

关于《毕奥理论中3个基本参数显式解》 一文的错误

丁伯阳 吴建华

(中国地震局兰州地震研究所, 兰州 730000)

摘要 1997年第4期《西北地震学报》发表题为《毕奥理论中3个基本参数显式解》一文, 文中在概念和公式推导中都有不妥与错误之处. 在此提出看法, 疑义相与析.

主题词 毕奥理论 基本参数 显式解 错误

中国图书分类号 O34; O35; TB12

1 Boit 理论的简述

1956年 Biot 给出文《Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media》前, 对两相介质的弹性本构关系实际上是如下叙述的

$$\begin{cases} \sigma_x = 2\mu\epsilon_x + \lambda e + Q\epsilon \\ \sigma_y = 2\mu\epsilon_y + \lambda e + Q\epsilon \\ \sigma_z = 2\mu\epsilon_z + \lambda e + Q\epsilon \\ \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz} \\ \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx} \end{cases} \quad (1)$$

$$\sigma_f = Qe + R\epsilon \quad (2)$$

这里 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ 和 τ_{zx} 是固体物质上的应力张量在 x, y, z 轴方向上的6个独立分量; $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 是固体物质的正应变张量(严格地说, γ_{ij} 是工程剪应变, $\gamma_{ij} = 2e_{ij}$, e_{ij} 是张量应变分量); e 是固体物质的体应变; ϵ 是流体物质的体应变

$$\epsilon = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \quad (3)$$

U_x, U_y, U_z 是孔隙中流体物质的位移分量. 显然 ϵ 是孔隙中流体物质位移矢量 $U(U_x, U_y, U_z)$ 的散度, 它等价于

$$\epsilon = \text{div } U \quad (4)$$

其张量形式是

$$\epsilon = U_{i,i} \quad (5)$$

同样

$$e = \text{div } u \quad (6)$$

收稿日期: 1998-03-11

第一作者简介: 丁伯阳, 男, 1949年8月生, 研究员, 主要从事波动理论与地震工程研究.

张量形式是

$$e = u_{i,i} \quad (7)$$

(2)式的 σ_f 是介质中流体平均压力.

同单纯各向同性固体弹性理论不同的是,毕奥引入了 R 和 Q 两个参数,这两个参数的物理意义可以从(2)式看出.因为当 $e=0$,也就是当两相介质中如果固相的体积不变,则

$$\sigma_f = R\epsilon \quad (8)$$

实际上表示了在保持总体积不变时把一个附加体积的流体物质压入孔隙中所需的压力,如果我们规定压力是正值, R 是一个正值量.另外,如果再在(2)式中令 $\sigma_f=0$,也就是流体的平均压力等于0,这时

$$\epsilon = -\frac{Q}{R}e \quad (9)$$

(9)式指明了 Q 在这里联系了固体物质和流体物质体积的变化.因此, Q 是固体物质与流相物质变化之间的耦合系数,由于作用于固体物质上的压力必然有使固体孔隙减少的趋势.因此, ϵ 和 e 符号必然相反,因此 Q 和 R 一样是正值.当然,这是针对 $\sigma_f=0$ 的情况而言的.一般地讲, Q 与 R 是相互独立的物质参数.

Biot 公式的张量形式为

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}(\lambda e + Q\epsilon) \quad (10)$$

$$\sigma_f = Qe + R\epsilon \quad (11)$$

这里的 Q 和 R 即《毕奥理论中3个基本参数显式解》(以下简称《三参数》)一文中系数 C_{ef} 和 C_f , 这里没有用 C_{ef} 和 C_f 是因为《三参数》一文符号混乱(C_f 在《三参数》公式(9)中又变为流体压缩系数).Biot 的工作是非常精湛的,但也要指出的是系数 R, Q 虽然有明确的物理含义,但它的测定是一项很困难的工作.因此 Biot 理论在实际应用中受到很大限制.

2 Geertsma 的开拓

为了开拓 Biot 理论在地球物理研究中的用途,1961 年 Geertsma 和 Smith 在《Some Aspects of Elastic Wave Propagation in Porous Media》一文中对毕奥公式作了些改进,推导过程如下.

因为如果采用固体与流体之间的相对变形 ξ ,即流动坐标来代替流体的变形 ϵ ,要比原来用流体变形来描述两相介质波传播更适合一些,这样可定义

$$\xi = \varphi(\epsilon - e) \quad \epsilon = e - \frac{\xi}{\varphi} \quad (12)$$

这里 φ 为孔隙度.因此, Biot 方程(1)就改为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu \epsilon_x + \lambda e + Q(e - \frac{\xi}{\varphi}) \\ &= 2\mu \epsilon_x + (\lambda + Q)e - \frac{Q}{\varphi}\xi \\ \sigma_y &= 2\mu \epsilon_y + (\lambda + Q)e - \frac{Q}{\varphi}\xi \\ \sigma_z &= 2\mu \epsilon_z + (\lambda + Q)e - \frac{Q}{\varphi}\xi \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\sigma_f = Qe + R(e - \frac{\xi}{\varphi}) = (Q + R)e - \frac{R}{\varphi}\xi \quad (14)$$

我们前面说过 σ_f 是压力,那么它的流体内压强形式应该是

$$-p = \frac{\sigma_f}{\varphi} = \frac{Q+R}{\varphi}e - \frac{R}{\varphi^2}\xi \quad (15)$$

Geertsma 把它改写为

$$-p = Ke - L\xi \quad (16)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{Q+R}{\varphi} \\ L &= \frac{R}{\varphi^2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

(13)式的张量形式是

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}((\lambda + Q)e - \frac{Q}{\varphi}\xi) \quad (18)$$

(13)式 Geertsma 没有多用,他看重的是作用在固体骨架剪切面上的法向应力,即总应力. Geertsma 称之为“作用在固体骨架上的‘真’流体静应力”,并把它记为 $\bar{\sigma}$.显然, $\bar{\sigma}$ 是球应力,又称八面体上的法应力.而 p 即是孔隙压,Geertsma 称之为“流体静张力”; $\bar{\sigma}$ 与 p 之差就是土力学中众所周知的有效应力.

事实上从本构关系上看,可以明确得到

$$\bar{\sigma} = (K_s - R)e + R(1 + \frac{Q}{R})E \quad (19)$$

这里 K_s 是两相介质中固体的体应变模量, E 则是固体物质体应变与流体物质体应变之和,即 $E = e + \epsilon$,而 $R(1 + \frac{Q}{R})E = RE + R\frac{Q}{R}E$,由于 R 的意义已经说明,所以 RE 表示在保持单元体积不变时把一个 E 的流体压入孔隙中的压力.同样由于 Q 的意义已说明, $R\frac{Q}{R}E$ 的意义是固体物质和流体物质总的耦合体积变化所引起的应力变化.代入拉梅系数及 $\xi = \varphi(e - \epsilon)$ 得

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= (\lambda + \frac{2}{3}\mu)e + (Q + R)(2e - \frac{\xi}{\varphi}) \\ &= [(\lambda + 2\mu + 2Q + R) - \frac{4}{3}\mu]e - \frac{Q+R}{\varphi}\xi \\ &= (H - \frac{4}{3}\mu)e - K\xi \end{aligned} \quad (20)$$

Geertsma 用 Biot 符号将 $\lambda + 2\mu + 2Q + R$ 记为 H ,明显可以看出它是一个与体应变有关的物理量,实际上它是一个广义的侧限模量,因此它与纵波速度密切相关,今后还将详细阐述.

对于宏观各向同性均匀多孔介质,若不考虑流体压缩系数影响,则有

$$\left. \begin{aligned} e &= -(C_b - C_s)p + C_b\bar{\sigma} \\ \xi &= -\{C_b - (1 + \varphi)C_s\}p + (C_b - C_s)\bar{\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

如果孔隙中流体压力也计算在内,则有

$$\xi = -\{C_b - (1 + \varphi)C_s + \varphi C_f\}p + (C_b - C_s)\bar{\sigma} \quad (22)$$

(21)和(22)两式的物理意义清晰可见,此处不再赘述.这里 C_f 是流体物质的压缩系数; C_b 是骨架的压缩系数; C_s 是固体物质的压缩系数.这里特别要提到 C_b , C_b 在拙著《土层波速与地表脉动》第四章第三节中曾定义为两相介质压缩系数,其英文含义为“bulk compressibility”,事实上到目前为止国内对此一直都没有用确切的专业名词定义它,有的译为

“块体压缩系数”,有的译为“体积压缩系数”,有的译为“松散体压缩系数”.但如果把两相介质压缩系数内涵理解为“两相介质中骨架的压缩系数,两相介质中流体的压缩系数,两相介质中固体的压缩系数”的总称的话,“bulk compressibility”理解为骨架的压缩系数较好.不过要指出这里的骨架压缩系数是固体多孔介质在流体参与影响下的压缩系数,决不是《三参数》作者所理解的两相多孔介质在排除流体之后单纯固体多孔介质的所谓“固体骨架压缩系数”.

1962年 Biot 在其文章《Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media》中把 τ_{ij} 定义为“bulk material”的总应力分量,这里“bulk material”也是这个意思.同时 Biot 给出了总应力公式

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_{ij}\sigma_f \quad (23)$$

后来他又写成

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}(\lambda_e - \alpha M \xi) \quad (24)$$

$$p = -\alpha M e + M \xi \quad (25)$$

这里, $\lambda_c = \lambda + \alpha^2 M$, 代入后可得

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ij} &= 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}((\lambda + \alpha^2 M)e - \alpha M \xi) \\ p &= -\alpha M e + M \xi \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

这就是《三参数》一文中应用的公式(7),不过在应用后,文章作者却认为“很遗憾, Biot 一直没有将 α , M 用明确的物理或土力学概念来表示,其物理含义不清.”事实上这里 α 和 M 的含义都是及其明确的.

因为从(24)和(15)两式可知

$$\left. \begin{aligned} M &= L = \frac{R}{\varphi^2} \\ \alpha M &= K = \frac{Q + R}{\varphi} \\ \alpha &= \frac{Q + R}{\varphi} \cdot \left(\frac{\varphi^2}{R}\right) = \left(\frac{Q}{R} + 1\right)\varphi \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

因此 M 的物理意义是在保持总体积不变时把一个相当于 $\frac{1}{\varphi^2}$ 的流体压入孔隙中的压力;而 α 是固体物质和流体物质耦合体积变化的 $\frac{1}{\varphi}$. 这里引用的有关 φ 的参数是物理概念量化的一致性和归一化,以便在各种孔隙度时对同样的固体物质和流体物质会有统一的参数. Biot 早期的论文都已论述到这一些,并且还在这些论文中把(1)式写成如下形式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ii} &= 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}(\lambda e + M(\alpha - \varphi)^2 e + \varphi M(\alpha - \varphi)\epsilon) \\ \sigma_f &= (\alpha - \varphi)\varphi M e + M\varphi^2 \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

这就是《三参数》一文的公式(8).它不是《三参数》作者的推导而是应用,并且在应用中显然是将 σ_{ii} 的含义理解错了. σ_{ii} 是作用于固体物质上的应力,即相当于土力学中的有效应力.

3 《三参数》一文的推导错误

至于总应力关于 $(\alpha - \varphi)$ 的表达式 Biot 未给出,《三参数》的作者也未求得,它实际的表达式是

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ij} &= 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}((\lambda + \alpha M(\alpha - \varphi))e + \varphi M \alpha \epsilon) \\ \sigma_f &= (\alpha - \varphi)\varphi M e + M\varphi^2 \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

这是有关总应力的 $(\alpha - \varphi)$ 参量的表达式,它可以用(23)式或(26)式求得.

唐应吾把(29)式写成 $\sigma_{ii} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}[(\lambda + \frac{\alpha - \varphi Q}{\varphi})e + Q\epsilon]$

这里的 σ_{ii} 是 τ_{ii} , 而 $Q^{\text{①}}$ 即是 $M\alpha\varphi$.

关于《三参数》一文(9)式以后的正确推导如下:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} &= \left[\frac{(1-\beta)^2}{(1-\varphi-\beta) + \varphi C_f} + \frac{\beta}{C_s} \right] e - \frac{1-\beta}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} \xi \\ -p &= \frac{1-\beta}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} e - \frac{1}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} \xi \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

式中 $\beta = \frac{C_s}{C_b}$, 前面已述, C_s 为固体物质的压缩系数; C_b 为骨架压缩系数(注:不同于《三参数》作者所理解的), $\frac{1}{C_b} = K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$; C_f 为流体压缩系数. 由 $\xi = \varphi(e - \epsilon)$ 及 $\sigma_f = -\varphi p$ 可得

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} &= \left[\frac{(1-\beta)(1-\beta)}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} + \frac{\beta}{C_s} \right] e - \frac{(1-\beta)\varphi}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} \epsilon \\ \sigma_f &= \frac{(1-\beta-\varphi)\varphi}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} e + \frac{\varphi^2}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

现将对固体骨架施压的应力也视为流体静应力(注意:这里的流体静应力,即 $\bar{\sigma}$ 是 Geertsma 的“真”流体静应力),它就是总应力

$$\left. \begin{aligned} \therefore \bar{\sigma} &= \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda + \alpha M(\alpha - \varphi) \right) e + \varphi M \alpha \epsilon \\ \sigma_f &= (\alpha - \varphi)\varphi M e + M\varphi^2 \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

从(31)和(32)两式的比较中可以得到 α, M 的表达式,由 $\bar{\sigma}$ 的表达式得

$$\frac{(1-\beta)\varphi}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} = \varphi M \alpha$$

由 σ_f 的表达式得

$$\frac{\varphi^2}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f} = \varphi^2 M$$

$$\therefore M = \frac{1}{(1-\varphi-\beta)C_s + \varphi C_f}$$

$$\alpha = 1 - \beta$$

同样,利用上述 $\bar{\sigma}$ 的表达式,可得

$$\frac{(1-\beta-\varphi)(1-\beta)}{(1-\beta-\varphi)C_s + \varphi C_f} + \frac{1}{C_b} = \frac{2}{3}\mu + \lambda + \alpha M(\alpha - \varphi)$$

当流体不可压缩并且孔隙连通时, $\frac{1}{C_b} = \frac{2}{3}\mu + \lambda$. 从这里也能看出本处 C_b 与《三参数》一

文作者理解的 C_b 意义不同. 按《三参数》作者理解的 $\frac{1}{C_b}$ 不能等于 $\frac{2}{3}\mu + \lambda$. 因此可得

$$\frac{(1-\beta-\varphi)(1-\beta)}{(1-\beta-\varphi)C_s + \varphi C_f} = \alpha M(\alpha - \varphi)$$

$$\frac{(1-\beta-\varphi)\varphi}{(1-\beta-\varphi)C_s + \varphi C_f} = (\alpha - \varphi)\varphi M$$

① 此处 Q 为唐文定义的 Q , 而不是公式(1)中的 Q

比较和观察后马上可得

$$\alpha = 1 - \beta$$

$$M = \frac{1}{(1 - \beta - \varphi)C_s + \varphi C_f}$$

绝对不会象《三参数》一文那样,在一个两相系统介质中一会儿

$$M = \frac{1}{(1 - \beta - \varphi)C_s + \varphi C_f}$$

一会儿

$$M = \frac{1}{(1 - \beta - \varphi)C_s + \varphi C_f} \left(1 - \frac{\varphi}{1 - \beta}\right)$$

4 小结

事实上要使《三参数》文中上述矛盾的推导成立,只有 $\varphi = 0$,即没有空隙.只有在 $\varphi = 0$ 时,不用考虑流体的作用, σ_{ii} 等于 τ_{ii} . 既然如此还有什么必要讨论两相介质呢?

《三参数》的作者在最后的推导中已经发现了上述矛盾的结果,但由于没有细读 Biot 和 Geertsma 一大堆符号的物理意义,各个概念也欠推敲,遗憾的是没有找到“ α, M 的解并不是唯一”的结论错误原因(地震科学联合基金会资助课题最终成果报告:高含水土体骨架弹性参数测试与分析).事实上无论从(31)和(32)式的等价中,或者从 Geertsma 的表达式

$$H = \frac{(1 - \beta)^2}{(1 - \varphi - \beta)C_s + \varphi C_f} + \lambda + 2\mu = \lambda_c + 2\mu$$

$$K = \frac{1 - \beta}{(1 - \varphi - \beta)C_s + \varphi C_f}$$

$$L = \frac{1}{(1 - \varphi - \beta)C_s + \varphi C_f}$$

中都可以简单地得到 α, M 的孔隙系统表达式.为了便于大家引证和融会贯通上述关系,作者再将过去总结得到的这一关系提供于下.抑或有助于对该问题的正误

$$H = M\alpha^2 + \lambda + 2\mu = \lambda_c + 2\mu$$

$$M = \frac{1}{(1 - \beta - \varphi)C_s + \varphi C_f}$$

$$K = M\alpha$$

$$L = M$$

λ_c 定义见 Biot 定义.

余有志于两相介质在土力学中应用久矣,每仰门福禄和吴世民两氏高作,亦常苦技拙而才疏,近来身心每况愈下,此情更激,但治学之道必循砥励切磋之途,谨以此文相析,并冀引玉.

ON MISTAKES ABOUT 'MANIFEST EXPRESSIONS OF THREE BASIC PARAMETERS IN BIOT THEORY'

Ding Boyang Wu Jianhua

(Lanzhou Institute of Seismology, CSB, Lanzhou 730000)

Key words Biot theory, Basic parameter, Manifest expression, Mistake