

Rundle 模式地震的分叉结构及其爆发判据

李丁一

(华东船舶工业学院物理系, 镇江 212003)

摘要 给出了 Rundle 模式地震所满足的非线性微分方程. 经过变换该方程变成标准 Weierstrass 方程. 依据我们发现的、并被国际上确认的 Weierstrass 函数分叉结构理论, 分析了该模式地震的三相结构及相变判据, 并给出了强、弱地震自动爆发判据和弱小地震的准周期公式. 本文结果对于地震预报研究有应用或参考价值.

主题词 地震模式 爆发性不稳定性 分叉现象 Rundle 模式 Weierstrass 函数

1 引言

近 50 年来, 人们在地震研究中采用了物理学方法, 取得了若干重要成果, 包括 Gutenberg-Richter 定律和成核模型(即 Rundle 模式). Rundle 认为^[1~4], Gutenberg-Richter 定律反映的是一种临界现象. 而 Burridge-Knopoff 模型只是成核模型的一级近似^[4]. 显然, Rundle 模式是新的、重要的地震物理模型.

非线性现象早在 100 多年前就被人们所认识^[5], 但有关的研究发展很缓慢. 直至第二次世界大战后, 由于材料及电子等科学的巨大发展, 才重新唤起人们研究非线性现象的兴趣. 最近 20 多年来, 现代光学和等离子体物理学的蓬勃发展使许多非线性现象的基本过程得到了广泛而彻底的研究^[6~9]. 爆发性不稳定性是一种特殊的非线性现象^[10~12], 主导着自然界中一系列突变现象^[10]. 爆发性不稳定性中的某一类可用 Weierstrass 函数来描述^[10~12].

正如 Sagdeev 所言^[13], 非线性科学的每一项新发现都会产生广泛的影响, 具有难以估量的应用价值. Weierstrass 函数分叉结构理论及其对等离子体三波非线性相互作用所引起的爆发性不稳定性的应用^[10, 11], 就是一个例子. 由于地震是一种爆发性现象, 因此本文尝试用 Weierstrass 函数分叉结构理论研究 Rundle 模式地震的分叉结构和自动爆发判据, 并提出了需要进一步研究的问题.

2 基本关系

Rundle 使用如下形式的平均场自由能密度来描述地震^[4]

$$f = -p'u + a_0 + a_1u^2 + a_2u^4 \quad (1)$$

其中 u 是弹性介质断层面上平均的张性位错或剪切位错; p' 是外部作用所致的张应力场或剪

切应力场;而 $(a_0' + a_1' u^2 + a_2' u^4)$ 代表断层面能量密度,是位错的对称函数. 其中 a_0' 表示无位错时断层面能量密度初值, a_1' 及 a_2' 值与断层面间的粗糙度和摩擦力强度分布起伏有关. 由文献 [3] 可以证明

$$a_1' = -3 \Delta \tau / 2 \lambda < 0 \tag{2}$$

$$a_2' = 4 \Delta \tau / \lambda^3 > 0 \tag{3}$$

其中 λ 为断层面粗糙(凸凹不平)、起伏分布的特征波长; $\Delta \tau$ 是断层面上摩擦力分布峰谷值的差值. (2)式和(3)式表明断层面能量密度分布的系数由该面某些几何和力学的参数决定^[3]. 自由能是等温过程外界作用所做的功^[4], 因而有方程

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2(-pu + a_0 + a_1 u^2 + a_2 u^4) \tag{4}$$

其中 $p = p'/m$; $a_j = a_j'/m$ ($j = 0, 1, 2$). m 是单位长度的断层面介质的质量, 则 $\frac{1}{2} m \left(\frac{du}{dt}\right)^2$ 是其动能. 经初等变换^[15, 11]

$$u = \alpha + \frac{h'(\alpha)}{4[y - h''(\alpha)/24]} \tag{5}$$

方程(4)可变成标准的 Weierstrass 方程, 即

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3 \tag{6}$$

其中 g_2 和 g_3 是方程(6)的两个相对不变量^[10, 15], 可分别表示为^[11]

$$g_2 = \frac{1}{3}(a_1^2 + 12a_0 a_2) \tag{7}$$

$$g_3 = \frac{1}{216} \begin{vmatrix} 12a_0 & -3p & 2a_1 \\ -3p & 2a_1 & 0 \\ 2a_1 & 0 & 12a_2 \end{vmatrix} \tag{8}$$

(5)式中的 α 是 $h(u) \equiv 2(a_0 + a_1 u^2 + a_2 u^4 - pu) = 0$ 的一个根. (5)~(8)式是研究 Rundle 模式地震所用的基本方程组. (5)式和(6)式表明, 地震时位错可以用 Weierstrass 函数来描述.

3 Rundle 模式地震的三相结构及相变判据

由(5)~(8)式, 依据 Weierstrass 函数的分叉特性^[10, 11], 可以列出 Rundle 模式地震的分叉结构的主要性质如下:

(1) $J \equiv g_2^3 / g_3^2$ 是方程(6)的绝对不变量^[10, 15]. 用 J 来表征的新 Weierstrass 函数

$Y(t', J, J) \equiv \frac{g_2}{g_3} Y(t, g_2, g_3)$, 它能决定原来函数 $Y(t, g_2, g_3)$ 的主要特性^[10], 其中

$$t' = \sqrt{\frac{g_3}{g_2}} t.$$

(2) $J=27$ 是 Weierstrass 函数的分歧点, 围绕它存在三个相: 稳定相、受激爆发相和自动爆发相.

(3) 当 $J>27$ 时, Rundle 模式地震通常处于稳定态. 如果有相当高的外部激发能 E_{ex} , 即系统(6)的动能至少增加

$$E_{ex} \geq \frac{1}{2} |g_3| \left[\sqrt{\frac{J}{27}} + \text{sign}(g_3) \right] \tag{9}$$

稳定态可跃变为受激爆发相. 至于变换前的系统(4)所需的受激爆发阈值(能量), 可由(9)式和(5)式算得.

(4) $J < 27$ 时, 为自动爆发相, 无需任何外部激发能. 系统由稳定相变为爆发相的最有效途径是通过系统参数 p 和 $a_j (j = 0, 1, 2)$ 的演变使 $J < 27^{[11]}$. 这是 Rundle 模式地震发生的最主要方式.

(5) $J = 27$ 时, 两个本来不同的爆发相发生简并^[10, 11]. 这时稳定相向爆发相转变是一级相变(当 $g_3 > 0$) 或二级相变(当 $g_3 < 0$).

(5) 式表明 Y 或者 u 可能有奇点, 将破坏 Weierstrass 函数变化应有的连续性, 须采用新的研究方法来处理有奇点的情形.

4 Rundle 模式地震的爆发判据

不妨假设无位错时断层面能量密度为零, 即 $a_0 = 0$. 则有

$$h(u) = 2u(a_2u^3 + a_1u - p) \quad (10)$$

由(7)式和(8)式计算得

$$J = 27(1 + \frac{27a_2p^2}{2a_1^3})^{-2} \quad (11)$$

则自动爆发相($J < 27$)的基本判据是

$$p^2 > -\frac{4a_1^3}{27a_2} \quad (12)$$

注意到(2)式和(3)式, (12)式的物理意义很清楚: 外部作用所引起的断层应力场绝对值超过某阈值(临界值), 地震才可能自动爆发. 否则, 系统处于稳定相或受激爆发相(后者必须满足(9)式条件). 而受激爆发情形不是本文研究的重点, 因此将在最后一节做一些定性讨论.

注意到, (12)式正是 $a_2u^3 + a_1u - p = 0$ 取唯一实根的充分必要条件^[16], 也就是 $h(u)$ 由双阱势转化为单阱势的充分必要条件.

图 1 给出了 $p > 0$ 时的双阱势图和单阱势图. 当 $p < 0$ 时, 其双阱势和单阱势图分别是图 1 的相对纵轴的对称反映图形. 上述分析表明, 双阱势对应于稳定相(暂不考虑受激爆发相). 而稳定态总是倾向于势取极小值, 它可以处于 A 点(亚稳态)或 B 点(稳态).

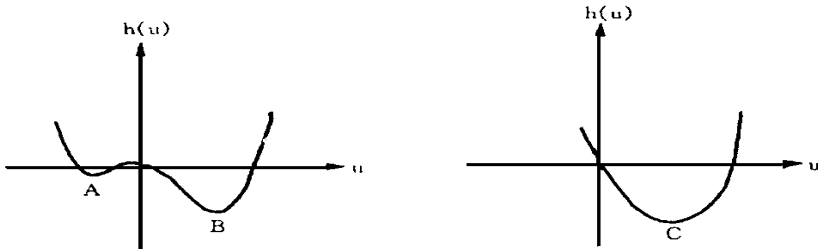


图 1 $p > 0$ 时的双阱势和单阱势

Fig. 1 The double-well potential and the single-well potential as p being positive.

当 $|p|$ 值增加, (12)式被满足时, 双阱势演变为单阱势, 伴随有地震活动发生. 这里涉及到两种不同的地震活动.

(1) 原 $u(0) \approx u_B$, (12)式被满足时, 位错变化 $u_B \rightarrow u_C$, 导致系统在单阱底部的来回准周期振荡(弱地震). 其判据是

$$p \operatorname{sign}[u(0)] > 2 \sqrt{\frac{a_1^3}{27a_2}} = \Delta\tau/2\sqrt{2} \quad (13)$$

而弱震活动周期为^[11] (以 T 表示周期)

$$T^2 = 2\pi^2 \left| \frac{g_2}{g_3} \right| \sqrt{\frac{1 - 240q_m^2 + 2160q_m^4}{3J}} \quad (\text{当 } g_3 > 0) \quad (14)$$

$$\text{或} \quad T^2 = 4(\ln q_m)^2 \left| \frac{g_2}{g_3} \right| \sqrt{\frac{1 - 240q_m^2 + 2160q_m^4}{3J}} \quad (\text{当 } g_3 < 0) \quad (15)$$

其中 J 与 q_m^2 的关系为

$$J = 27(1 - 240q_m^2 + 2160q_m^4)^3 / (1 + 528q_m^2)^2 (1 - 24q_m^2 + 24q_m^4)^2 \quad (16)$$

(2) 原 $u(0) \approx u_A$, 当(12)式被满足时, 位错发生激变, (经过 $u=0$) $u_A \rightarrow u_C$ 导致突发性强地震. 其发生判据是

$$-p \operatorname{sign}[u(0)] > 2 \sqrt{\frac{a_1^3}{27a_2}} = \Delta\tau/2\sqrt{2} \quad (17)$$

另外, 由于 $\alpha=0$ 是(10)式的根, 由(5)式得

$$y = \frac{a_1}{6} - \frac{p}{2u} \quad (18)$$

显然, $u=0$ 是奇点. 当位错经过 $u=0$ 时, Weierstrass 函数的连续性被破坏, 系统能量守恒被破坏, 应导致一次巨大能量释放, 即一次突发性强地震.

5 讨论和结论

用势函数曲线构形及势垒概念分析爆发性不稳定性的杰出代表是 Pfirsch (1990)^[12] 和 Rundle (1989)^[3]. 他们的工作使有关的研究向前跨进了一步. 然而, 正如文献[11]所指出的, 这种在力学上用的传统方法有其固有缺陷: 它不可能发现此类现象中的相结构和相变条件(即相判据), 更不能给出有关的周期公式. 这些是本文以下所作比较分析的基础.

通过地震监测分析, 人们发现 $|p'|$ 较小时, 无地震发生^[3]. 对此, 以前人们只能借助于相变动力学理论的平均寿命公式^[3]来解释, 似乎缺乏说服力. 本文(12)式(自动爆发相判据)或(13)式和(17)式给出了完全定量的、科学的说明: $|p|$ 小于阈值时, 系统处于稳定相.

大规模的人类活动(如核试验等)和地震波连锁激发, 会引发地震, 其科学依据是(9)式. 当然, 真正的能量激发阈值可由(5)式经换算得到. 这些为人工模拟受激地震提供了一定的依据.

(13)式和(17)式是自动爆发相地震的两种不同形态判据. 它们与稳定相判据(即(12)式不成立)三者交替出现, 就构成了下述复杂过程: 弱震系列 $\rightarrow$ 弱震停息(往往停息一段无法计算的长时间) $\rightarrow$ 强地震 $\rightarrow$ 系列性余震 $\rightarrow$ 余震停息 $\rightarrow$ 再次强震 $\dots$ 需要说明, 当弱震(或余震)停息, 标志 $p \operatorname{sign}(u) > 0$ 且小于阈值, 这时要密切监测 p' 是否逐渐变符号. 如果变符号, 预示逐渐趋向(17)式的情况——一次(或下一次)强地震将来临. 所有这些结论也是对 Reid 弹性回跳学说所作的定量的科学的解释, 为地震预报研究提供了若干定量的有规律性的科学依据.

本文(12)式之后分析研究的特点是: 以分叉结构理论的结论为主导, 结合并指导对自由能相图变化的分析, 得到了以上较好的认识和结论. 注意到(18)式及其后分析, 只有采用涉及奇点问题的数理方法, 估算出经奇点时能量释放值, 对强地震规律的认识才较完整. 对此作者将另文研究.

用分叉结构理论研究 Rundle 模式地震,是一种新的尝试,属于物理学与地震科学的交叉领域.在这方面还有很多工作要做,如结合更复杂的断层结构和力学条件进行分析以及与前人工作的衔接、比较等.

在与本文有关的研究中,吴忠良教授提供了重要资料和有益的建议,作者对此表示感谢.同时感谢审稿人提出的重要的修改意见.

参考文献

- 1 Rundle J B. A physical model for earthquakes (I). J Geophys Res, 1988, 93(B6): 6237~6254.
- 2 Rundle J B. A physical model for earthquakes (II). J Geophys Res, 1988, 93(B6): 6255~6274.
- 3 Rundle J B. A physical model for earthquakes (III). J Geophys Res, 1989, 94(B3): 2839~2855.
- 4 吴忠良,地震预报的物理问题.物理,1994,23(7):399~408.
- 5 Poincaré H. New Methods in Celestial Mechanics(Vol. 1). Paris: Gauthier-Villars, 1892.
- 6 Yariv A. Quantum Electronics. New York: Wiley, 1975.
- 7 Davidson R C. Methods in Nonlinear Plasma Theory. New York: Academic, 1972.
- 8 Kaup D J, et al. Space time evolution of nonlinear three-wave interactions (I). Rev Mod Phys 1979, 51(2): 275~309.
- 9 Wang D Y, Li D Y. Nonlinear parametric instability and milisecond solar radio spikes Solar Phys, 1991, 135(2): 393~405.
- 10 李丁一,奚文湘. Weierstrass 函数在分岔点($J=27$)附近的分叉特性.华东船舶工业学院学报,1995,9(3): 21.
- 11 Li D Y, et al. Normal and anomalous explosion mechanisms for nonlinear instabilities in three-wave coupling. J Plasma Phys, 1997, 57(4): 861~873.
- 12 Pfirsch D Z. Nonlinear instabilities, negative energy modes and generalized cherry oscillators. Naturforsch, 1990, A 45(4): 839~846.
- 13 Sagdeev R E. Nonlinear Phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics. Moscow: Mir Publishers, 1986. preface.
- 14 王竹溪.统计物理学导论.北京:人民教育出版社,1956. 75.
- 15 阿希泽尔.椭圆函数论纲要.刘书琴等译.上海:商务印书馆,1956. 24~31.
- 16 王竹溪,郭敦仁.特殊函数概论.北京:科学出版社,1979. 730.

THE BIFURCATION STRUCTURE OF RUNDLE MODE EARTHQUAKE AND ITS EXPLOSION CRITERIA

LI Dingyi

(East China Shipbuilding Institute, Zhenjiang 212003)

Abstract

The nonlinear equation is derived for Rundle mode earthquake and is transformed into the standard Weierstrass equation. On the basis of the bifurcation theory of Weierstrass function we have found, which has been admitted internationally, three phases of the earthquake and the criteria for differentiating them are analysed. And the criteria for the strong earthquake explosion and the occurrence of weak ones are presented respectively. Expressions for the repetition period of weak earthquakes of Rundle mode are given in detail too. This paper is valuable to the earthquake prediction.

Key words Seismic model, Explosive instability, Bifurcation, Rundle model, Weierstrass function