坡;斜坡稳定性;弹塑性有限元分析;强度折减法;波浪荷载

中图分类号:TV139.2

文献标志码:A

文章编号:1000-0844(2015)02-0415-07

DOI:10.3969/j.issn.1000-0844.2015.02.0415

Numerical Analysis of the Failure Mechanism of Submarine Slopes under Linear Wave Loading

LIU Min¹, LIU Bo¹, NIAN Ting-kai^{1,2,3}, YIN Ping², SONG Lei³

(1.State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China;

2.Key Laboratory of Marine Hydrocarbon Resources and Environmental Geology, Ministry of Land and Resources,

Qingdao, Shandong 266071, China; 3.State Key Laboratory for Geomechanics and Deep Underground Engineering,

China University of Mining and Technology, Xuzhou, Jiangsu 221008, China)

Abstract: Submarine landslides, a natural hazard, not only destroy subsea infrastructure but also trigger life-threatening tsunamis. Because of its destructive potential, many scholars are studying the failure mechanism of seabed slopes. There are many factors that induce submarine landslides, e.g., earthquakes, volcanic eruptions, gas hydrate dissociation, and so on. However, the instability of the seafloor in shallow waters may be induced by waves. This study treats the stability of a submarine slope as a plane strain problem and adopts an elasto-plastic constitutive model obeying the Mohr-Coulomb yield criterion. To analyze seafloor stability under wave loading, a large-scale elasto-plastic finite element program called ABAQUS combined with a strength reduction method is adopted. Based on linear wave theory, wave-induced pressure is implemented by developing a loading module in this program. Pressures are applied on the slope surface as pseudo-static loads at a particular time during the wave period. In addition, a typical example is presented, and a factor of safety (FS) and corresponding critical sliding surface (CSS) for the submarine slope under wave

① 收稿日期:2014-08-20

基金项目:国家自然科学基金项目(No.51179022, No. 41474122);国土资源部海洋油气资源与环境地质重点实验室开放基金(MRE201304);深部岩土力学与地下工程国家重点实验室开放基金(SKLGDUK1307)

作者简介:刘 敏(1989—),男,硕士研究生,主要从事波浪作用下海底斜坡稳定性评价工作.E-mail: xiaomin03050415@mail.dlut.edu.cn

通讯作者:年廷凯(1971—),男,博士,教授,博士生导师,主要从事边坡力学与滑坡、海岸与海洋工程地质灾害、特殊土与沿海软土地基病害处治技术方面的研究.E-mail: tknian@dlut.edu.cn

loading are obtained using the improved finite element program. A previously programmed analytical code based on an upper-bound approach of limit analysis is also employed to validate the numerical solutions. Based on this, a series of comparative analyses is performed. The effect of wave parameters such as wave length, wave height, and water depth on slope stability and the positions of the CSS are discussed by comparison with the results from the FEM and upper-bound approach. Some preliminary understanding of the instability mechanism of submarine slopes subjected to wave loading is achieved. The results show that the finite element result is close to the limit analysis result. The factor of safety oscillates with time under static water conditions and decreases gradually with increasing wave length and wave height. In addition, the FS of the submarine slope approach the hydrostatic FS as the water depth increases. This means that when the depth of water reaches a certain value, waves have no effect on the submarine slope. By analyzing the impact of the wave parameters on the CSS, increasing water depth is found to have no influence on the position of sliding surface, but the potential sliding surface position at different times changed significantly.

Key words: submarine landslide; slope stability; elasto-plastic finite element analysis; strength reduction method; wave loading

0 引言

斜坡海床长期遭受波浪荷载作用,在恶劣海况下极易诱发海底滑坡,给海洋工程建设带来不利影响,甚至引发重大海洋工程地质灾害^[1-3]。目前海底斜坡稳定性评价多采用极限平衡法^[4-7],总体上该方法计算参数容易获得,但对复杂问题需简化模型和引入条间力假设,导致其计算结果精度较低,为工程上的近似方法。为此,在海底斜坡稳定性评价中,部分学者开展了数值模拟研究,如邵广彪等^[8]利用一阶波浪理论和 Seed 孔压模型对地震作用下海底缓坡进行有限元分析,为近海灾害评估提供了一定依据;姜海西等^[9]利用有限元程序 ANSYS 对波浪作用下的水下岩质边坡进行稳定性评价,发现在其坡脚处的应力集中现象最为明显;刘红军等^[10]计算出波浪引起的海床应力场,并建立了波浪导致弱黏性土海床失稳的破坏准则,认为土体黏聚力对海床稳定性影响明显;王刚和张建民^[11]用有限元法预测了某防波堤在波浪荷载作用下的动力响应过程,指出数值手段在海洋工程领域的发展前景;王立忠和缪成章^[12]采用流滑海床模型槽试验与有限元精细化分析,研究了大规模流滑对海底管道受力机制的影响并提出拟合公式,为复杂地质条件下海底管线的工程设计提供了参考;Hutton 等^[13]针对大陆架边缘外海,开展了斜坡沉积物稳定性的数值分析,但有关海底滑坡大变形及后续演化过程仍无法评估。海底斜坡失稳时其塑性区的发展呈现较强的非线性特

征,且由于受到波浪力的循环作用而使得坡面及坡顶荷载条件、失稳机制变得复杂,因此波浪作用下的海底斜坡稳定性评价仍存在许多难点亟待深入研究。

本文利用大型有限元程序 ABAQUS,在荷载模块中添加一阶波浪载荷模式,实现波浪荷载下的海底斜坡稳定性二维弹塑性有限元分析。计算中,以线性波浪理论调控波浪引起的海底压力变化,海底斜坡的安全系数作为稳定性评价的定量指标。引入典型算例,利用作者提出的极限分析上限方法^[14]开展数值解的对比验证,并通过变动参数比较分析,探讨波浪参数(波高、波长、水深等)对计算结果的影响以及波浪力影响下的海底斜坡潜在滑动面变化范围,从而揭示线性波浪加载下海底斜坡的失稳滑动机制。

1 基于 ABAQUS 的有限元强度折减法

1.1 强度折减技术

强度折减法最早由 Zienkiewicz 等^[15]提出,但受当时理论水平和计算能力的限制,并没有得到推广;直到上世纪 90 年代,一些学者开始在边坡稳定性分析中对该方法进行深入研究^[16-22],结果表明有限元强度折减法得到的边坡安全系数与传统极限平衡法的结果十分接近,且安全系数的定义具有高度一致性、理论完善、概念清晰、结果直观的特点,明显优于极限平衡法、有限元应力分析与极限平

衡相结合的圆弧或非圆弧搜索法。此外,该方法能够处理复杂土层与边界条件,不需要预先假定滑动面的形状和位置,且可以直观地反应塑性应变区的发展过程;通过不断改变土体的抗剪强度参数进行连续的弹塑性有限元计算,直到满足某一失稳判据时^[22],整个系统达到临界状态,从而直接确定边坡稳定性安全系数及相应的临界破坏机构,因此在边坡领域得到广泛应用^[16-22]。

应用 Mohr-Coulomb 模型模拟土体材料,折减后的抗剪强度参数可分别表达为^[22]

$$c_m = c / SRF \quad (1)$$

$$\varphi_m = \arctan\left(\frac{\tan\varphi}{SRF}\right) \quad (2)$$

式中, c 和 φ 分别为土的黏聚力和内摩擦角; SRF 为强度折减系数,计算中当坡体进入极限状态时即为安全系数; c_m 和 φ_m 为折减后的抗剪强度指标,是边坡土体实际发挥的抗剪强度,即维持坡体平衡需要发挥的最小抗剪强度。

1.2 边坡失稳判据实施

强度折减法是通过折减强度参数直至土体达到临界破坏状态来实施的,但如何判断土体是否达到临界失稳状态,在数值分析中主要有三种方法^[23]:(1)以数值计算迭代不收敛作为边坡的失稳破坏判据;(2)以边坡坡面特征点位移突变或陡增作为边坡的失稳破坏判据;(3)以边坡内部等效塑性应变带贯通作为边坡的失稳破坏判据。这三种判据只是反映土坡临界滑动面进入塑性流动状态后发展过程的外在表征与内在本质一致性与统一性,采用三种判据得到的安全系数也相差很小^[24]。本文选用有限元数值计算迭代不收敛作为海底斜坡稳定性的破坏判据。

1.3 基于 ABAQUS 的有限元建模

采用大型有限元程序 ABAQUS,将海底斜坡简化为平面应变问题。分析中采用服从 Mohr-Coulomb 屈服准则与非关联流动法则的理想弹塑性本构模型来模拟土体的应力-应变关系。有限元网格参考实际工况进行非均匀剖分,采用 CPE8R 实体单元(8 节点 4 边形减缩积分单元)进行变形和破坏过程的非线性分析;模型参数方面,除土体重度 γ 、弹性模量 E 、泊松比 ν ,还需要对土体的黏聚力 c 和内摩擦角 φ 进行折减,在本文计算中,强度折减系数(SRF)的间隔取 0.01。有限元计算模型中,两侧竖向边界实施水平向位移约束,底面边界同时约束水平向与竖向位移。关于模型尺寸,竖直方向取斜坡

高度的三倍;水平方向上,在斜坡的上部、下部两端各取斜坡长度的 1.5 倍。

2 波浪加载过程实施

波浪会引起海底压力变化,在海底斜坡工况中这种压力会施加至坡体的表面;随着波浪的传播,变化的荷载会改变坡体内应力分布,如果这个应力值超过了土体的抗剪强度,就会发生滑坡。海洋中的实际波浪形式多样,理论上很难对其进行量化描述,但在地势开阔或者未遇到障碍物时的初次近似,采用一阶线性波浪理论是可行的。在一阶线性波浪理论中,假设波浪在传播过程中服从正弦波形式,则由波浪引起的海底压力变化可以写成^[4]

$$p = p_0 \sin(\lambda x - \omega t) \quad (3)$$

式中, p_0 是波浪引起的海底压力变化幅值,可表达为

$$p_0 = \frac{\gamma_w H_w}{2 \cosh(\lambda d)} \quad (4)$$

式(3)和(4)中, λ 为波数,可表示为 $\lambda = 2\pi/L_w$, L_w 是波长,按线性波理论可近似表达为 $L_w = 1.56T^2$,其中 T 是波浪周期; H_w 和 d 分别表示波高和计算点水深; γ_w 是海水的重度; x 是从 A 点起算的水平位置坐标; t 是计算时刻; ω 是波浪的圆频率,可表达为 $\omega = 2\pi/T$ 。

由于同一周期内不同时刻的波形不同,计算时在波浪的一个传播周期内平均取 8 个计算时间点,分析计算波浪力在不同时刻对海底斜坡稳定性的影响,并将一个周期内计算得到的 8 个安全系数的最小值定义为波浪作用下的海底斜坡稳定性安全系数。需要指出,本文计算中忽略波浪变化引起的海床土体的超孔隙水压力的瞬态响应,这是因为波浪周期一般较长,3~5 s 至 10~20 s 不等,甚至更长,在周期内波浪力没有十分剧烈的变化,故采用此种加载方式是可以接受的,且在一定程度上提高了计算效率。

坡体自重和水的浮力在分析过程中一直影响坡体的整体稳定性,故将静水条件下施加荷载作为有限元分析的第一个加载步,从而得到由土体重力和水的浮力所产生的静水应力场;以波浪力作为模型上边界的超载,将典型时刻的一阶线性波模式添加至 ABAQUS 的荷载模块中,实现第二分析步中的波浪加载;将土体的黏聚力 c 和内摩擦角 φ 的折减过程作为第三个分析步进行实施。

3 算例分析与对比验证

一海底斜坡,坡角 $\beta=5^\circ$,坡高 $H=15\text{ m}$;土体重度为 $\gamma=20\text{ kN/m}^3$,抗剪强度参数为 $\varphi=2^\circ$ 和 $c=20\text{ kPa}$;变形模量 $E=30\text{ MPa}$,泊松比 $\nu=0.3$ 。有限元计算模型如图 1 所示,以 CPE8R 单元进行剖分,共划分单元 3 337 个,节点 10 288 个;其中坡面附近区域进行网格细化。

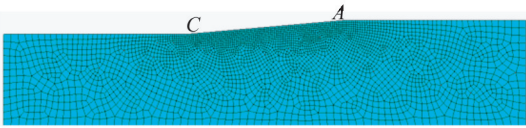


图 1 有限元计算模型
Fig.1 The finite element model

利用改进的大型数值软件,获得不同时刻的海底斜坡稳定性安全系数关系曲线,如图 2 红色点划线所示。计算中将一个波浪周期 T 平均分为 8 个计算时刻,分别计算海底斜坡的安全系数,各图安全系数-时间关系曲线的最低点即是前文所定义的海底斜坡稳定性安全系数。同时,利用作者先前开

发的波浪作用下海底斜坡稳定性的极限分析上限方法计算程序^[14],对上述解答进行解析验证,其结果如图 2 中黑色实线所示。从图 2 中上限解和有限元解的对比可见:在考虑波浪力影响时,随时间变化,海底斜坡的安全系数围绕静水条件下的安全系数($FS=1.570$)在一定范围内波动的,而随着波浪的增大,这种波动将越来越剧烈;对于不同的波浪(不同的波高和波长),计算取得最小安全系数的时刻一般不同,但在这一时刻附近计算得到的安全系数普遍较小。两种结果随时间变化的趋势大体相同,结果接近,说明计算结果合理有效。

分析图 2 可见,波长、波高等波浪参数对海底斜坡稳定性安全系数有较大的影响。对比图 2(a)与(b)、(c)与(d)、(e)与(f)可知,随着波高 H_w 的增加,海底斜坡的安全系数逐渐降低;对比图 2(a)、(c)和(e)或对比(b)、(d)和(f)可知,安全系数也随波长 L_w 的增加而逐渐降低。常规波浪(图 2(a)~(d))对于海底斜坡稳定性的影响不显著,但巨浪经过时,海底斜坡的安全系数将明显降低,甚至可能诱发大规模海底滑动(图 2(f)中所示波浪($L_w=60\text{ m}$ 、 $H_w=5\text{ m}$)代表渤海湾海域十年一遇的巨浪)。

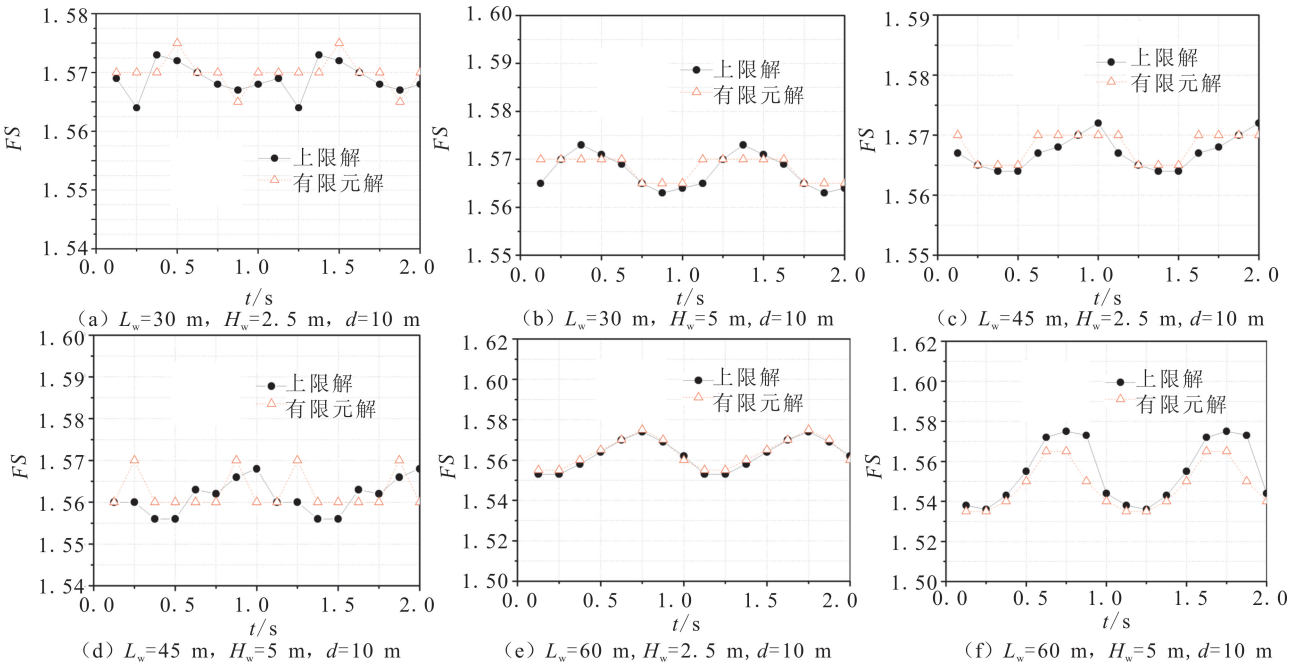


图 2 安全系数随时间变化曲线
Fig.2 The factor of safety-time curve

图 3 给出了 t_3 时刻弹塑性有限元法和极限分析上限方法计算得到的潜在滑动面(CSS)位置。从图中可知,两种方法得到的潜在滑动面的位置十分接近;且

随着水深的增加,潜在滑动面的位置并没有发生显著变化,但安全系数随着深度的增加而逐渐增大,最后趋近于静水条件下的稳定性安全系数($FS=1.570$)。

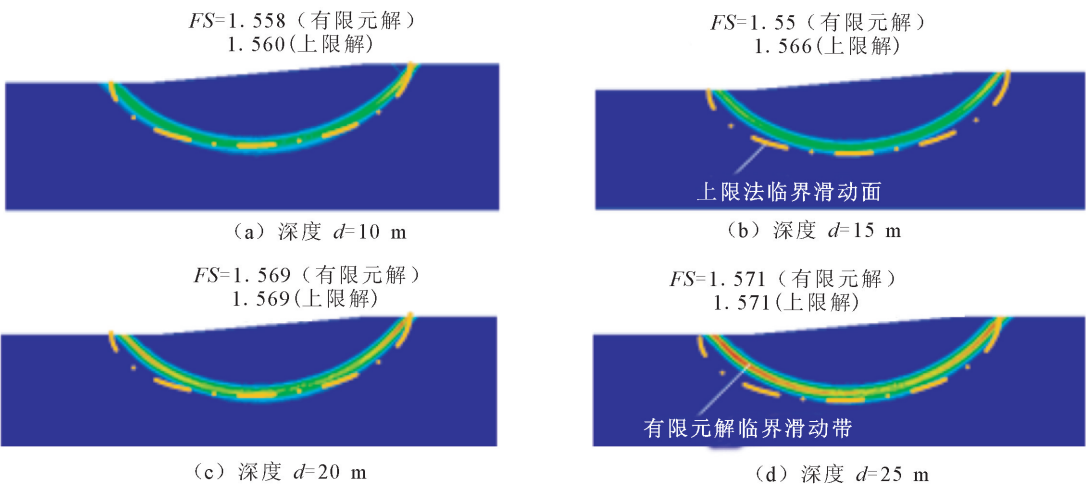


图 3 t_3 时刻两种方法计算得到的临界滑动面

Fig.3 The critical sliding surface (CSS) obtained by the two methods in different depths at t_3

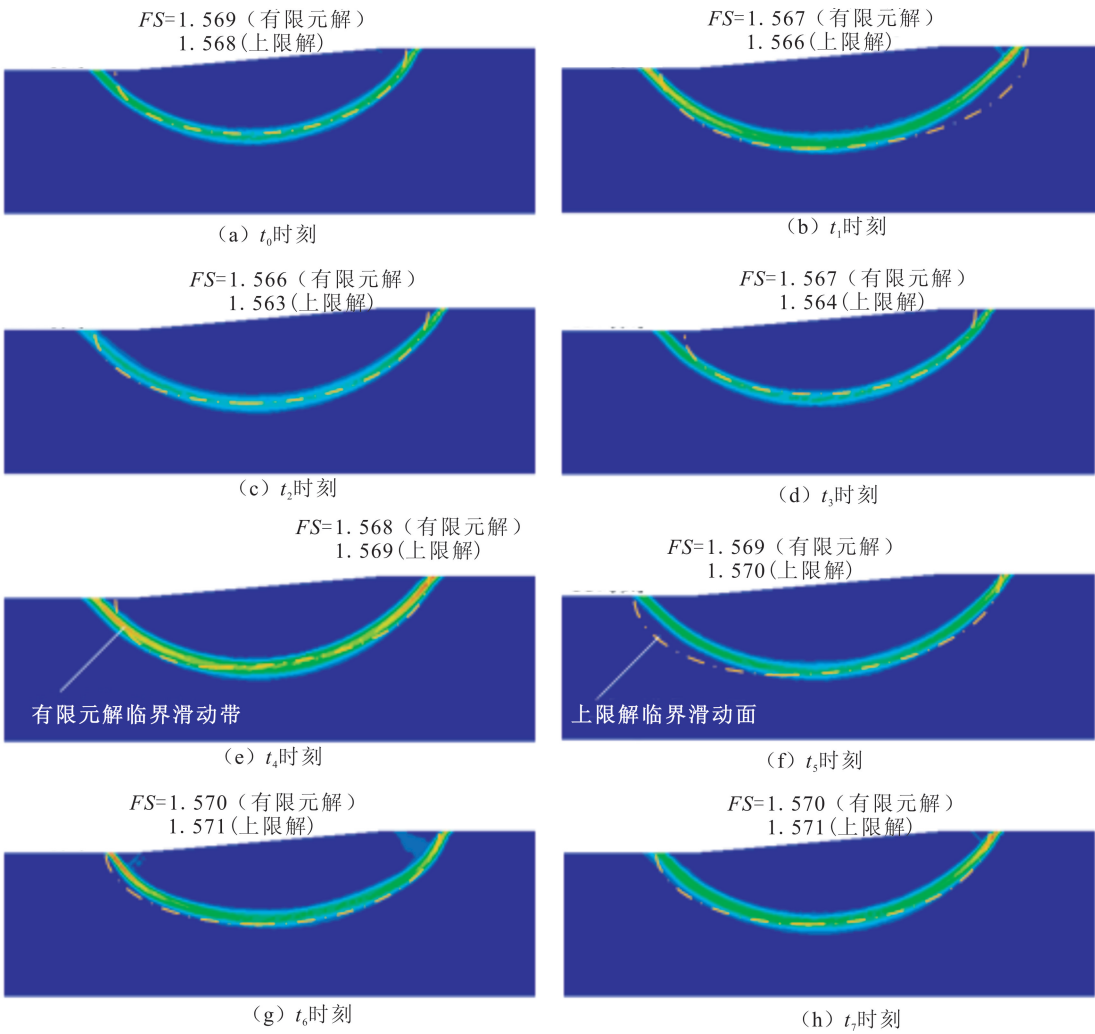


图 4 不同时刻潜在滑动面(CSS)的位置

Fig.4 Location of potential CSS at different times

4 海底斜坡稳定性与滑动机制分析

图 4 给出了在常规波浪作用下,深度 $d=10\text{ m}$ 处不同时刻的潜在滑动面的位置信息,计算中波长和波高分别取 $L_w=45\text{ m}$ 和 $H_w=2.5\text{ m}$ 。

分析图 4 可知,在不同时刻,有限元强度折减法确定的临界滑动面的位置会有一定程度的变化,在 t_5 时刻滑动面的变化最大(约扩展 2 m),但相对于斜坡总体长度 171.5 m 而言,这种变化依然不显著。对比波浪作用下两种方法获得的临界滑动面形状也大体相同,表明临界滑动面接近平于对数螺旋面模式。

表 1 给出极端波浪条件下($L_w=80\text{ m}$ 、 $H_w=8\text{ m}$)海底斜坡稳定性与潜在滑动面位置随时间的变

化结果(计算深度取 $d=10\text{ m}$)。分析表 1 可知,在极端波浪作用下,海底斜坡的临界滑动面位置随计算时刻不同而显著不同,这是因为极限分析上限法中对波浪力进行了适当简化,而这种简化在一定程度上影响了潜在滑动面的位置;但计算获得的安全系数随计算时刻变化并不显著,且各时刻的安全系数均低于静水条件下的安全系数;两种方法获得的不同时刻临界滑动面深度及其变化规律基本一致,安全系数也吻合较好。由 L 、 D 及其通过对数螺旋线控制临界滑动面, L 表示坡顶与起滑点的距离, D 表示坡趾与滑出点距离。

表 1 极端波浪条件下的潜在滑动面位置随时间的变化
Table 1 Different positions of potential CSS at different times under extreme-wave condition

计算时刻		$t_0/T/8$	$t_1/T/4$	$t_2/3T/8$	$t_3/T/2$	$t_4/5T/8$	$t_5/3T/4$	$t_6/7T/8$	t_7/T	静水
有限元法 (本文解)	L/m	37.64	28.66	20.48	13.04	4.27	63.1	54.57	37.05	38.98
	D/m	25.79	31.49	34.48	40.74	6.16	59.08	15.37	17.96	26.91
	FS	1.449	1.445	1.457	1.489	1.53	1.531	1.497	1.467	1.57
极限分析 上限法 ^[14]	L/m	40.18	23.51	16.52	9.98	6.50	69.28	59.35	49.84	36.83
	D/m	28.42	36.75	26.45	37.81	9.15	54.39	48.58	19.14	32.81
	FS	1.456	1.465	1.489	1.529	1.55	1.538	1.5	1.474	1.57

5 结论

通过对大型有限元软件 ABAQUS 中的荷载模块添加线性波浪载荷模式,实现波浪荷载作用下的海底斜坡定时稳定性数值分析,并针对典型算例,开展基于极限分析上限方法的解析验证和变动参数比较研究,得出如下结论:

(1) 海底斜坡的实时安全系数围绕静水条件下的安全系数在一定范围内波动,且随着波浪的增大这种波动愈发显著;对于不同的波浪,计算获得最小安全系数的时刻一般不同。

(2) 波长、波高、水深等波浪参数对海底斜坡稳定性有较大的影响。随着波高或波长的增加,海底斜坡的安全系数逐渐降低;而随着水深的增加,安全系数逐渐增大,最后趋近于静水条件下的安全系数;常规波浪对于海底斜坡稳定性的影响不显著,但巨浪对海底斜坡的安全系数影响显著。

(3) 通过分析波高、波长、水深等波浪参数对海底斜坡潜在滑动面位置与变化范围的影响,揭示同一时刻随着水深的增加,潜在滑动面的位置并无显著变化,而不同时刻潜在滑动面位置变化显著,特别的线性波加载下海底斜坡失稳滑动机制类似于对数螺旋面型式。

(4) 已开展的数值分析尚未考虑波浪变化引起的海床土体超孔压的瞬态响应,后续将进一步开展波浪作用下斜坡海床实时孔压与应力-应变动态响应的弹塑性动力数值分析。

参考文献(References)

[1] 顾小芸.粘质海底稳定性实例分析[J].工程地质学报,1996,4(1):32-38.
GU Xiao-yun. Case Study of Clayed Seabottom Stability[J]. Journal of Engineering Geology, 1996, 4(1): 32-38. (in Chinese)

[2] Locat J, Lee H J. Submarine Landslides: Advances and Challenges[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2002, 39(1): 193-212.

[3] Mosher D C, Moscardelli L, Shipp R C, et al. Submarine Mass Movements and Their Consequences[M]. Berlin: Netherlands Springer, 2010.

[4] 顾小芸.海底边坡稳定分析方法综述[J].力学进展,1989,19(1):50-59.
GU Xiao-yun. Overview of Analysis Method of Submarine Slope Stability[J]. Advances in Mechanics, 1989, 19(1): 50-58. (in Chinese)

[5] Leynaud D, Mienert J, Nadim F. Slope Stability Assessment of the Helland Hansen Area Offshore the Mid-norwegian Margin[J]. Marine Geology, 2004, 213(1): 457-480.

[6] 孙永福,董立峰,蒲高军,等.风暴潮作用下黄河水下三角洲斜坡稳定性研究[J].工程地质学报,2006,14(5):582-587.

- SUN Yong-fu, DONG Li-feng, PU Gao-jun, et al. Stability Analysis of Slopes in the Subaqueous Delta of the Yellow River Under Storm Wave Loading[J]. Journal of Engineering Geology, 2006, 14(5): 582-587. (in Chinese)
- [7] 胡光海, 刘振夏, 房俊伟. 国内外海底斜坡稳定性研究概况[J]. 海洋科学进展, 2006, 24(1): 130-136.
- HU Guang-hai, LIU Zhen-xia, FANG Jun-wei. A Review of Submarine Slope Stability Studies at Home and Abroad[J]. Advances in Marine Science, 2006, 24(1): 130-137. (in Chinese)
- [8] 邵广彪, 冯启民, 王华娟. 海底缓坡场地地震侧移数值分析方法[J]. 岩土力学, 2006, 27(9): 1401-1406.
- SHAO Guang-biao, FENG Qi-min, WANG Hua-juan. A Method for Numerical Analysis of Earthquake Induced Lateral Displacements of Submerged Gentle Slope[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(9): 1601-1606. (in Chinese)
- [9] 姜海西, 沈明荣, 程石, 等. 水下岩质边坡稳定性的模型试验研究[J]. 岩土力学, 2009, 30(7): 1993-1999.
- JIANG Hai-xi, SHEN Ming-rong, CHENG Shi, et al. Model test on Stability of Underwater Rock Slopes[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(7): 1993-1999. (in Chinese)
- [10] 刘红军, 张民生, 贾永刚, 等. 波浪导致的海边坡稳定性分析[J]. 岩土力学, 2006, 27(6): 986-990.
- LIU Hong-jun, ZHANG Min-sheng, JIA Yong-gang, et al. Analysis of Seabed Stability Under Wave Loading[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(6): 986-990. (in Chinese)
- [11] 王刚, 张建民. 波浪作用下某防沙堤的动力固结有限元分析[J]. 岩土力学, 2006, 27(4): 555-560.
- WANG Gang, ZHANG Jian-min. Dynamic Consolidation Finite Element Analysis of a Sediment-protecting Dyke Under Ocean Wave Loading[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(4): 555-560. (in Chinese)
- [12] 王立忠, 缪成章. 慢速滑动泥流对海底管道的作用力研究[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(7): 982-987.
- WANG Li-zhong, MIAO Cheng-zhang. Pressure on Submarine Pipelines Under Slowly Sliding Mud Flows[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(7): 982-987. (in Chinese)
- [13] Hutton E W H, James P, Syvitski M. Advances in the Numerical Modeling of Sediment Failure During the Development of a Continental Margin[J]. Marine Geology, 2004, 203: 367-380.
- [14] 刘博. 波浪作用下海底斜坡稳定性的极限分析上限方法与数值分析[D]. 大连: 大连理工大学, 2014.
- LIU Bo. Upper Bound Approach of Limit Analysis and FE Numerical Analysis of Stability of Submarine Slope Considering the Wave-induced Pressure[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2014. (in Chinese)
- [15] Zienkiewicz O C, Humpheson C, Lewis R W. Associated and non-associated Visco-plasticity and Plasticity in Soilmechanics[J]. Geotechnique, 1975, 25(4): 671-689.
- [16] Ugai K. A Method of Calculation of Total Factor of Safety of Slopes by Elasto-plastic FEM[J]. Soils and Foundations, 1989, 29(2): 190-195.
- [17] Matsui T, San K C. Finite Element Slope Stability Analysis by Shear Strength Reduction Technique[J]. Soils and Foundations, 1992, 32(1): 59-70.
- [18] 宋二祥. 土工结构安全系数的有限元计算[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(2): 1-6.
- SONG Er-xiang. Finite Element Analysis of Safety Factor for Soil Structures[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1997, 19(2): 1-6. (in Chinese)
- [19] Dawson E M, Roth W H, Drescher A. Slope Stability Analysis by Strength Reduction[J]. Geotechnique, 1999, 49(6): 835-840.
- [20] Griffiths D V, Lane P A. Slope Stability Analysis by Finite Elements[J]. Geotechnique, 1999, 49(3): 387-403.
- [21] 郑宏, 李春光, 李焯芬, 等. 求解安全系数的有限元法[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(5): 626-628.
- ZHENG Hong, LI Chun-guang, LEE Chack-fan, et al. Finite Element Method for Solving the Factor of Safety[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(5): 626-628. (in Chinese)
- [22] 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民, 等. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(3): 343-346.
- ZHAO Shang-yi, ZHENG Ying-ren, SHI Wei-min. Analysis on Safety Factor of Slope by Strength Reduction FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(3): 343-346. (in Chinese)
- [23] 年廷凯, 万少石, 蒋景彩, 等. 库水位下降过程中边坡稳定强度折减有限元分析[J]. 岩土力学, 2010, 31(7): 2264-2269.
- NIAN Ting-kai, WAN Shao-shi, JIANG Jing-cai, et al. Finite Element Analysis of Slope Stability Under Drawdown Conditions by Strength Reduction Technique[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(7): 2264-2269. (in Chinese)
- [24] 万少石, 年廷凯, 蒋景彩, 等. 边坡稳定强度折减有限元分析中的若干问题讨论[J]. 岩土力学, 2010, 31(7): 2283-2288.
- WAN Shao-shi, NIAN Ting-kai, JIANG Jing-cai, et al. Several Issues Discussion in Strength Reduction Finite Element Slope Stability Analysis[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(7): 2283-2288. (in Chinese)