第 18 卷 第 1 期
1996 年 3 月
西 北 地 震 学 报
NORTHWESTERN SEISMOLOGICAL JOURNAL
Vol. 18 No. 1
March 1996

# 地电阻率的分数维结构*

梁子斌 赵和云 蔡红卫
(国家地震局兰州地震研究所,兰州 730000)

**摘要** 利用重建动力学相空间的方法,对唐山地震前后其周围几个台站及山丹地电台 1990 年的地电阻率观测资料进行了关联分维、李雅普诺夫指数及复杂度的计算,结果表明,地电阻率时间序列具有分维结构,在正常情况下,其吸引子维数在2.5左右。由复杂度的计算结果得知,地电阻率变化远比其它已知的标准奇怪吸引子复杂。

**主题词: 地电阻率 分数维 时间序列** 相空间

## 1 前言

在前人利用地电阻率进行地震预报的研究中,我们可以看到,尽管地电阻率所探测的范围非常有限,探测深度一般只有几百米,最大的探测范围也只有几千米。但是许多震例中地电阻率在震前均有不同的异常反应。这就说明了地电阻率的变化的确含有地震活动的前兆信息。地下系统的活动非常复杂,直至目前,人们仍然没有把地电阻率变化的物理机制彻底搞清楚。地电阻率作为非线性地学系统的一个变量,它一定能携带地学系统演化规律的大量信息,运用非线性理论进行研究是较为适宜的。对于混沌系统,其描述方法不外就是分数维、李雅普诺夫指数及熵。但是它们的侧重点不同,分数维侧重于描述在相空间中轨道所形成的结构,并且可以给出描述系统所需的最少变量数目;李雅普诺夫指数则侧重于描述轨道的演化,发散或收缩的速率;熵侧重于描述系统的混乱程度。本文应用非线性动力学重建相空间动力学的方法,对地电阻率变化的时间序列资料进行了研究。

## 2 地电阻率变化的分数维结构

目前,在地震领域中分数维的研究仍然是一个热门课题,在已往的研究中发现与地震过程有关的现象均具有复杂的分数维结构,这似乎已成定论。因此有理由认为,分数维不仅是对地震孕育过程复杂性的几何描述,而且刻划了地下动力学系统中深刻的物理本质,那么关键问题就是能否或如何从前兆观测资料中提取分数维信息。对于时间序列的研究,已经有了一种很好的方法,即采用重建动力学相空间以获得在相空间中相点的运行轨道及其结构信息。在国内的许多文献中,这一方法的原理及其算法都有详细的说明,本文只简单地介绍一下其计算方法。

设一时间序列 $X_i(i=1,2,3,\cdots,N)$,由此序列,按照某种规则可支起一个 K 维的相空间,比如把 $(X_i,X_{i+\tau},\cdots,X_{i+(k-1)\tau})$ 放在相空间中,称为相点,其中 $\tau$ 称为延迟时间,那么在相空间中

* 地震科学联合基金会资助课题。

就有许许多多相点，虽然其占居的空间是K维的，即其欧几里德维数为K维，但相点的分布却不一定是K维的。以某一相点为球心作一半径为r的超球，然后对所有相点统计每一个超球内所包含的相点的个数M，如果M同r有$M\propto r^D$关系时，即说明相点间的分布是D维的。如果在相空间中相点的分布是均匀的，则D=K，有限随机序列即属于此类。关联维的具体计算公式为：

$$C(r)=\frac{1}{N^2}\sum_{\substack{i=1,j=1\\ i\neq j}}^{N}Q(r-|X_i-X_j|) \tag{1}$$

其中Q为Heviside函数，lnC(r)-lnr的斜率即为所求的分数维。

利用这一方法处理时间序列资料是很有效的，但对资料的质量和数量要求是很高的。文献〔1〕中给出了计算关联维所需数据长度的上限和下限分别为$30^d$和$10^d$，我国一些学者的研究中，数据长度远远没有达到要求，甚至连下限也没有达到，结果是不可靠的。在数据质量上也有很高的要求。

如果数据中有某一个数据是不可靠的，或是假的，那么在相空间中就会有2K－1个相点的位置是不可靠的。当不可靠的数据增多时，结果的偏离也就越大。当不可靠的数据增加到一定数量的时候，比如每隔K个数据便有一个数据是假的，那么在K维相空间中的每个相点其位置都是不可靠的，结果便完全失去了统计意义。由此也可以说明，嵌入空间K不要选取太大。K取得越大，这些不可靠数据对结果的影响也就越大。原兰州大学顾雁教授认为K不超过2D+1为好。参照文献〔1〕中给出数据长度的上限和下限的要求，当给定数据长度为N时，其维数最大可能算到logN。当D大于logN时，结果是不可能准确的。因此可以取2logN+1为嵌入空间维数的上限。

对数据的有效位也有一定的要求，以定西地电台1990年EW道时均值资料为例，其中的一段数据为：6.27，6.25，6.26，6.27，6.28，6.26，6.26，6.25，6.26，6.27，6.28，6.26，虽然有效位数是3位，但前面2位6.2均无变化，对计算结果没有影响，有变化的只是第3位，也就是说有效位只有1位，这样无标度区就不会显示出来。因为看不到吸引子的“精细结构”，因此也就考察不出结构的自相似特征。反过来说，如果无标度区宽度较窄，也可能是资料的有效位少。因此我们关心的问题不是无标度区的宽与窄，而是有无标度区。

文中给出了山丹地电台及唐山周围几个地电台观测资料的计算结果及部分lnC (r) -lnr图，参见图1及表1。其中每张图的下面部分为lnC (r) 对lnr的导数图。在图1中对无标度区的判定和识别比较直观，能更清晰地反映无标度区的宽度和范围。在无标度区所对应的r范围内，表现在下面的图中，应存在一个“平台”。“平台”的宽度即为无标度区的宽度，其高度即为分数维的值。

在lnC (r) -lnr图中可以看到，以山丹台1－4月份资料的计算结果为例，无标度区并非很宽，然而可以明显看到在区间(－1.5，－0.5)上存在一“平台”，并且对不同的K值，曲线的饱合性质很好。这个结果是可靠的，其数据长度已接近上限的要求。其无标度区窄是由于受山丹台资料的有效位(2位)的制约。从图1中可以看出分数维值在2.5左右。我们选取资料时尽可能远离地震的时段，唐山周围几个台的资料选取时段均在1970年至1972年左右，也正是为了避开地震活动期，以便找出正常背景下的分数维值。山丹台的分数维值有上升的趋势，可能与1991年1月祁连发生的地震有关。

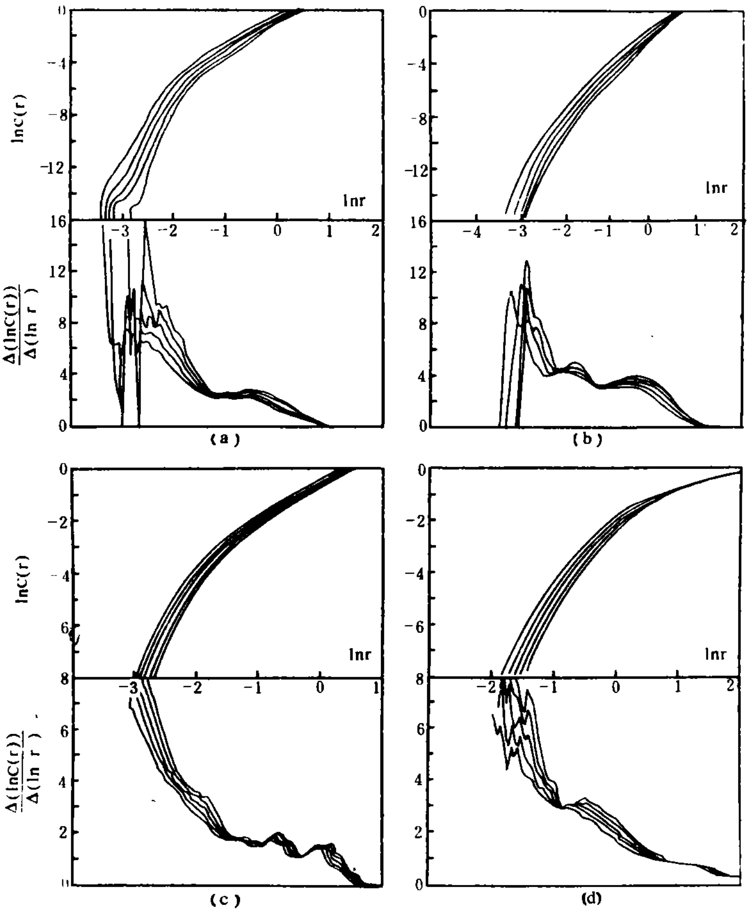


图 1 lnC (r) -lnr 图

(a)山丹台 1—4 月；(b)山丹台 3—6 月；(c)青县台 1976 年—1978 年；(d)忠兴庄 1970 年—1972 年

Fig. 1 The lnC(r)-lnr by fractal calculation.

## 3 地电阻率变化的李雅普诺夫指数

在对某个混沌体系的描述中，除分数维这个特征量以外，还可以用李雅普诺夫指数来描述系统的运动特征，简称为李指数。其意义是描述轨道的平均发散指数速率，用 $\lambda$ 表示。其数学表达式为：

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln\left|\frac{\Delta X_t}{\Delta X_0}\right| \tag{2}$$

其中 $\Delta X_0$ 为最初轨道上两个邻近点之间的距离；$\Delta X_t$ 为经过时间 t 两点演化后的距离。当有 N 个独立方向时，李指数也存在 N 个，由大到小排列：$\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_N$，称为李指数谱。对于混沌系统，至少有一个李指数大于 0。如果是自治(系统与时间无关，或与初始时间的选择无关)，那么至少有一个李指数为 0。分数维同李指数有如下关系

$$D_L = j - \frac{\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i}{\lambda_j} \tag{3}$$

其中$\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i>0$，$\sum_{i=1}^{j}\lambda_i<0$，如 Lorenz 吸引子

$$\begin{cases}\dot{X}=\sigma(Y-X)\\ \dot{Y}=X(R-Z)-Y\\ \dot{Z}=XY-bZ\end{cases}\tag{4}$$

其中 $\sigma=16.0$，$R=45.92$，$b=4.0$，则李指数谱为：$\lambda_1=2.16$；$\lambda_2=0.00$，$\lambda_3=-32.4$，根据(3)式则可求得分数维 $D_L=2.07$。

表1 地电阻率时间序列的分数维、李雅普诺夫指数、复杂度的计算结果

| 台站资料日期 | 数据长度 | 无标度区范围 下限 | 无标度区范围 上限 | 分数维 $D_2$ | 李雅普诺夫指数 $\lambda_1$ | 李雅普诺夫指数 $\lambda_2$ | 李雅普诺夫指数 $\lambda_3$ | 分数维 $D_L$ | 平均复杂度 | 序号 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 山丹 1990 年 1—4 月 | 2880 | −1.4 | −0.3 | 2.6 | 0.84 | 0.25 | −2.66 | 2.41 | 未计算 | 13 |
| 山丹 1990 年 2—5 月 | 2880 | −1.5 | −0.4 | 3.0 | 0.96 | 0.20 | −1.36 | 2.85 | 未计算 | 20 |
| 山丹 1990 年 3—6 月 | 2880 | −1.6 | −0.3 | 3.4 | 0.99 | 0.20 | −1.27 | 2.94 | 未计算 | 23 |
| 山丹 1990 年 4—7 月 | 2880 | −1.8 | −0.4 | 4.0 | 1.02 | 0.32 | −1.18 | 无意义 | 未计算 | 25 |
| 昌黎台 1970 年—72 年 | 1090 | −0.5 | 0.4 | 2.7 | 0.68 | 0.25 | −1.45 | 2.64 | 0.37 | 16 |
| 昌黎台 1973 年—75 年 | 1090 | −0.5 | 0.5 | 3.0 | 0.72 | 0.30 | −2.05 | 2.50 | 0.44 | 21 |
| 昌黎台 1976 年—78 年 | 1090 | −0.4 | 0.5 | 1.5 | 0.63 | 0.20 | −1.90 | 2.44 | 0.20 | 1 |
| 宝坻台 1970 年—72 年 | 1090 | −0.4 | 0.2 | 2.6 | 0.75 | −0.02 | −1.07 | 2.68 | 0.38 | 14 |
| 宝坻台 1973 年—75 年 | 1090 | −0.4 | 0.3 | 3.6 | 0.79 | 0.13 | −1.10 | 2.84 | 0.48 | 24 |
| 宝坻台 1976 年—78 年 | 1090 | −0.4 | 0.3 | 2.7 | 0.72 | −0.30 | −1.56 | 2.65 | 0.49 | 17 |
| 西集台 1971 年—72 年 | 730 | −0.5 | 0.1 | 2.0 | 0.72 | 0.22 | −1.42 | 2.66 | 0.37 | 5 |
| 西集台 1973 年—75 年 | 1090 | −0.6 | 0.1 | 2.9 | 0.83 | −0.01 | −0.97 | 2.75 | 0.42 | 18 |
| 西集台 1976 年—78 年 | 1090 | −0.5 | 0.2 | 2.1 | 0.80 | 0.20 | −0.85 | 无意义 | 0.41 | 6 |
| 张山营 1970 年—72 年 | 1090 | −0.9 | 0.0 | 2.9 | 0.75 | 0.18 | −1.60 | 2.58 | 0.37 | 19 |
| 张山营 1973 年—75 年 | 1090 | −0.9 | 0.1 | 3.0 | 0.77 | 0.23 | −0.54 | 无意义 | 0.32 | 22 |
| 张山营 1976 年—78 年 | 1090 | −0.8 | 0.1 | 2.4 | 0.64 | 0.13 | −0.82 | 2.94 | 0.22 | 10 |
| 忠兴庄 1969 年—72 年 | 1460 | −0.9 | −0.1 | 2.2 | 0.78 | 0.12 | −2.15 | 2.78 | 0.41 | 8 |
| 忠兴庄 1973 年—75 年 | 1090 | −1.0 | −0.3 | 2.6 | 0.81 | 0.23 | −1.56 | 2.67 | 0.47 | 15 |
| 忠兴庄 1976 年—78 年 | 1090 | −0.9 | −0.2 | 1.9 | 0.67 | 0.05 | −1.72 | 2.42 | 0.48 | 3 |
| 马坊台 1971 年—72 年 | 730 | −0.7 | 0.2 | 1.9 | 0.66 | −0.24 | −0.89 | 2.47 | 0.24 | 4 |
| 马坊台 1973 年—75 年 | 1090 | −0.8 | 0.1 | 2.1 | 0.69 | 0.15 | −1.23 | 2.68 | 0.21 | 7 |
| 马坊台 1976 年—78 年 | 1090 | −0.7 | 0.2 | 1.6 | 0.61 | 0.24 | −1.56 | 2.54 | 0.23 | 2 |
| 青县台 1970 年—72 年 | 1090 | −1.5 | −0.5 | 2.4 | 0.81 | 0.15 | −1.04 | 2.92 | 0.50 | 11 |
| 青县台 1973 年—75 年 | 1090 | −1.6 | −0.5 | 2.2 | 0.77 | 0.26 | −0.94 | 无意义 | 0.40 | 9 |
| 青县台 1976 年—78 年 | 1090 | −1.6 | −0.6 | 2.5 | 0.72 | −0.24 | −1.82 | 2.26 | 0.44 | 12 |

文献〔2〕给出一种计算时间序列李指数谱的方法，对给定的数据序列$\{X_i\}$构成 K 维坐标中的轨道

$$X_i = (X_i, X_{i+1}, X_{i+(k-1)\tau}), i = 1,2,\cdots,N-(K-1)\tau$$

其中任选轨道上的一点 $X_0$，在以这一点为球心，$\varepsilon$ 为半径的球内，抽出 M 个邻近的点 $X_j(j=1,2,\cdots,M)$。$X_0$ 及 $X_j$ 经过某一时间 $\tau$ 演化为 $X_{0\tau}$ 及 $X_{j\tau}$，定义位移矢量：

$$Z_{j0} = X_j - X_0$$

$$Z_{j\tau} = X_{j\tau} - X_{0\tau}$$

考虑到 $\tau$ 很小，$Z_{j\tau}$ 近似为线性，可用下式表示：

$$Z_{j\tau} = A(\tau) Z_{j0} \tag{5}$$

其中 $A(\tau)$ 为 $K\times K$ 矩阵。利用最小二乘法便可以求得矩阵 $A(\tau)$。(5)式可写成下面的矩阵形式：

$$C = AV \tag{6}$$

其中 $C=[Z_{1\tau},Z_{2\tau},\cdots,Z_{M\tau}]$，$V=[Z_{10},Z_{20},\cdots,Z_{M0}]$ 均为 $K\times M$ 矩阵。则由(6)式可得 $A=CV^{-1}$。这时 $V^{-1}$ 为 V 的广义逆矩阵，矩阵 A 可求。然后求出其特征值，并按大小顺序为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_K$。对轨道上所有点 $X_i$，求出 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_K$ 的平均值，便是所求的李指数谱。对李指数谱计算结果的误差可以进行近似估计。就是所有的李指数中，应当至少有一个指数为 0，越接近于 0 说明结果越准确。根据(3)式便可确定分数维。我们称其为李指数维，用 $D_L$ 表示。

考虑到计算李指数对数据长度的要求更高，并且由分数维的计算结果得知维数在 2.5 左右，因此嵌入空间维数 K 取 3 就可以了。计算结果李指数 $\lambda$ 及分数维 D 均列于表 1。由表 1 可以看到，尽管 $D_L$ 同 $D_2$ 有所区别，但其变化趋势是一致的。从理论上讲它们也可能是不同的，重要的是第一个李指数为正，这就说明了地电阻率时间序列是呈混沌态的。从表 1 中可以看出第二李指数 $\lambda_2$ 与 0 的偏离较大，也说明了误差在 0.2 的水平上。假如李指数的绝对误差为 0.2，3 个李指数 $\lambda_1$、$\lambda_2$、$\lambda_3$ 分别取 1、0、−2，则依(3)式有

$$\Delta D_L = \left|\frac{\Delta\lambda_1}{\lambda_3}\right| + \left|\frac{\Delta\lambda_2}{\lambda_3}\right| + \left|\frac{\Delta\lambda_3}{\lambda_3}\right| = 0.25$$

那么结果还是有参考价值的。

## 4　地电阻率变化的复杂性

根据 Komogorov 等给出的复杂性的概念，可以认为是产生某给定“0、1”序列最小的计算机程序的比特数。对于时间序列而言，其运动轨道的精确描述是不现实的，着重应刻划区间的折叠，这样更能反映系统的本质且具有普通性。Lempel 和 Ziv 给出复杂性的定义，Kaspar 和 Schuste 给出一种复杂度的算法，本文对此稍加介绍。假如有一时间序列$\{X_i\}$，$i=1,2,\cdots,N$，首先求出其平均值，然后重构这个序列，使得大于平均值的 x 等于 1，小于平均值的 x 等于 0。这样便可得到一个由 0 和 1 组成的时间序列。当后面某一字符串在前面的字符串中出现过，则称之为复制，否则称之为插入。每一个插入我们均用符号“. ”将其分开。那么所分得字符串的个数再加 1 即为复杂度，用 c(N)表示，N 代表数据长度。

设一随机序列：6.2，7.5，4.3，9.6，8.4，6.5，7.2，5.3，6.4，8.2，求出其平均值为 6.96，重构后的序列为：0101101001，根据以上规则，可得如下结果：0 • 10 • 11 • 0100 • 1，则 c(10)＝6，即为此时间序列的复杂度。

根据 Lempel 和 Ziv 的研究[6]，对完全随机的序列$\{R_i\}$，当长度 N 趋于无穷时，具有如下渐近行为：

$$\lim_{N\to\infty} c(N) = N/\ln N$$

可以用它来归一化，成为相对复杂度，也可以简称复杂度。

$$C(N)=c(N)\ln N/N$$

这样便与数据的长度无关。不难看出，随机序列的复杂度趋于1，而有规则的周期运动则趋于0。前面随机序列的复杂度为C（10）＝6×ln10/10＝1.381。

本文利用这种算法对地电阻率时间序列进行了试算。在计算中，N取200，采用10天作为滑动步长。图2给出了部分台站资料的复杂度随时间的变化曲线。从图中可以看出地电阻率复杂度一般在0.2－0.5左右。为了进行比较，将关联维$D_2$、李指数$D_L$及复杂度C的结果均绘于图3中，可以看到三者间有一定的相关性。为了比较，本文给出了已知的Lorenz（D＝2.07）和Rossler（D＝2.01）混沌吸引子的复杂度，参见图4。结果表明地电阻率的复杂度比已知的混沌吸引子的复杂度大得多。说明地电阻率变化所处的动力学系统远比已知的混沌系统复杂。

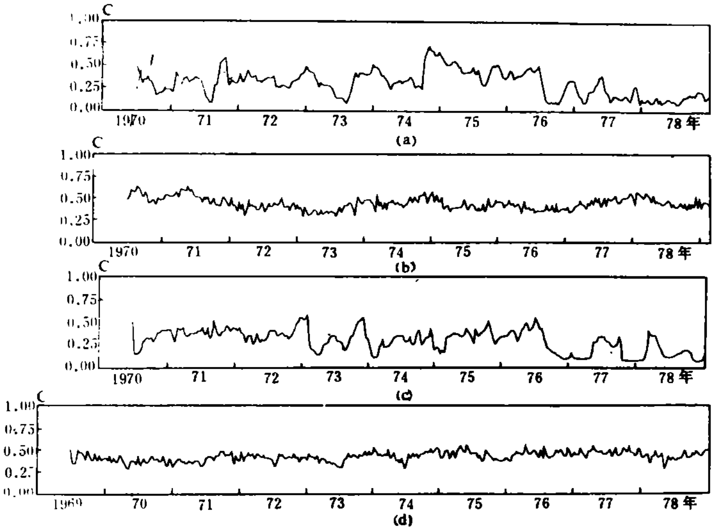

图2 地电阻率复杂度

(a)昌黎台；(b)青县台；(c)张山营台；(d)忠兴庄台

Fig. 2 The complexity of ground resistivity.

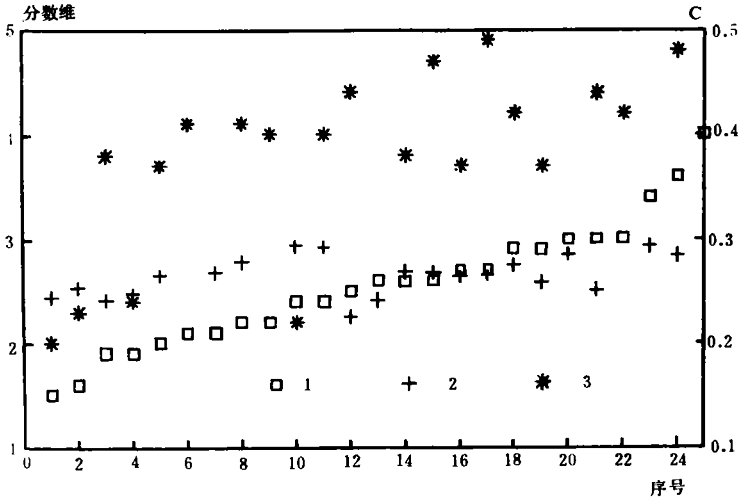

图3 分数维$D_2$、$D_L$及复杂度C的关系（按序号排列）

1 $D_2$；2 $D_L$；3 复杂度C

Fig. 3 The relation of complexity C to fractal $D_2$ and $D_L$.

具有分数维结构系统可以认为是复杂的系统，从分数维和复杂度的计算结果可以看出它们的变化趋势是一致的，当分数维增加时，复杂度也增大。

## 5 结论

本文分别用分数维、李雅普诺夫指数及复杂度三种不同的处理方法对地电阻率变化的时间序列资料进行了计算，其结果是一致的，均说明地电阻率变化是一种非常复杂的混沌态，比已知的混沌系统具有更为复杂的动力学特征。

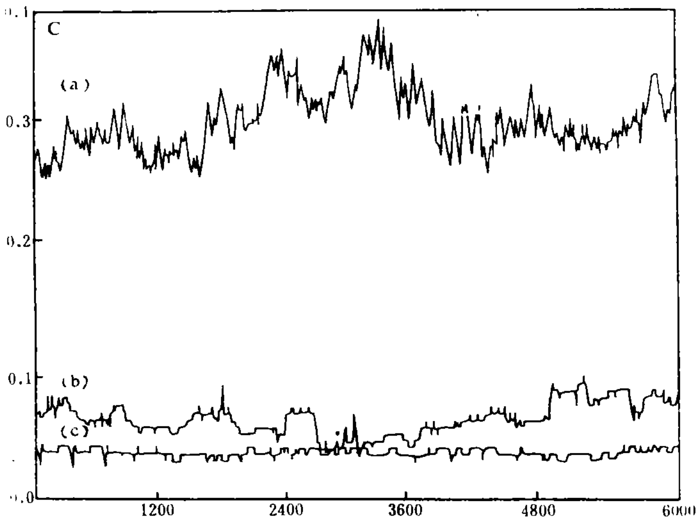


图 4　Lorenz 系统、Rossler 系统及脑电波的复杂度

(a)脑电波；(b)Lorenz 系统；(c)Rossler 系统

Fig. 4　The complexities of Lorenz system, Rossler system and brain wave.

本文的探索是初步的，有些问题有待进一步研究，但是其结果还是令人满意的。主要结论如下：

(1)地电阻率变化的时间序列具有分数维结构，在正常背景下，其维数在 2.5 左右，因此描述系统所需的变量个数至少为 3 个。

(2)从复杂度的计算结果可以看出，地电阻率的变化远比其它已知的混沌体系复杂。

(本文 1995 年 5 月 20 日收到)

## 参考文献


1　A Wolf and J Swift. Determing lyapunov exponents from a time series. Physica, 1985, 16D: 285—317.

2　高安秀树. 分数维. 北京：地震出版社，1989.

3　彭成斌，等. 地震中的分形结构. 中国地震，1989, 5(2): 19--26.

4　H D I Abarbanel. Lyapunov exponents from observed time series. Physical Review Letters, 1990, 65(13): 1523—1526.

5　G Nicolis and I Prigogine. 探索复杂性(中文版). 成都：四川教育出版社，1986.

6　Lempel A and Ziv J. IEEE Trans Inf. Theory IT－22. 1976. 75.


# THE FRACTAL DIMENSION OF EARTH RESISTIVITY

Liang Zibin, Zhao Heyun and Cai Hongwei

(*Earthquake Research Institute of Lanzhou, SSB, Lanzhou* 730000)


## Abstract

Based on the method of reconstructing dynamic phase space, this paper calculates the fractal dimension, Lyaponove index and complexity of the resistivity data gained from several stations around Tangshan area before and after the Tangshan earthquake and from Shandan station in 1990. The results show that the time sequence of ground resistivity is of fractal dimension structure, and under normal condition its attractor's dimension is about 2.5. The calculation of its complexity suggests that the change of ground resistivity is far more complicated than other standard attractors.


**Key words: Ground resistivity, Fractal, Time sequence,** Phase space