半空间饱和介质内圆形洞室对平面 P_1 波的散射

徐 平[1],铁 瑛[2],夏唐代[3]
(1. 郑州大学交通运输工程系,河南 郑州 450002;2. 郑州大学机械工程学院,河南 郑州 450002;
3. 浙江大学岩土工程研究所,浙江 杭州 310027)

摘 要:考虑土颗粒和孔隙流体的压缩性以及孔隙流体与土骨架之间的粘性耦合作用,采用修正的Biot模型,假定半空间表面不透水,得到了平面 P_1 波(快压缩波)在半空间表面的反射 P_1 波、P_2 波(慢压缩波)和SV波(剪切波)的幅值。采用大圆弧假定将半空间内圆形洞室的散射问题转化为大圆弧和圆形洞室的多重散射问题,运用波函数展开法将入射波、反射波以及半空间表面和洞室的散射波的势函数展开成Fourier-Bessel函数的无穷级数形式,由Graf加法定理得到同一坐标系下的势函数的表达式,根据半空间表面和洞室完全自由的边界条件得到了待定复系数的理论解。通过数值计算,着重分析了平面 P_1 波垂直向上入射时无量纲入射频率和洞室埋藏深度等对洞室的动应力集中因子和半空间表面的归一化水平和竖向位移的影响。

关键词:半空间;饱和介质;圆形洞室;平面 P_1 波;散射
中图分类号:TU435 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-0844(2008)04-0369-07

Scattering of Plane P_1 Waves by a Circular Cavity Buried in Semi-infinite Space Saturated Media

XU Ping[1], TIE Ying[2], XIA Tang-dai[3]
(1. *Department of Transportation Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou* 450002, *China*;
2. *School of Mechanical Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou* 450002, *China*;
3. *Institution of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou* 310027, *China*)

Abstract: Considering the compression of soil grain and pore fluid, and viscid coupling of pore fluid with soil skeleton, adopting the amended Biot model, the amplitudes of P_1 wave, P_2 wave and SV wave which are reflected from the plane P_1 wave are calculated when the semi-infinite space surface is impervious. The semi-infinite surface is taken as a large curved arc, the potential functions of incident waves, reflected waves from the semi-infinite surface, scattered waves from the circular cavity and the curved arc are all expanded to the infinite serials of Fourier-Bessel functions based on the expansion method of wave functions, and then the single scattering problem of a cavity in semi-infinite space is turned to a multiple scattering problem of cavity and curved arc based on the Graf's addition theorem. According to the boundary conditions that the semi-infinite space surface and cavity are all free, the theoretical solutions the complex coefficients of the potential functions are obtained. The influence of the normalized incident frequency and the cavity depth on the normalized horizontal, vertical displacements of the semi-infinite space surface and the dynamic stress concentration factor of the cavity are studied by theoretical simulation when the P_1 waves are vertically incident.

Key words: **Semi-infinite space; Saturated media; Circular cavity; Plane P_1 waves; Scattering**

收稿日期:2008-03-06
基金项目:国家自然科学基金项目(59808011)
作者简介:徐平(1977-),男,山东五莲人,博士,讲师,主要从事土动力学方面的研究.

0 引言

自 20 世纪 50 年代起，国内外许多专家对无限弹性介质或流体介质内圆柱壳体或圆柱体对弹性波的散射进行了大量的研究，其理论已经比较成熟[1-4]。目前为止，也对半空间弹性介质内的洞室或衬砌的散射问题进行了研究：文献[5]采用镜像法对入射 SH 波引起的浅埋圆形衬砌的动应力集中问题进行了研究；但 P 波和 SV 波由于在散射时会发生波型转换，即单一入射波（P 波或 SV 波）散射或反射时会同时产生 P 波和 SV 波，其引起的圆形衬砌的动应力集中问题比 SH 波复杂得多，不能采用镜像法来研究，文献[5-10]借助大半径凸状或凹状圆弧来模拟半空间表面，通过求解入射波在大圆弧表面和圆形孔洞表面的多重散射，并将大圆弧半径取的足够大，来近似得到弹性半空间内单个洞室对 P 波和 SV 波的散射问题的解析解；文献[10]采用的是大半径凸圆弧，洞室和圆弧的散射波都可展开成第一类 Hankel 函数的形式，计算结果不再像凹圆弧那样受圆弧曲率的影响。上述研究主要集中于半空间弹性介质，但是天然土层往往含有孔隙水，尤其对于地下水丰富的地区在求解此类问题时必须视为饱和介质。不同于一般的弹性介质，饱和土体中可传播一种剪切波（S 波）和两种压缩波：快压缩波（P_1 波）和慢压缩波（P_2 波）[11]，而且边界条件还要考虑孔隙水压力问题，因此饱和介质洞室的散射问题比弹性介质复杂得多。文献[12]采用复变函数法给出了稳态 P 波入射时饱和半空间内孔洞周边的动应力分布情况，但没有给出半空间表面水平和竖向位移的变化规律。

本文采用文献[10]的凸圆弧假定，研究了半空间饱和介质内圆形洞室对入射 P_1 波的散射问题，并进一步分析了孔洞的动应力集中因子以及半空间表面的水平位移和竖向位移的变化规律和影响因素。

1 波场的势函数展开

1.1 入射波和反射波的势函数展开

假定由 $-\infty < x < \infty$ 和 $z \geqslant 0$ 确定的半空间充满各向同性的均质饱和介质，$z<0$ 一侧为真空，不存在波的传播机制。由于 P_2 波衰减太快，一般不考虑 P_2 波入射的情况，但是反射波和散射波的成分往往都含有 P_2 波成分。考虑到 P_1 波和 SV 波入射时的求解思路和结果都完全相似，这里只给出 P_1 波入射的情况。如图 1 所示，取 P_1 波的入射角为 α_1，则 P_1 波的反射角也为 α_1，P_2 波和 SV 波的反射角 α_2 和 β 可由 Snell 反射定律求得：$\alpha_2 = \arcsin(k_1 \sin\alpha_1 / k_2)$，$\beta = \arcsin(k_1 \sin\alpha_1 / k_s)$，这里 k_1、k_2 和 k_s 分别为半空间饱和介质中 P_1 波、P_2 波和 SV 波的波数，其计算公式参见文献[13-15]。

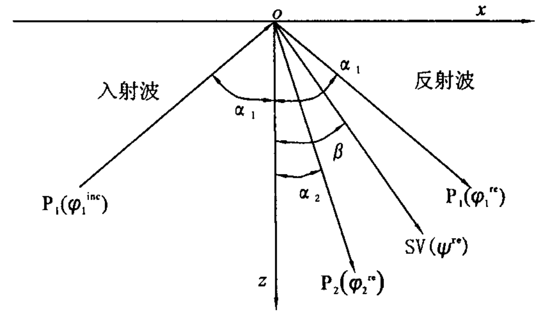

图 1 P_1 波在饱和半空间表面上的反射

Fig. 1 Reflection of P_1 wave on saturated semi-infinite space.

在大多数情况下，半空间表面和洞室都是不透水的，此时边界条件可描述为：$\sigma_z = 0$、$\tau_{xz} = 0$、$\partial p_f / \partial_z = 0$。假定入射 P_1 波的幅值为 A_0，反射 P_1 波、P_2 波和 SV 波的幅值分别为 A_1、A_2 和 B_1，则：

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

式中，矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和向量 $\boldsymbol{Y}$ 中各元素的详细表达式为 $Q_{11} = -Y_1 = -(\lambda_1^* + 2\cos^2\alpha_1)k_1^2$；$Q_{12} = -(\lambda_2^* + 2\cos^2\alpha_2) \times k_2^2$；$Q_{13} = -k_s^2 \sin 2\beta$；$Q_{21} = -Y_2 = -k_1^2 \sin 2\alpha_1$；$Q_{22} = -k_2^2 \sin 2\alpha_2$；$Q_{23} = k_s^2 \cos 2\beta$；$Q_{31} = -Y_3 = (\alpha + \gamma_1)k_1^2 \cos\alpha_1$；$Q_{32} = (\alpha + \gamma_2)k_2^2 \times \cos\alpha_2$；$Q_{33} = 0$；$\lambda_{1,2}^* = [\lambda + (\alpha + \gamma_{1,2})\alpha M]/\mu$。其中 λ 和 μ 为固体土骨架（干土状态）的 Lamé 弹性常量；M 和 α 为表征土颗粒和孔隙流体压缩性的常数；γ_1 和 γ_2 为比例系数，求解公式可参见文献[14-15]。

将半空间表面假定为大圆弧，如图 2 所示，洞室的半径为 a，洞室圆心 o_1 和大圆弧圆心 o_2 到半空间表面的距离分别为 h 和 d，定义 $D = h + d$。

将入射 P_1 波的势函数 φ_f^{inc}，反射 P_1 波、P_2 波和 SV 波的势函数 φ_f^{re}、φ_s^{re} 和 ψ^{re} 展开成 Fourier－Bessel 函数的无穷级数形式：

$$\varphi_{f1}^{inc+re} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_1 r_1)(A_{0n}\cos n\theta_1 + B_{0n}\sin n\theta_1) \tag{2a}$$

$$\varphi_{s1}^{re} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_2 r_1)(C_{0n}\cos n\theta_1 + D_{0n}\sin n\theta_1) \tag{2b}$$

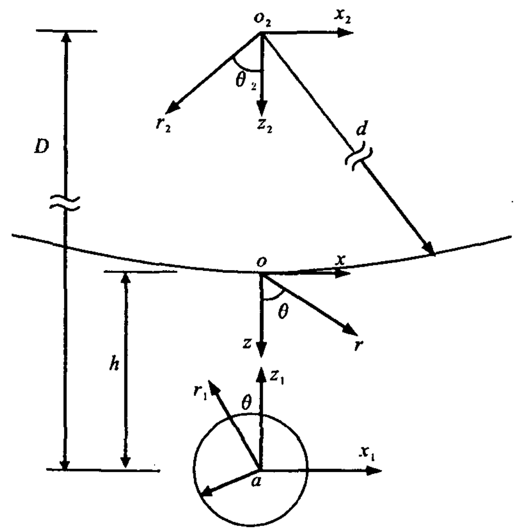

图 2　半空间内圆形孔洞散射问题的示意图[10]

Fig. 2　Scattering problem of a circular cavity in semi-infinite space.

$$\psi_1^{re} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_s r_1)(E_{0n}\sin n\theta_1 + F_{0n}\cos n\theta_1) \tag{2c}$$

式中,上标 inc 和 re 分别表示入射和反射;下标 1 表示势函数采用的坐标是极坐标系(r_1,θ_1),下标 f 和 s 分别代表 P_1 波(fast primary wave)和 P_2 波(slow primary wave);$A_{0n}=[A_0 e^{-ik_1 h\cos\alpha_1}+A_1 e^{-ik_1 h\cos\alpha_1}(-1)^n]\ \varepsilon_n i^n\cos n\alpha_1$;$B_{0n}=[A_0 e^{-ik_1 h\cos\alpha_1}+A_1 e^{-ik_1 h\cos\alpha_1}(-1)^n]\varepsilon_n i^n\sin n\alpha_1$;$C_{0n}=A_2\times e^{-ik_2 h\cos\alpha_2}\varepsilon_n(-i)^n\cos n\alpha_2$;$D_{0n}=A_2 e^{-ik_2 h\cos\alpha_2}\varepsilon_n(-i)^n\sin n\alpha_2$;$E_{0n}=B_1 e^{ik_s h\cos\beta}\varepsilon_n(-i)^n\sin n\beta$;$F_{0n}=B_1 e^{ik_s h\cos\beta}\varepsilon_n(-i)^n\cos n\beta$;$Jn(\cdot)$为 n 阶 Bessel 函数;ε_n 为 Neumann 因子,$\varepsilon_0=1$,$\varepsilon_0=2(n\geqslant 1)$;i 为虚数单位。为了研究和讨论方便,式(2)及以下的公式中都略去了公共时间因子 $e^{-i\omega t}$。

1.2　散射波的势函数展开

采用坐标系(r_1,θ_1),则半空间内洞室向外的散射波可表示成

$$\varphi_{f1}^{sc} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_1 r_1)(A_{1n}\cos n\theta_1 + B_{1n}\sin n\theta_1) \tag{3a}$$

$$\varphi_{s1}^{sc} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_2 r_1)(C_{1n}\cos n\theta_1 + D_{1n}\sin n\theta_1) \tag{3b}$$

$$\psi_1^{sc} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_s r_1)(E_{1n}\sin n\theta_1 + F_{1n}\cos n\theta_1) \tag{3c}$$

式中,上标 sc 表示散射;$H_n^{(1)}(\cdot)$为 n 阶第一类 Hankel 函数。

若采用坐标系(r_2,θ_2),则半空间表面的大圆弧向饱和介质内的散射波可表示成

$$\varphi_{f2}^{sc} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(1)}(k_1 r_2)(A_{2m}^{*}\cos m\theta_2 + B_{2m}^{*}\sin m\theta_2) \tag{4a}$$

$$\varphi_{s2}^{sc} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(1)}(k_2 r_2)(C_{2m}^{*}\cos m\theta_2 + D_{2m}^{*}\sin m\theta_2) \tag{4b}$$

$$\psi_2^{sc} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(1)}(k_s r_2)(E_{2m}^{*}\sin m\theta_2 + F_{2m}^{*}\cos m\theta_2) \tag{4c}$$

式中,下标 2 表示势函数采用的坐标标是极坐标系(r_2,θ_2)。

根据 Graf 加法原理[16],将 φ_{f1}^{sc}、φ_{s1}^{sc}和 ψ_1^{sc} 表示成坐标系(r_2,θ_2)下的形式,将 φ_{f2}^{sc}、φ_{s2}^{sc}和 ψ_2^{sc} 表示成坐标系(r_1,θ_1)下的形式:

$$\varphi_{f1}^{sc} = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_1 r_2)(A_{1m}^{*}\cos m\theta_2 + B_{1m}^{*}\sin m\theta_2) \tag{5a}$$

$$\varphi_{s1}^{sc} = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_2 r_2)(C_{1m}^{*}\cos m\theta_2 + D_{1m}^{*}\sin m\theta_2) \tag{5b}$$

$$\psi_1^{sc} = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_s r_2)(E_{1m}^{*}\sin m\theta_2 + F_{1m}^{*}\cos m\theta_2) \tag{5c}$$

$$\varphi_{f2}^{sc} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_1 r_1)(A_{2n}\cos n\theta_1 + B_{2n}\sin n\theta_1) \tag{5d}$$

$$\varphi_{s2}^{sc} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_2 r_1)(C_{2n}\cos n\theta_1 + D_{2n}\sin n\theta_1) \tag{5e}$$

$$\psi_2^{sc} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_s r_1)(E_{2n}\sin m\theta_1 + F_{2n}\cos m\theta_1) \tag{5f}$$

式(3)~(5)中,$A_{1n}\sim F_{2n}^{*}$为待定复系数,存在着如下关系:

$$\begin{pmatrix} A_{1m}^{*} \\ C_{1m}^{*} \\ E_{1m}^{*} \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon_m}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[T_{mn}^{+}]\begin{pmatrix} A_{1n} \\ C_{1n} \\ E_{1n} \end{pmatrix} \tag{6a}$$

$$\begin{pmatrix} B_{1m}^{*} \\ D_{1m}^{*} \\ F_{1m}^{*} \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon_m}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[T_{mn}^{-}]\begin{pmatrix} B_{1n} \\ D_{1n} \\ F_{1n} \end{pmatrix} \tag{6b}$$

$$\begin{pmatrix} A_{2n} \\ C_{2n} \\ E_{2n} \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon_n}{2}\sum_{m=0}^{\infty}[T_{nm}^{+}]\begin{pmatrix} A_{2m}^{*} \\ C_{2m}^{*} \\ E_{2m}^{*} \end{pmatrix} \tag{6c}$$

$$\begin{pmatrix} B_{2n} \\ D_{2n} \\ F_{2n} \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon_n}{2}\sum_{m=0}^{\infty}[T_{nm}^{-}]\begin{pmatrix} B_{2m}^{*} \\ D_{2m}^{*} \\ F_{2m}^{*} \end{pmatrix} \tag{6d}$$

$$[T_{mn}^{+}] = \begin{bmatrix} T_{mn}^{+}(k_1D) & 0 & 0 \\ 0 & T_{mn}^{+}(k_2D) & 0 \\ 0 & 0 & T_{mn}^{-}(k_sD) \end{bmatrix} \tag{7a}$$

$$[T_{mn}^{-}] = \begin{bmatrix} T_{mn}^{-}(k_1D) & 0 & 0 \\ 0 & T_{mn}^{-}(k_2D) & 0 \\ 0 & 0 & T_{mn}^{+}(k_sD) \end{bmatrix} \tag{7b}$$

其中，$T_{mn}^{+}(kD) = H_{m+n}^{(1)}(kD) + (-1)^n H_{m-n}^{(-1)}(kD)$；$T_{mn}^{-}(kD) = H_{m+n}^{(1)}(kD) - (-1)^n H_{m-n}^{(-1)}(kD)$。

2 问题的求解

将入射波、反射波和散射波的势函数表达式(2)~(5)代入相关公式[14]，可得坐标系(r_1,θ_1)和(r_2,θ_2)下的应力表达式，见式(8)。其中矩阵$[E^{(l)}(r,n)]$和$[E_{-}^{(l)}(r,n)]$的表达式见式(9)。

根据表面不透水的条件：$\sigma_z = 0$、$\tau_{xz} = 0$、$\partial p_f/\partial_z = 0$，以及不同阶三角函数$\cos n\theta$和$\sin n\theta$线性无关的性质最终可以得到关于任意$n$的$A_{1n}$、$C_{1n}$和$E_{1n}$的理论解，见式(10)。将式(10)中的$[E^{(l)}]$和$A$、$C$、$E$相应地替换为$[E_{-}^{(l)}]$和$B$、$D$、$F$，则式(10)就是关于任意$n$的$B_{1n}$、$D_{1n}$和$D_{1n}$的理论解。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{r_1} \\ \tau_{r_1\theta_1} \\ \partial p_f/\partial r_1 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{[E^{(3)}(r_1,n)]\begin{pmatrix} A_{1n} \\ C_{1n} \\ E_{1n} \end{pmatrix} + [E^{(1)}(r_1,n)]\begin{pmatrix} A_{0n}+A_{2n} \\ C_{0n}+C_{2n} \\ E_{0n}+E_{2n} \end{pmatrix}\right\}^T \begin{pmatrix} \cos n\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin n\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta_1 \end{pmatrix} +$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{[E_{-}^{(3)}(r_1,n)]\begin{pmatrix} B_{1n} \\ D_{1n} \\ F_{1n} \end{pmatrix} + [E_{-}^{(1)}(r_1,n)]\begin{pmatrix} B_{0n}+B_{2n} \\ D_{0n}+D_{2n} \\ F_{0n}+F_{2n} \end{pmatrix}\right\}^T \begin{pmatrix} \sin n\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin n\theta_1 \end{pmatrix} \tag{8a}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{r_2} \\ \tau_{r_2\theta_2} \\ \partial p_f/\partial r_2 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{[E^{(1)}(r_2,n)]\begin{pmatrix} A_{1n}^{*} \\ C_{1n}^{*} \\ E_{1n}^{*} \end{pmatrix} + [E^{(3)}(r_2,n)]\begin{pmatrix} A_{2n}^{*} \\ C_{2n}^{*} \\ E_{2n}^{*} \end{pmatrix}\right\}^T \begin{pmatrix} \cos n\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \sin n\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta_2 \end{pmatrix} +$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{[E_{-}^{(1)}(r_2,n)]\begin{pmatrix} B_{1n}^{*} \\ D_{1n}^{*} \\ F_{1n}^{*} \end{pmatrix} + [E_{-}^{(3)}(r_2,n)]\begin{pmatrix} B_{2n}^{*} \\ D_{2n}^{*} \\ F_{2n}^{*} \end{pmatrix}\right\}^T \begin{pmatrix} \sin n\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sin n\theta_2 \end{pmatrix} \tag{8b}$$

$$[E^{(l)}(r,n)] = \begin{bmatrix} E_{11}^{(l)}(r,n) & E_{12}^{(l)}(r,n) & E_{13}^{(l)}(r,n) \\ E_{21}^{(l)}(r,n) & E_{22}^{(l)}(r,n) & E_{23}^{(l)}(r,n) \\ E_{31}^{(l)}(r,n) & E_{32}^{(l)}(r,n) & E_{33}^{(l)}(r,n) \end{bmatrix};$$
$$[E_{-}^{(l)}(r,n)] = \begin{bmatrix} E_{11}^{(l)}(r,n) & E_{12}^{(l)}(r,n) & -E_{13}^{(l)}(r,n) \\ -E_{21}^{(l)}(r,n) & -E_{22}^{(l)}(r,n) & E_{23}^{(l)}(r,n) \\ E_{31}^{(l)}(r,n) & E_{32}^{(l)}(r,n) & E_{33}^{(l)}(r,n) \end{bmatrix} \tag{9}$$

其中 $E_{11}^{(l)}(r,n) = \frac{1}{r^2}\{-(\lambda_c + \alpha M\gamma_1)k_1^2r^2Z_n^{(l)}(k_1r) + 2\mu[(n^2+n-k_1^2r^2)Z_n^{(l)}(k_1r) - k_1rZ_{n-1}^{(l)}(k_1r)]\}$；$E_{12}^{(l)}(r,n) = \frac{1}{r^2}\{-(\lambda_c + \alpha M\gamma_2)k_2^2r^2Z_n^{(l)}(k_2r) + 2\mu[(n^2+n-k_2^2r^2)Z_n^{(l)}(k_2r) - k_2rZ_{n-1}^{(l)}(k_2r)]\}$；$E_{13}^{(l)}(r,n) = \frac{2\mu n}{r^2}[k_srZ_n^{(l)}(k_2r) - (1+n)Z_n^{(l)}(k_2r)]$；$E_{21}^{(l)}(r,n) = -\frac{2\mu n}{r^2}[k_1rZ_n^{(l)}(k_1r) - (1+n)Z_n^{(l)}(k_1r)]$；$E_{22}^{(l)}(r,n) = -\frac{2\mu n}{r^2}[k_2rZ_n^{(l)}(k_2r) - (1+n)Z_n^{(l)}(k_2r)]$；$E_{23}^{(l)}(r,n) = \frac{2\mu}{r^2}\left[-\left(n^2+n-\frac{k_s^2r^2}{2}\right)Z_n^{(l)}(k_sr) + k_srZ_{n-1}^{(l)}(k_sr)\right]$；

$E_{31}^{(l)}(r,n) = \frac{1}{r^3}M(\alpha+\gamma_1)k_1^2r^2[k_1rZ_{n-1}^{(l)}(k_1r) - nZ_n^{(l)}(k_1r)]$;$E_{32}^{(l)}(r,n) = \frac{1}{r^3}M(\alpha+\gamma_2)k_2^2r^2[k_2rZ_{n-1}^{(l)}(k_2r) - nZ_n^{(l)}(k_2r)]$; $E_{33}^{(l)}(r,n) = 0$。

$$\frac{\varepsilon_n}{2}[\boldsymbol{E}^{(1)}(b,n)]\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m}{2}\sum_{p=0}^{\infty}[\boldsymbol{T}_{nm}^{+}][\boldsymbol{E}^{(3)}(d,m)]^{-1}[\boldsymbol{E}^{(1)}(d,m)][\boldsymbol{T}_{mp}^{+}]\begin{pmatrix}A_{1p}\\ C_{1p}\\ E_{1p}\end{pmatrix} - [\boldsymbol{E}^{(3)}(b,n)]\begin{pmatrix}A_{1n}\\ C_{1n}\\ E_{1n}\end{pmatrix} = [\boldsymbol{E}^{(1)}(b,n)]\begin{pmatrix}A_{0n}\\ C_{0n}\\ E_{0n}\end{pmatrix} \tag{10}$$

3　数值计算

参考文献[14],取饱和土体的参数如下:孔隙比 $f=0.3$;土颗粒密度 $\rho_s = 2\ 650\ \mathrm{kg/m^3}$;孔隙流体密度 $\rho_f = 1\ 000\ \mathrm{kg/m^3}$;渗透系数 $k_f = 1\times10^{-5}\ \mathrm{m^{-2}}$;Lamé 弹性常量 $\lambda = 26.1$ MPa、$\mu = 10.4$ MPa;表征孔隙流体压缩系数 $\alpha = 0.998$;表征土颗粒压缩参数 $M = 6.67$ GPa。

参考文献[10]取大圆弧半径为 $d/a = 100$。定义无量纲入射频率为 $\eta = k_1a/\pi$。下面主要分析洞室的埋藏深度 h/a 和入射频率 η 对半空间表面的归一化水平位移 u 和竖向位移 v 和洞室动应力集中因子 S_d 的影响。u、v 和 S_d 的定义如下:

$$u = |(u_r\cos\theta_1 + v_\theta\sin\theta_1)/A_0k_1| \tag{11a}$$

$$v = |(u_r\sin\theta_1 - v_\theta\cos\theta_1)/A_0k_1| \tag{11b}$$

$$S_d = |\sigma_\theta/[\lambda + 2\mu + (\alpha+\gamma_1)\alpha M]| \tag{11c}$$

式中,u_r 和 v_θ 分别为径向位移和切向位移;σ_θ 为环向应力。

假定 P_1 垂直向上入射,即 $\alpha_1 = 0°$;洞室埋深 h/a 分别取5和20;入射频率 η 分别取0.5、1.0、1.5和2.0。绘制了洞室的动应力集中因子 S_d 沿周向的分布曲线如图3和4所示,半空间表面水平位移 u 在($-4\leqslant x/a\leqslant 4$)范围内的变化曲线如图5和6所示,以及竖向位移 v 的变化曲线如图7和8所示。

从图3和4可以看出,不管洞室埋藏深还是浅,随着 η 的增大 S_d 的最大值都呈明显增大的变化趋势。但是埋深不同,S_d 最大值所在的区域也不同:当埋藏较浅时,半空间表面反射回来的波对洞室的影响较大,此时洞室的顶部区域(见图2 $\theta_1 = 0°$附近的区域,即前进方向一侧)的 S_d 最大;但当埋藏较深时,半空间表面反射波的影响减弱,而入射波的影响则相应地增强,此时洞室的底部(见图2,$\theta_1 = 180°$附近的区域,即背向一侧)的 S_d 最大。

从图5和6可以看出,由于是平面 P_1 波垂直向上入射,而 P_1 波的偏振方向与传播方向一致,所以在半空间表面中心点的水平位移位移为零。另外还

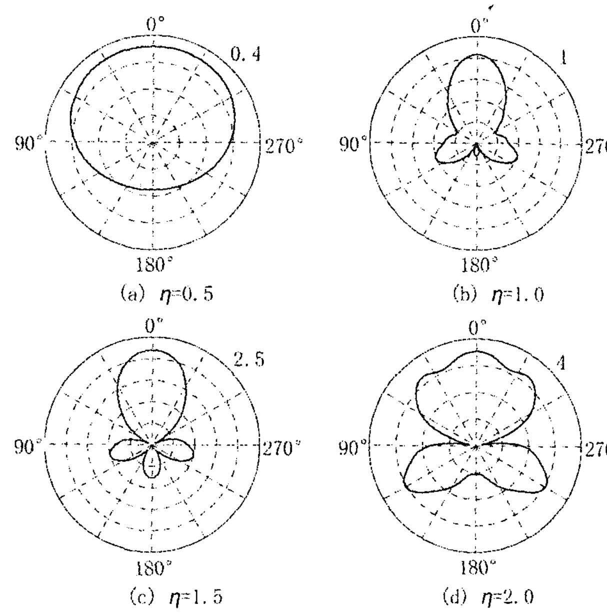

图3　动应力集中因子 S_d 沿周向的分布曲线($h/a=5$)

Fig. 3　Circumferential curves of S_d($h/a=5$).

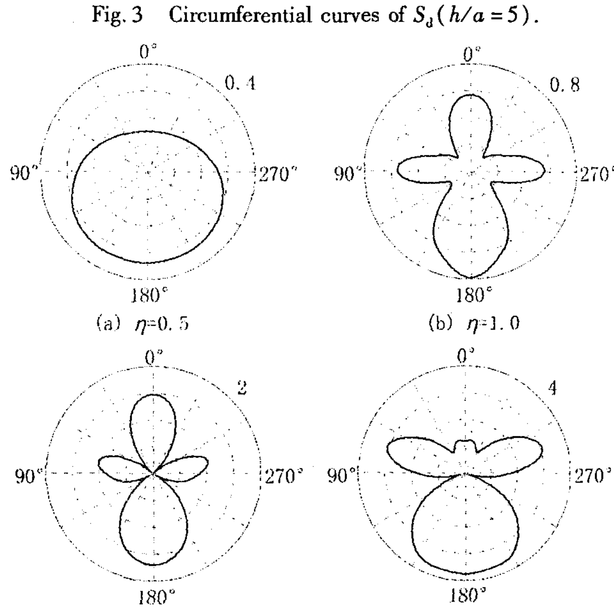

图4　动应力集中因子 S_d 沿周向的分布曲线($h/a=20$)

Fig. 4　Circumferential curves of S_d($h/a=20$).

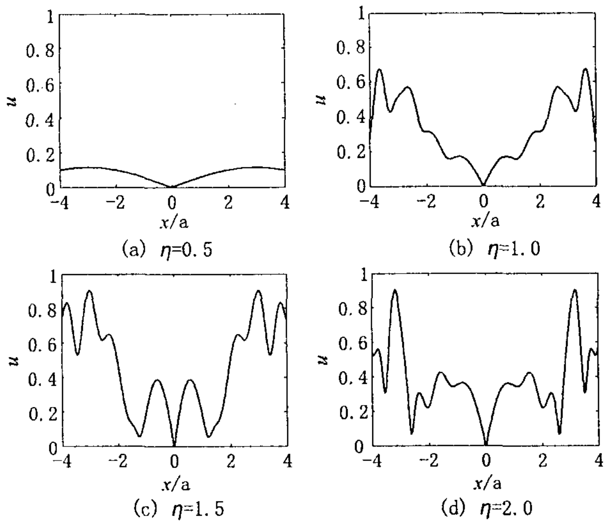

图5 归一化水平位移 u 沿 x/a 的变化曲线 ($h/a=5$)

Fig. 5 Curves of u changing with $x/a(h/a=5)$.

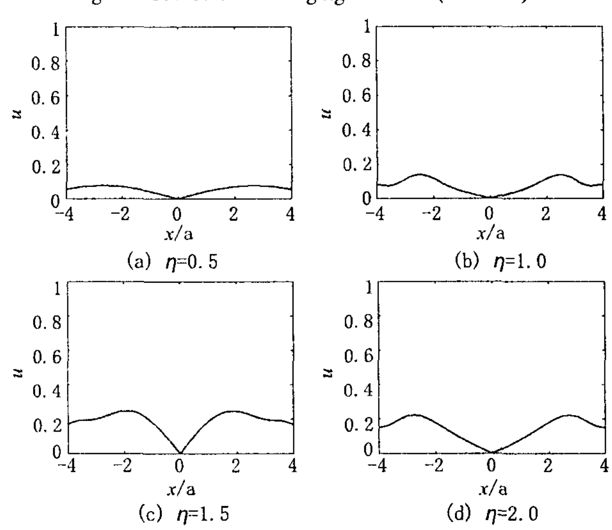

图6 归一化水平位移 u 沿 x/a 的变化曲线 ($h/a=20$)

Fig. 6 Curves of u changing with $x/a(h/a=20)$.

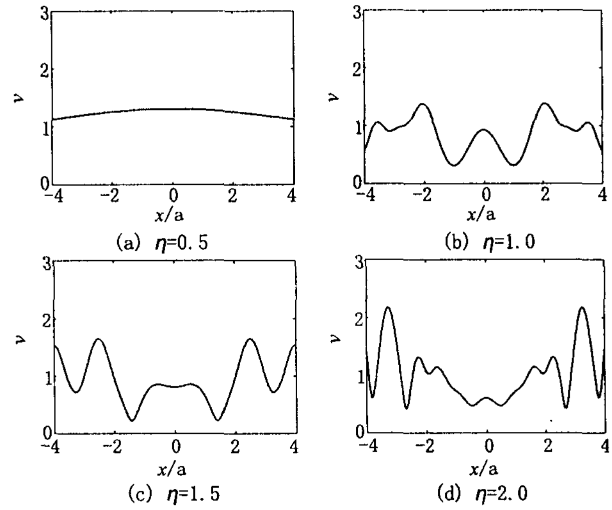

图7 归一化竖向位移 v 沿 x/a 的变化曲线 ($h/a=5$)

Fig. 7 Curves of v changing with $x/a(h/a=5)$.

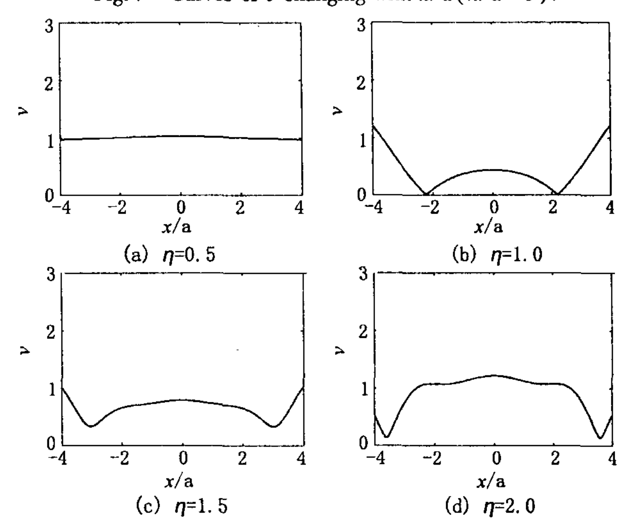

图8 归一化竖向位移 v 沿 x/a 的变化曲线 ($h/a=20$)

Fig. 8 Curves of v changing with $x/a(h/a=20)$.

可以看出:当洞室埋藏较浅时,随着 η 的增加 u 的最大值明显地增大,分布曲线也由平滑变得复杂,而 η 超过1.0以后,u 的最大值基本趋于稳定,并且都小于1.0;而当洞室埋藏较深时,随着 η 的增大 u 的曲线的形状基本保持不变,都比较平滑,而且最大值变化也不大,最大值不超过0.25,明显地小于埋藏较浅的情况。

从图7和8可以看出:当洞室埋藏较浅时,随着 η 的增大 v 的变化曲线的形状由平滑变得复杂,但稳定值基本上都接近于1;当洞室埋藏较深时随着 η 的增大,半空间表面中心区域的越来越大于两侧区域,这说明频率越高,散射波的作用区域越靠近中心。

4 结论

将半空间表面近似成大圆弧,运用波函数展开法和多重散射理论,得到了半无限饱和介质内圆形洞室对平面 P_1 波的散射问题的理论解,着重分析了平面 P_1 波垂直向上入射时,入射频率 η 和洞室埋藏深度 h 等对洞室动应力集中因子 S_d 和半空间表面的水平位移 u、竖向位移 v 的影响,结果表明:

(1) η 越大越容易产生大的 S_d;当 h 较小时半空间表面的反射波影响较大,洞室顶部区域的 S_d 最大,而但 h 较大时半空间表面的反射波的影响较小,

而入射波的影响较大,此时洞室的底部的 S_d 最大。

(2)随着 η 越大,当 h 较小时 u 基本上呈增大的趋势;但 h 较大时 u 则基本上保持不变,数值也小于 h 较小的情况。

(3)当 h 较小时,v 的稳定值基本上都接近于1;当 h 较大时,随着 η 的增大半空间表面中心区域的越来越大于两侧区域。也就是说,入射频率越高半空间表面竖向位移受较大影响的区域越靠近中心。

[参考文献]

[1] White R M. Elastic Wave scattering at a cylindrical discontinuity in a solid[J]. Acoust. Soc. Am., 1958,30(8):405-418.

[2] Pao Y H, Mow, C C. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations[M]. New York: Crane, Russak & Company Inc,1973:208-305.

[3] Gaunaurd G C, Überall H. Theory of resonant scattering from spherical cavities in elastic and viscoelastic media[J]. Acoust. Soc. Am.,1978, 63(6):1699-1712.

[4] Veksler N, Izbicki J L, Conoir J M. Elastic wave scattering by a cylindrical shell[J]. Wave Motion,1999,29(3): 195-209.

[5] Lee V W, Trifunac M D. Response of tunnels to incident SH-waves[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE,1979, 10(4):643-659.

[6] Lee V W, Karl J. Diffraction of SV waves by underground, circular, cylindrical cavities[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering,1991,11:445-456.

[7] Lee V W, Karl J. On deformation near a circular underground cavity subjected to incident plane P waves[J]. European Journal of Earthquake Engineering,1993, 7(1):29-36.

[8] Luco J E, Debarros F C P. Dynamic displacements and stresses in the vicinity of a cylindrical cavity embedded in a half-space[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics,1994,23: 321-340.

[9] Davis C A, Bardet J P. Seismic analysis of large diameter exible underground pipes[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering ASCE,1998,124(10):1005-1015.

[10] Davis C A, Lee V W, Bardet J P. Transverse response of underground cavities and pipes to incident SV waves[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics,2001,30:383-410.

[11] Biot M A. Mechanics of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid[J]. Acoust. Soc. Am.,1956,28(2): 168-191.

[12] 王建华,姜领发,周香莲. 稳态P波对半无限饱和土中的圆形孔洞的散射[J]. 南昌工程学院学报, 2005, 24(1): 8-19.

[13] 张丽琴,於文辉,王家映. 离散介质中地震波传播的数值模拟[J]. 西北地震学报,2004,26(1):8-19.

[14] 吴世明. 土介质中的波[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

[15] 徐平,夏唐代. P_1 波入射角对建筑基础振动的影响[J]. 振动与冲击, 2006, 25(5): 58-61.

[16] 徐平,夏唐代,闫东明. P_1 波入射下饱和度对深埋圆形衬砌动应力集中因子的影响[J]. 振动与冲击,2007, 26(4):46-49.