第28卷 第3期
2006年9月
西北地震学报
NORTHWESTERN SEISMOLOGICAL JOURNAL
Vol. 28 No. 3
Sept., 2006

瞬态弹性波散射的变换域积分方程法

时 刚，高广运

（同济大学地下建筑与工程系，上海 200092）

摘 要：针对瞬态弹性波散射的问题，从弹性动力学问题的积分表示定理出发，采用 Laplace 变换的方法，得到了变换域内均质体位移场的积分方程表示；在此基础上推导了适合瞬态弹性波对异质体散射求解的变换域位移场积分方程。

关键词：瞬态弹性波；散射；异质体；积分方程法

中图分类号：O347.4　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-0844(2006)03-0225-04

Integral Equation in Transformed Field for Instantaneous Elastic Wave Scattering

SHI Gang, GAO Guang-yun

(*Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai* 200092, *China*)

Abstract: In this paper, according to the integral representation theorem of elastdynamics, an integral equation in transformed filed that represents the displacement field in homogeneous body has been deduced by using Laplace transform. Furthermore, an integral equation in transformed filed, which suited to calculate the instantaneous elastic wave scattering by a number of irregular scatterers embedded in an elastic body is derived.

Key words: Elastic wave; Scattering; Irregular obstacle; Integral equation

0 引言

研究弹性介质中异质体对弹性波的散射问题具有重要的实际意义。对于球、圆柱等简单性状，前人主要运用波函数展开的方法进行分析；对于多个形状复杂的异质体，多采用匹配渐进展开法、T矩阵法、射线理论和广义射线理论及有限元、边界元等理论，将散射问题的研究逐步深入，并取得了一定的成就[1]。20世纪70年代中期，Gubernatis [2]等演绎出一个弹性介质中内含单个任意形状夹杂物时弹性波散射场的体积分方程；在此基础上钟伟芳等运用多个步函数推导出有限多个散射体的位移积分方程，并应用Born近似法对积分方程求解[3-5]；高广运和邱畅等采用积分方程法首次求解了三维均质体中连续屏障（单个异质体）和非连续屏障（多个异质体）对R波散射[6-7]。上述散射求解都是针对稳态波动的情况，对于瞬态弹性波，由于无法将时间变量从方程中分离，传统的积分方程法很难适用；此外许多波动问题很难获得时域的GREEN函数，从而限制了积分方程法的应用范围。

本文针对瞬态弹性波的散射问题，对钟伟芳等[1,3-5]得到的稳态弹性波散射的位移积分方程法进行推广，在弹性动力学积分表示定理的基础上[1]，通过对波动控制方程和积分表示定理方程分别进行Laplace变换，推导了适用于Laplace变换域中的积分方程法，为求解该类问题提供了新的思路。

1 变换域内均质体位移场的积分方程表示

考虑如下两种具有初始静止条件的弹性动力学状态：状态1：$u_i(X,t)$、$\sigma_{ij}(X,t)$、$f_i(X,t)$、ρ、c_{ijkl}；状

收稿日期：2006-04-17
基金项目：高等学校博士学科点专项科研基金（20050247030）
作者简介：时 刚（1978—），男（汉族），山东日照人，在读博士研究生，主要从事土动力学、环境岩土方面研究。

态 2：$G_{ik}(X,t;X',0)$、$c_{ijmn}G_{mk,n}(X,t;X',0)$、$\delta_{ik}\delta(X-X')\delta(t)$、$\rho$、$c_{ijkl}$

式中 u_i 为位移；σ_{ij} 为应力张量；f_i 为体力；ρ 为密度；c_{ijkl} 为弹性常数，是一个四阶张量；δ_{ik} 为克罗内克指标；δ 为 Dirac 函数；G_{ik} 为 Green 函数，下标满足求和约定。状态 1 和状态 2 分别满足如下波动方程：

$$[c_{ijkl}u_{k,l}(X,t)]_{,j}+\rho f_i(X,t)=\rho\ddot{u}_i(X,t) \tag{1}$$

$$[c_{ijmn}G_{mk,n}(X,t;X',0)]_{,j}+\delta_{ik}\delta(X-X')\delta(t)=\rho\ddot{G}_{ik}(X,t;X',0) \tag{2}$$

根据动力 Betti 互易定理，可以得到弹性动力学积分表示定理[1]：

$$\begin{aligned}u_k(X,t)=&\rho\int_V f_i(X',t)*G_{ik}(X',t;X,0)\mathrm{d}V_{X'}+\int_S\{\sigma_{ij}(X',t)n_j*G_{ik}(X',t;X,0)-\\&n_jc_{ijmn}G_{mk,n}(X',p,X,0)*u_i(X,t)\}\mathrm{d}S_{X'}\end{aligned} \tag{3}$$

式(3)对时间 t 进行 Laplace 变换，并记 $l[f(X,t)]=\bar{f}(X,q)$，可得

$$\begin{aligned}\bar{u}_k(X,p)=&\rho\int_V\bar{f}_i(X',p)\bar{G}_{ik}(X',p,X,0)\mathrm{d}V_{X'}+\int_S\{\bar{\sigma}_{ij}(X',p)\bar{G}_{ik}(X',p,X,0)-\\&c_{ijmn}\bar{G}_{mk,n}(X',q;X,0)\bar{u}_i(X,q)\}n_j\mathrm{d}S_{X'}\end{aligned} \tag{4}$$

记上式右边第二项面积分为 $\bar{u}_m^0(X,p)$，有

$$\bar{u}_k^0(X,p)=\bar{u}_k(X,p)-\rho\int_V\bar{f}_i(X',p)\bar{G}_{ik}(X',p,X,0)\mathrm{d}V_{X'} \tag{5}$$

为书写方便，以后推导中将式中的 p 省略，即 $\bar{u}_m^0(X,p)=\bar{u}_m^0(X)$。

式(1)对时间 t 进行 Laplace 变换，有

$$[c_{ijkl}\bar{u}_{k,l}(X)]_{,j}+\rho\bar{f}_i(X)=\rho[p^2\bar{u}_i(X)-pu_i(X,0)-\dot{u}_i(X,0)] \tag{6}$$

由于是初始静止条件的弹性动力学状态，式中 $u_i(X,0)$、$\dot{u}_i(X,0)$ 都为 0，即无初始位移和初始速度，可得

$$[c_{ijkl}\bar{u}_{k,l}(X)]_{,j}+\rho\bar{f}_i(X)=\rho p^2\bar{u}_i(X) \tag{7}$$

同理，对式(2)进行 Laplace 变换可得

$$[c_{ijmn}\bar{G}_{mk,n}(X,X')]_{,j}+\delta_{ik}\delta(X-X')=\rho p^2\bar{G}_{ik}(X,X') \tag{8}$$

考察如下形式：

$$\begin{aligned}c_{ijkl}\bar{u}_{k,lj}^0(X)-\rho p^2\bar{u}_i^0(X)&=c_{ijkl}[\bar{u}_k(X)-\rho\int_V\bar{f}_p(X')\bar{G}_{pk}(X',X)\mathrm{d}V_{X'}]_{,lj}-\rho p^2[\bar{u}_i(X)-\rho\int_V\bar{f}_p(X')\bar{G}_{pi}(X',X)\mathrm{d}V_{X'}]\\&=c_{ijkl}\bar{u}_{k,lj}(X)-\rho p^2\bar{u}_i(X)-\int_V\rho\bar{f}_p(X')[c_{ijkl}\bar{G}_{pk,lj}(X',X)-\rho p^2\bar{G}_{pi}(X',X)\mathrm{d}V_{X'}\\&=c_{ijkl}\bar{u}_{k,lj}(X)-\rho p^2\bar{u}_i(X)-\int_V\rho\bar{f}_p(X')[c_{ijkl}\bar{G}_{kp,lj}(X,X')-\rho p^2\bar{G}_{ip}(X,X')]\mathrm{d}V_{X'}\xrightarrow{\text{利用式(8)}}\\&=c_{ijkl}\bar{u}_{k,lj}(X)-\rho p^2\bar{u}_i(X)-\int_V\rho\bar{f}_p(X')[-\delta_{ip}\delta(X-X')]\mathrm{d}V_{X'}\\&=c_{ijkl}\bar{u}_{k,lj}(X)-\rho p^2\bar{u}_i(X)+\rho\bar{f}_i(X)\xrightarrow{\text{利用式(7)}}0\end{aligned} \tag{9}$$

即有

$$[c_{ijkl}\bar{u}_{k,l}^0(X)]_{,j}-\rho p^2\bar{u}_i^0(X)=0 \tag{10}$$

在上述推导过程中，利用了在变换域基本解的倒易 $\bar{G}_{pk}(X',X)=\bar{G}_{kp}(X,X')$。对比式(7)和式(10)，上述推导结果表明，在 Laplace 变换域内，对于仅和表面弹性场有关的面积分 $\bar{u}_k^0(X)$，满足体力为 0 的运动方程，即满足入射波的运动方程，这个结论和稳态波时域推导结论是一致的，但本文推导是在弹性动力学的积分表示定理的基础上进行的。

根据上述分析，可以把 $\bar{u}_k^0(X)$ 作为入射波考虑 $\bar{u}_k^{(i)}(X)$，有

$$\bar{u}_k(X,p)=\bar{u}_k^{(i)}(X,p)+\rho\int_V\bar{f}_i(X',p)\bar{G}_{ik}(X',p,X,0)\mathrm{d}V_{X'} \tag{11}$$

式(11)即为 Laplace 变换域内均质体位移场的积分表示。

2 弹性体内含有多个异质体时的变换域积分方程

假定在均质弹性区域 V 内含有 N 个异质体，其所占子域分别用 $V_1,V_2,\cdots,V_N$ 表示；这些子域分别由其

表面 $S_1, S_2, \cdots, S_N$ 界定；对应的弹性常数和密度分别为 $c^1_{ijkl}, c^2_{ijkl}, \cdots, c^N_{ijkl}$ 和 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_N$；异质体以外的弹性区域其弹性常数和密度为 c_{ijkl}、ρ。引入 N 个三维 Heaviside 函数 $H_1, H_2, \cdots, H_N$，有

$$H_\alpha(X) = \begin{cases} 1 & \text{当 } X \in V_\alpha \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } X \notin V_\alpha \text{ 时} \end{cases} \tag{12}$$

式中 $\alpha = 1, 2, \cdots, N$。

对于整个弹性区域而言，其弹性常数和密度可以统一写成如下形式：

$$c_{ijkl}(X) = c_{ijkl} + \sum_{\alpha=1}^{N} \Delta c^\alpha_{ijkl} H_\alpha(X) \tag{13}$$

$$\rho(X) = \rho + \sum_{\alpha=1}^{N} \Delta\rho_\alpha H_\alpha(X) \tag{14}$$

式中 $\Delta c^\alpha_{ijkl} = c^\alpha_{ijkl} - c_{ijkl}$；$\Delta\rho_\alpha = \rho_\alpha - \rho$。

不考虑体力作用时瞬态弹性波的控制方程为

$$[c_{ijkl}(X) u_{k,l}(X,t)]_{,j} - \rho(X) \ddot{u}_i(X,t) = 0 \tag{15}$$

上式对时间 t 进行 Laplace 变换可得

$$[c_{ijkl}(X) \bar{u}_{k,l}(X,p)]_{,j} - \rho(X)[p^2 \bar{u}_i(X,p) - p u_i(X,0) - \dot{u}_i(X,0)] = 0 \tag{16}$$

对于弹性波遇异质体散射的问题，属于波的传播问题。此外，我们不考虑瞬态弹性波如何产生的问题，即在瞬态弹性波在异质体表面产生散射之前，含异质体的整个弹性区域处于静止状态，此后散射波和入射波相互叠加，构成了弹性区域内的总波场。基于上述假定，式(16)中的 $u_i(X,0)$、$\dot{u}_i(X,0)$ 为 0。将式(13)和式(14)代入式(16)，可得

$$c_{ijkl}\bar{u}_{k,lj}(X) - \rho p^2 \bar{u}_i(X) + \sum_{\alpha=1}^{N}(\Delta c^\alpha_{ijkl} H_\alpha \bar{u}_{k,lj}(X) + \Delta c^\alpha_{ijkl} H_{\alpha,j} \bar{u}_{k,l}(X) - \Delta\rho p^2 H_\alpha \bar{u}_i(X)) = 0 \tag{17}$$

对比式(7)和式(17)可知，由于式(7)表示一个体力为 $\bar{f}_i(X)$ 的波动方程，而式(17)为一个无体力的波动方程。两式相比较可知式(17)中的 $\sum_{\alpha=1}^{N}(\Delta c^\alpha_{ijkl} H_\alpha \bar{u}_{k,lj}(X) + \Delta c^\alpha_{ijkl} H_{\alpha,j} \bar{u}_{k,l}(X) - \Delta\rho p^2 H_\alpha \bar{u}_i(X))$ 这一项可视为一个等效的体力项，它是由于异质体和弹性基体的弹性常数和密度的差异所产生的。将该等效体力项代入式(11)，可得

$$\bar{u}_k(X,p) = \bar{u}^{(i)}_k(X,p) + \int_V \sum_{\alpha=1}^{N}(\Delta c^\alpha_{ijml} H_\alpha \bar{u}_{m,l'j'}(X') + \Delta c^\alpha_{ijml} H_{\alpha,j'} \bar{u}_{m,l'}(X') - \Delta\rho p^2 H_\alpha \bar{u}_i(X')) \bar{G}_{ik}(X',X) \mathrm{d}V_{X'} \tag{18}$$

式中下标 j'，l' 表示对坐标 X'_j 和 X'_l 的微分，由坐标转换关系可得

$$\bar{u}_{m,j'}(X') = \frac{\partial \bar{u}_m(X)}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial X'_j} = \bar{u}_{m,i}(X) \frac{\partial X_i}{\partial X'_j} \tag{19}$$

因此，式(18)中 j' 和 j，l' 和 l 仍然满足求和约定。

考察上式右端积分中的各项，并利用 Heaviside 函数的性质，有

$$\left.\begin{aligned} &\int_V \sum_{\alpha=1}^{N}(\Delta\rho p^2 H_\alpha \bar{u}_i(X') \bar{G}_{ik}(X',X) \mathrm{d}V_{X'} = \sum_{\alpha=1}^{N} \Delta\rho p^2 \int_{V_\alpha} \bar{G}_{ki}(X,X') \bar{u}_i(X') \mathrm{d}V_{X'} && \text{(a)} \\ &\int_V \sum_{\alpha=1}^{N}(\Delta c^\alpha_{ijml} H_\alpha \bar{u}_{m,l',j'}(X') \bar{G}_{ik}(X',X) \mathrm{d}V_{X'} = \sum_{\alpha=1}^{N} \Delta c^\alpha_{ijml} \int_{V_\alpha} \bar{G}_{ik}(X',X) \bar{u}_{m,l',j'}(X') \mathrm{d}V_{X'} && \text{(b)} \\ &\int_V \sum_{\alpha=1}^{N}(\Delta c^\alpha_{ijml} H_{\alpha,j} \bar{u}_{m,l'}(X') \bar{G}_{ik}(X',X) \mathrm{d}V_{X'} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \Delta c^\alpha_{ijml} \oint_{S_\alpha} \bar{G}_{ik}(X',X) \bar{u}_{m,l'}(X') n_j \mathrm{d}S_{X'} && \text{(c)} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

注意到

$$\bar{G}_{ik}(X',X) \bar{u}_{m,lj}(X') = (\bar{G}_{ik}(X',X) \bar{u}_{m,l}(X'))_{,j} - \bar{G}_{ik,j}(X',X) \bar{u}_{m,l}(X') \tag{21}$$

将式(21)代入式(20(b))，可得

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \Delta c^\alpha_{ijml} \int_{V_\alpha} \bar{G}_{ik}(X',X) \bar{u}_{m,l'j'}(X') \mathrm{d}V_{X'} = \sum_{\alpha=1}^{N} \Delta c^\alpha_{ijml} \oint_{V_\alpha} \bar{G}_{ik}(X',X) \bar{u}_{m,l'}(X') n_j \mathrm{d}S_{X'} -$$

$$\sum_{a=1}^{N}\Delta c^{a}_{ijml}\int_{V_a}\bar{G}_{ik,j'}(X',X)\bar{u}_{m,l'}(X')\mathrm{d}V_{X'} \tag{22}$$

将式(20(a)、(b)、(c))和式(22)代入式(18),整理后可得

$$\bar{u}_k(X)=\bar{u}_k^{(i)}(X)+\sum_{a=1}^{N}\Delta\rho p^2\int_{V_a}\bar{G}_{ki}(X,X')\bar{u}_i(X')\mathrm{d}V_{X'}-\sum_{a=1}^{N}\Delta c^{a}_{ijml}\int_{V_a}\bar{G}_{ik,j'}(X',X)\bar{u}_{m,l'}(X')\mathrm{d}V_{X'} \tag{23}$$

根据格林函数的性质,有 $\bar{G}_{ik,j'}(X',X)=-\bar{G}_{ik,j}(X',X)=-\bar{G}_{ki,j}(X,X')$,最终可以得到含多个异质体的弹性区域在 Laplace 变换域位移场的积分方程:

$$\bar{u}_k(X,p)=\bar{u}_k^{(i)}(X,p)+\sum_{a=1}^{N}\Delta\rho p^2\int_{V_a}\bar{G}_{ki}(X,p;X',0)\bar{u}_i(X',p)\mathrm{d}V_{X'}+$$
$$\sum_{a=1}^{N}\Delta c^{a}_{ijml}\int_{V_a}\bar{G}_{ki,j}(X,p;X',0)\bar{u}_{m,l'}(X',p)\mathrm{d}V_{X'} \tag{24}$$

3 结论

对瞬态弹性波的散射问题,由于难以将时间从变量中分离出来,使得在稳态波动条件下推导的弹性波散射的积分方程难以运用。本文从弹性动力学的积分表示定理出发,在 Laplace 变换域内得到了一个和稳态问题在时间域内一个相似的位移场积分方程。相比钟伟芳的多个步函数方法,本文的推导方法不需要进行坐标的来回替换,简化了推导过程,推导的变换域位移场积分方程适合于求解瞬态波散射问题。根据推导的变换域位移场积分方程,结合问题的 Laplace 域内的 Green 函数,采用 Born 近似的方法,我们就可以求出散射远场任意一点在变换域内的位移,然后通过数值 Laplace 逆变换来得到相应的时域散射远场各点的位移。

[参考文献]

[1] 钟伟芳,聂国华. 弹性波的散射理论[M]. 武汉:华中理工大学出版社,1997.

[2] Gubernatis J E, Domang E, Krumhansl J A. Formal aspect of the theory of the scattering of ultrasound by flaws in elastic materials [J]. Journal applied physics, 1977, **48**(7): 2804—2811.

[3] 钟伟芳. 异质体弹性动力学问题的积分方程法和散射场[J]. 华中工学院学报,1987,**15**(3): 35—40.

[4] 钟伟芳,聂国华. 含有两个异质体时弹性动力学问题在 Born 近似下的散射场[J]. 华中工学院学报,1987,**15**(3):41 - 46.

[5] 钟伟芳,聂国华. An integral equation of the scattering problem by many in—homogeneities and the scattered effect[J]. Appl. Mech., IAP Pergamon Press, 1989, **2**: 1003—1008.

[6] 邱畅. 连续屏障和非连续屏障远场被动隔振三维分析[D]. 同济大学,2003.

[7] 高广运,李志毅,邱畅. 弹性半空间不规则异质体引起的瑞利波散射[J]. 岩土工程学报,2005,**27**(4):378—382.

[8] 冯文杰,邹振祝,薛德庆. 二维弹性波散射时域 Born 近似[J]. 工程力学, 1999, **16**(5):17—20.

(上接 224 页)

[参考文献]

[1] Wang Qi, Zhang Peizhen, Freymueller J T, et al. Present—day crustal movement and tectonic deformation in China continent[J]. Science in China (Series D), 2002, **45**(10):865—874.

[2] 王敏,张祖胜,许明元,等. 2000 国家 GPS 大地控制网的数据处理和精度评估[J]. 地球物理学报,2005,**48**(4):817—823.

[3] Jiang Weiping, Chen Junyong, Liu Jingnan, et al. Data Analysis and Final Solution for the APRGP97 GPS Campaign[A], PCGIAP Working Group 1 — Regional Geodetic Network Workshop[R]. Canberra 2—4,1998: 50—60.

[4] 顾国华,申旭辉,王敏,等. 中国大陆现今地壳水平运动基本特征[J]. 地震学报,2001,**23**(4):362—369.

[5] King R W, Bock Y. Documentation for the GAMIT GPS Analysis Software (Ver 10. 0)[R], Massachusetts Institute of Technology, 2002.

[6] Herring T A. GLOBK: Global Kalman filter VLBI and GPS analysis program (Ver 10. 0)[R], Massachusetts Institute of Technology, 2002.

[7] D Dong, Y Bock. Global Positioning System Network Analysis With Phase Ambiguity Resolution Applied to Crustal Deformation Studies in California[J], Journal of Geophysical Research, 1989, **94**(B4):3 949—3 966.