

求解二维弹性半空间散射问题的波函数组合法^①

姚 虞, 刘天云, 张建民

(清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室; 清华大学土木水利学院, 北京 100084)

摘要:提出了一种新的波函数组合法, 将体波与面波特征函数组合求解不规则河谷地形在不同波型以不同角度入射的非一致位移输入问题。新方法严格满足不规则河谷散射表面自由条件, 克服了目前波函数展开法不能完备表达二维不规则地形散射问题的缺点。数值算例表明波函数组合法具有精确、稳定、计算量小的特点, 可以应用于结构—地基动力相互作用的非一致输入问题。

关键词:不规则河谷地形; 波函数组合法; 散射; 非一致; 位移输入

中图分类号: P315.31 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-0844(2013)01-0109-05

DOI: 10.3969/j.issn.1000-0844.2013.01.0109

Combination Method of Wave Functions to Solve the Problem of Scattering in 2D Elastic Half Space

YAO Yu, LIU Tian-yun, ZHANG Jian-min

(1. State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, School of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: This paper puts forward a new method which combine the characteristic functions of body waves and surface waves to solve the problem of non-uniform input, which is the displacement of the boundary of the irregular valley topography under the incidence of different kinds of waves in different angles. The method strictly meet the free-surface requirements, and overcome the shortcomings that the existing wave function expansion method cannot express the problem of scattering in two-dimension irregular topography completely. The numerical example shows that the method has the advantages in accuracy, stability, and calculation, which can be applied to the non-uniform input problem of the structure-foundation dynamic interaction.

Key words: Irregular valley topography; combination method of wave function; scattering; non-uniform; displacement input

0 引言

地震波在传播的过程中由于行波效应和相干效应, 震动场各处的地震动在幅值和相位上均有差异。不规则地形各点的动力响应应为入射波与散射波作用的叠加。对于大型结构, 如高坝或大型地下结构等, 地震波输入的非一致性不可忽略, 而这是目前一般计算所采用的一致性输入方式所不能考虑的。此外, 对于动力有限元计算, 如何处理人工边界的反射问题也是一大难点, 主要有全局人工边界和局部人

工边界两类^[1]。全局人工边界有边界元法、波函数展开法、基于惠更斯原理的方法等; 局部人工边界通常采用粘性或粘弹性边界、透射边界等。然而各种人工边界也有相应的问题, 如全局人工边界中边界元法的奇异性问题^[1], 波函数展开法无法满足半空间无限自由表面零面力条件等^[2]; 又如局部人工边界中粘性边界的低频失稳问题^[3], 粘弹性边界对面波的吸收效果差^[4]的问题等。本文提出一种满足全局边界条件的波函数组合法, 可以考虑包括瑞

^① 收稿日期: 2013-03-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(51038007, 51079074, 51129902)

作者简介: 姚 虞(1989-), 男, 湖北宜昌人, 博士生. E-mail: yaoyu@tsinghua.edu.cn

利波在内的不同地震波的不同角度入射情况,是一种精确的非一致位移输入方式。以往的方法是本文方法的近似解。

1 问题描述与波动方程

对二维半空间内任意边界形状的空心体,在地震波作用下我们希望求得其边界各点的地震动响应以作为空心体内部结构动力有限元计算的地震动输入。图1是表示瑞利波或任意角度的压缩波或剪切波入射到二维半空间不规则河谷的示意图。要求解的问题是在任意平面波的作用下河谷边界任意一点的震动过程。若能求解不规则河谷任意一点的震动过程,则该解可作为河谷内土石坝地震动响应有限元求解的输入。

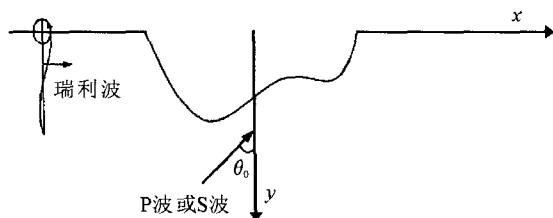


图1 二维半空间不规则河谷入射波示意图

Fig. 1 Incident wave of 2D irregular valley in half space

本文提出的求解该类问题的方法称为波函数组合法,是将体波波函数与瑞利波波函数组合而成的新方法。其中波函数是位移势函数表示的波动方程的通解。

任何一个矢量场可以分解可为一个无旋场(梯度场)和一个无散场(旋度场)之和:

$$\bar{u} = \nabla \phi + \nabla \times \bar{\psi}, \quad (1)$$

其中 ϕ 称为位移场的标量势; $\bar{\psi} = \psi_1 \bar{e}_1 + \psi_2 \bar{e}_2 + \psi_3 \bar{e}_3$ 称为位移场的矢量势。则弹性空间内的动力平衡方程可分解为^[5]

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_p^2 \nabla^2 \phi, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \bar{\psi}. \quad (3)$$

在频域内,对于单一频率的波,方程(2)和(3)的解和写为分离变量的形式,即

$$\phi = \phi(x, y, z) \cdot e^{i\omega t}, \quad (4)$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}(x, y, z) \cdot e^{i\omega t}. \quad (5)$$

将式(4)和(5)代入式(2)和(3),可得

$$(\nabla^2 + k_p^2)\phi(x, y, z) = 0, \quad (6)$$

$$(\nabla^2 + k_s^2)\bar{\psi}(x, y, z) = 0. \quad (7)$$

式(6)和(7)称为亥姆霍兹方程,是频域内波动

方程。

对于二维问题,矢量势 $\bar{\psi}$ 的三个分量都与 x_3 无关,则式(1)写成分量形式为

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2}, \quad (8)$$

$$u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}, \quad (9)$$

为简单起见,记 ψ_3 为 ψ , 则对于二维问题方程(3)可转化为

$$(\nabla^2 + k_s^2)\psi = 0, \quad (10)$$

即位移场由 ϕ 和 ψ 两个位移势函数决定。

2 二维半空间波函数组合法

二维半空间的波函数组合法是将二维全空间的波函数展开法与二维半空间的 Lamb 解组合,以同时满足散射边界零面力边界条件和半无限空间自由表面的零面力条件。其基本思路是:

- (1) 确定入射波自由场应力;
- (2) 位移、应力柱波函数展开;
- (3) 确定自由表面柱波函数产生的面力;
- (4) 在半无限空间自由表面反向叠加柱波函数产生的面力,应用 Lamb 基本解计算散射边界次生面力;
- (5) 匹配散射边界处自由场面力、波函数产生的面力与 Lamb 基本解产生的面力,形成散射边界无面力状态。

2.1 柱波函数展开法

在极坐标中方程(2)和方程(10)有如下分离变量形式的一般解:

$$\phi = \sum_{n=-N}^N A_n H_n^{(2)}(\alpha r) e^{in\theta}, \quad (11)$$

$$\psi = \sum_{n=-N}^N B_n H_n^{(2)}(\beta r) e^{in\theta}, \quad (12)$$

称为柱波函数,其中 $\alpha = \omega/c_p$ 为压缩波波数; $\beta = \omega/c_s$ 为剪切波波数; $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ 为压缩波波速; $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ 为剪切波波速; λ, μ 为拉梅常数; ρ 为介质密度。

极坐标下式(8)和式(9)转化为

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (13)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad (14)$$

再由几何方程和广义胡克定律,可得三个应力分量的表达式为

$$\sigma_{rr} = \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right), \quad (15)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \nabla^2 \varphi +$$

$$2\mu \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right) \right) \quad (16)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right) \quad (17)$$

将式(11)和式(12)代入式(13)至式(17),可以得到用组合系数 A_n 和 B_n 表达的位移场和应力场。

2.2 波函数组合法

由于柱波函数展开法不能满足水平自由表面的边界条件,存在残余面力 $-\sigma_{\theta\theta}^n(x)$ 与 $-\sigma_{r\theta}^n(x)$ 。为了满足自由表面条件,如图 2 所示,我们提出在表面处施加与残余面力相反方向的虚拟面力 $\sigma_{\theta\theta}^n(x)$ 与 $\sigma_{r\theta}^n(x)$ 。

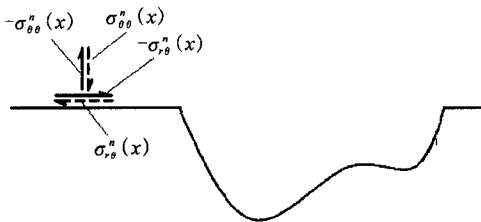


图 2 自由表面残余面力的消除

Fig. 2 Elimination of residual stress on free surface

将虚拟面力进行 Fourier 变换为 $P(k)$ 与 $Q(k)$:

$$P(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{\theta\theta}^n(x) e^{-ikx} dx, \quad (18)$$

$$Q(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{r\theta}^n(x) e^{-ikx} dx. \quad (19)$$

对于表面激励荷载,可利用瑞利波的位移势函数求解^[6]。设瑞利波势函数为

$$\phi = A \exp(-vz + ikx), \quad (20)$$

$$\psi = B \exp(-v'z + ikx), \quad (21)$$

其中 $v^2 = k^2 - \alpha^2$, $v'^2 = k^2 - \beta^2$, 且 $0 \leq \arg(v) \leq \pi$, $0 \leq \arg(v') \leq \pi$ 。则在 $x-z$ 坐标系下,位移与应力分别为

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (22)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (23)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \beta^2 \phi - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \quad (24)$$

$$\tau_{zx} = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = \mu \left(-\beta^2 \phi - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right), \quad (25)$$

$$\tau_{xx} = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \left(-\beta^2 \phi - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right). \quad (26)$$

由瑞利波势数得到的应力位移场是单一频率的,因而一般解应该要对波数积分,即

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} A_k \exp(-vz + ikx) dk, \quad (27)$$

$$\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} B_k \exp(-v'z + ikx) dk. \quad (28)$$

应力场和位移场也为相应的形式。而对需要在自由表面施加的空间域的面力,可写为波数域的逆变换形式,即

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(k) \exp(ikx) dk, \quad (29)$$

$$Q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(k) \exp(ikx) dk. \quad (30)$$

需要在自由表面出满足的零面力条件为

$$\tau_{zx} \big|_{z=0} = P(x), \quad (31)$$

$$\tau_{xx} \big|_{z=0} = Q(x). \quad (32)$$

由式(24)至式(26)表示的应力场与式(29)和式

(30)均有 $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx) dx$ 的形式,则由式(31)和式

(32),自由表面的平衡方程式可写为

$$(2k^2 - \beta^2)A - i2v'kB = \frac{P(k)}{2\pi\mu}, \quad (33)$$

$$i2v'kA + (2k^2 - \beta^2)B = \frac{Q(k)}{2\pi\mu}. \quad (34)$$

由式(33)和式(34)可将 A 、 B 用组合系数 A_n 和 B_n 表达,则 Lamb 解产生的应力场和位移场均可由 A_n 和 B_n 表达。

全空间的波函数展开法叠加上 Lamb 解之后,水平自由表面的零面力条件自动满足,且散射场可由 A_n 、 B_n 表达。由河谷边界的零面力条件可以确定组合系数 A_n 、 B_n ,进而确定散射场。

3 算例及应用

对半圆形河谷的散射问题,编写 MATLAB 程序进行了验证。算例包括对不同频率和入射角度的 P 波、SV 波以及不同频率的 R 波入射情况的验证。

验证结果所参考的文献为 H. L. Wong 在 1982 年发表的文章^[7]。该文章给出的结果已被 Francis-

co 等人作为验证其计算结果的参考^[2],因而相对可靠。当然,Wong 的方法本身不稳定,按文献[2]所谈及笔者编程验证,其计算结果随激励作用源的变化而变化。而 Francisco 等人的方法对 R 波的计算结果也不好^[2],经笔者编程验证是随自由表面延伸长度而改变的。这也体现出本文方法的优点所在。

经过计算,文献中所给出的半圆形河谷的 28 个结果均得到验证,现给出部分结果对比图。

图 3 给出的是 P 波入射时半圆形河谷边界的水平和竖向位移的放大系数图。图中横坐标为边界点坐标 x 与河谷半径 R 的比值;纵坐标为位移幅值与入射波位移幅值的比值,即放大系数;其中水平方向放大系数用 $|u_x|$ 表示,竖直方向放大系数用 $|u_y|$ 表示; θ 表示入射方向与竖直方向的夹角; η 为无量纲频率,表征相对于河谷尺度的入射波波数的大小,表达式为

$$\eta = \frac{\omega R}{\pi c_s} \quad (35)$$

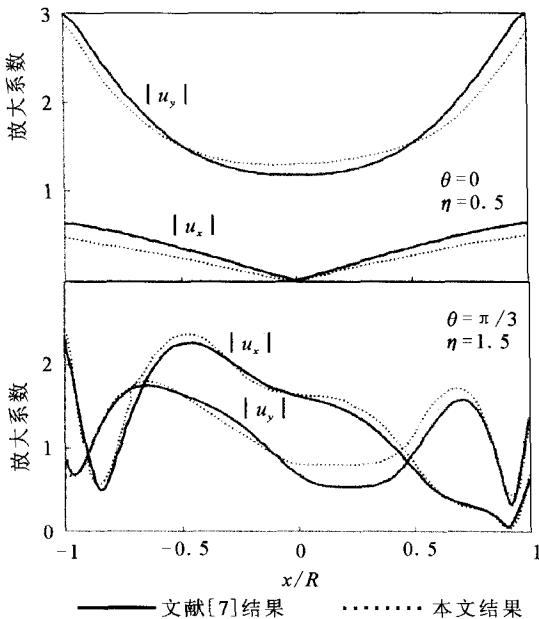


图 3 P 波入射河谷边界位移放大系数比较

Fig. 3 Comparison of displacement amplification factors of valley boundary under incidence of P wave

同样,图 4 和图 5 分别给出了 SV 波和 R 波入射时的情况。可以看出,本文的方法作为理论上的精确解,计算出的结果与文献[7]给出的结果是大体一致的。这一方面是对本方法所编写程序的验证,另一方面说明文献[7]在适当的激励作用源分布下可以得到正确的结果。但是由于没有确定激励作用

源分布的方法,所以文献[7]的方法的不稳定限制了其实用性。而本文提出的波函数组合法则不存在这样的缺陷,并且由于引入快速傅里叶变换解决半空间自由表面应力问题,避免了大量无穷积分的计算,相比之下计算时间要节省很多。

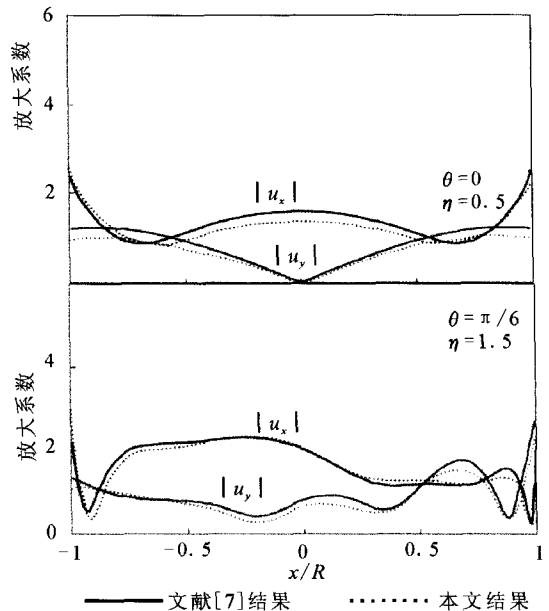


图 4 SV 波入射河谷边界位移放大系数比较

Fig. 4 Comparison of displacement amplification factors of valley boundary under incidence of SV wave

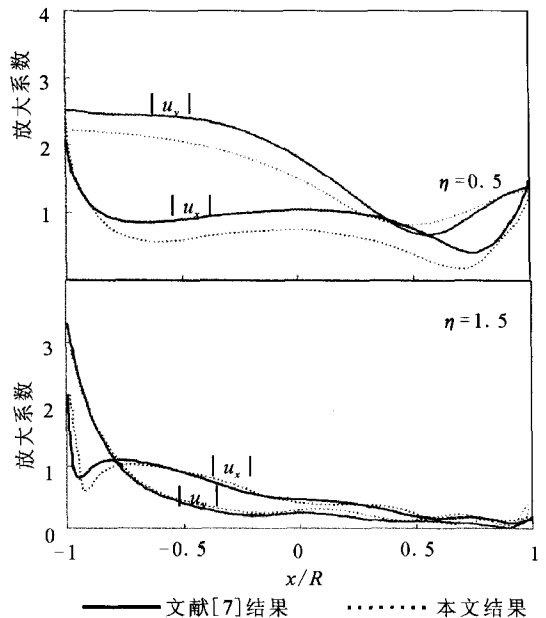


图 5 R 波入射河谷边界位移放大系数比较

Fig. 5 Comparison of displacement amplification factor of valley boundary under incidence of R wave

基于波函数组合法亦可解决三维不规则地形散射问题,限于篇幅,将另文介绍。

4 结论

本文提出的二维波函数组合法可以解决二维半空间内任意空心体的散射问题。程序经半圆形河谷散射问题验证,对 P 波、S 波和 R 波入射情况均能得到合理结果。相比于已有方法,本方法在数值上是稳定的,在理论上是完备精确的。

【参考文献】

- [1] 廖振鹏. 工程波动理论导论(第二版)[M]. 北京:科学出版社, 2002.
LIAO Zhen-peng. Introduction to Wave Motion Theories in Engineering[M]. Beijing: Science Press, 2002.
- [2] Francisco J Sanchez-Sesma, Miguel A Bravo, Ismael Herrera. Surface Motion of Topographical Irregularities for Incident P, SV, and Rayleigh Waves[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1985, 75(1): 263-269.
- [3] LIU Jing-bo, LU Yan-dong. A direct Method for Analysis of Dynamic Soil-structure Interaction Based on Interface Idea [A]//ZHANG Chu-han, WOLF J P. edit. Dynamic Soil-Structure Interaction[G]. [S. l.]International Academia Publishers, 1997: 258-273.
- [4] 李彬. 地铁地下结构抗震理论分析与应用研究[D]. 北京:清华大学, 2005.
LI Bin. Theoretical Analysis of Seismic Response of Underground Subway Structures and Its Application[D]. Beijing: Tsinghua University, 2005.
- [5] 鲍亦兴, 毛昭宙. 弹性波的衍射与动应力集中[M]. 北京:科学出版社, 1993.
PAO Yih-Hsing, MOW Chao-Chow. The Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations[M]. Beijing: Science Press, 1993.
- [6] [美]阿肯巴赫, 著. 徐植信, 洪锦如, 译. 弹性固体中波的传播 [M]. 上海:同济大学出版社, 1992.
Achenbach J D. Translated by XU Zhi-xin, HONG Jin-ru. Wave Propagation in Elastic Solids[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1992.
- [7] H L Wong. Effect of Surface Topography on the Diffraction of P, SV and Rayleigh Waves [J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1982, 72(4): 1167-1183.