

细胞自动机的多重分形特征 和动力学根源^{*}

高原 季颖 陈颀^{**}

(国家地震局分析预报中心, 北京 100036)

摘要 用大量弹簧滑块组成的模型可以模拟地震的复杂性, 本文以细胞自动机(CA)为数学工具, 结合地震学和岩石力学的结果, 考虑了能量的输入和损耗, 进行了地震事件的数字模拟。对模型中输出的“地震”事件进行了时间和空间的多分形分析, 并对自组织临界(SOC)状态进行了讨论, 进而得到事件至少在时间域里的分布呈现出层次结构, 符合自相似特征。本文的CA模型属于确定性的混沌系统, 而对于处在SOC状态下的大量事件的频度和大小的统计与G-R指数律很好地吻合。结果表明, 虽然自组织(SO)可能是更准确的地震表征, 但SOC仍然是研究地震现象的很好的模式。

关键词: 地震 层次结构 数值模拟 混沌理论 细胞自动机 多重分形 自组织临界

1 引言

1987年, Bak、Tang 和 Wiensfeld 引用一种自组织(即SO)的临界状态来描述非线性耗散系统的动力学行为^[1]。他们认为, 非线性耗散系统通过一种自组织过程演化, 最终将进入一种临界状态, 这时系统呈现出许多指数分布规律。随后, 科学家们开始研究用这种模型来解释和描述非线性系统的复杂性。

以一种非常简单的粘滑运动作为地震发生机制的弹簧滑块模型吸引了许多研究者, 人们试图通过这么一种能产生非常复杂的动力学图象的简单模型来揭示产生复杂性的动力学机制。众所周知, 弹簧与滑块组成的模型是一个符合牛顿运动定律的完全确定的动力学系统。然而, 模型的数值模拟计算表明, 即使是在空间完全均匀分布、没有任何随机因素存在的条件下, 事件的发生也呈现出复杂的图象。同时, 事件发生的频度和事件的大小符合G-R(Gutenberg-Richter)指数律——地震中一种具有普适性的分布规律。这意味着系统已经进入自组织临界(即SOC)状态, 因此, 1989年Bak等就用一种类似粘滑运动机制的细胞自动机(即CA)模型将SOC现象与地震联系起来, 以研究其复杂性的动力学根源。事实上, 实际的地震事件存在许多指数分布规律, 如前面提到的地震发生频度与释放的能量的G-R指数律、地震破裂区面积的分布规律、余震衰减的规律、震中的空间规律等。岩石破裂实验表明, 岩石破裂过程中同样也存在许多指数规律, 如破裂前声发射事件次数的衰减规律, 声发

* 本研究得到地震科学联合基金的资助。

** 国家地震局, 北京 100036

射事件的空间分布规律等。所有这一切都表明地震是一个处于临界状态的非线性系统。因而,致使许多物理学家和地球物理学家构造了各种模型来研究自组织临界现象与地震之间的联系。例如伊藤和松崎(1990)的完全随机加载的细胞自动机模型^[2],中西(1990)确定的连续加载的细胞自动机模型^[3]等。但他们的模型模拟计算都仅偏重于验证地震中的 G—R 关系,并未研究参量的普适性。同时也未对事件的时空分布统计特征进行讨论。

本文构造一种由弹簧滑块系统抽象出来的细胞自动机模型来讨论 G—R 关系的时空统计特征,引用分形与分维理论来描述系统的演化,模型以每个元胞(或称细胞)代表一个孕震单元,以元胞的破裂模拟地震的发生,进而讨论模型的参量与一般动力学特征的关系。同时,讨论描述自组织临界状态的统计特征参量。

2 模型

如图 1 所示的弹簧滑块系统中,每个滑块由弹簧 K_B 与周围四个滑块连接,用弹簧 K_A 与以恒速度 V 运动的驱动块体连接,每个滑块所受力为各弹簧施加的力之和。当滑块所受的力小于其静摩擦力时,滑块静止于粗糙的下表面。而当所受的力大于或等于其静摩擦力时,滑块发生滑动。同时,通过相互连接的弹簧将力传递给相邻的滑块。我们以滑块的滑动来模拟地震事件的发生,以细胞自动机的元胞代表滑块。

我们假定某滑块受到力的作用而得到的能量积累为 $E(i)$,系统按以下过程演化:

①当每个滑块所受的力都小于其静摩擦力时,以恒定速度 V 运动的驱动块体通过弹簧 K_A 给每个滑块加载,这个过程相当于实际地壳中的应力积累现象,而应力积累伴随着的是能量储存的积累。因而,可以用能量这个物理量来表示如下

$$E(i) = E_0(i) + e(i)dt \quad (1)$$

式中 dt 表示时间,下标 0 表示是初始值。 $E(i)$ 表示滑块 i 积累的能量, $e(i)$ 表示滑块 i 的能量积累率。

②当其中某个滑块所受的力等于最大的静摩擦力时,滑块发生滑动(相当于地震发生的破裂),同时该滑块受的力通过弹簧 K_B 传递给周围的块体。这个过程反映的是应力的释放和传递,从能量的观点来看,即是能量的释放和传递过程。设 $E_c(i)$ 表示能量的阈值(或称临界值), ΔE 为滑动时能量的释放,则有

$$E(i) = E_c(i) \rightarrow E'(i) = E_c(i) - \Delta E \quad (2)$$

$$E(j) \rightarrow E'(j) = E(j) + W(j,i)\delta\Delta E \quad (3)$$

其中 δ 为传递到其它滑块上的能量与滑动时释放的能量的比值, $W(j,i)$ 表示滑块 i 与滑块 j 之间的连接权系数,它满足

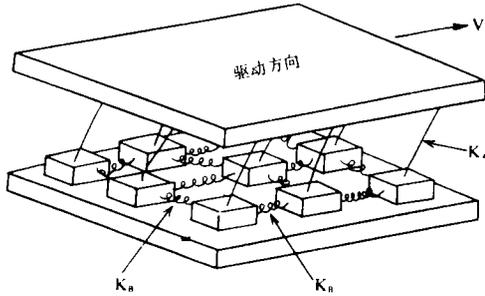


图 1 64×64 弹簧滑块模型

Fig. 1 Spring-block model of 64×64 blocks.

$$\sum_{j \neq i} W(j, i) = 1 \quad (4)$$

若 $W(j, i) = 0$, 则表示两滑块之间无连接关系。 $W(j, i)$ 的引入使得模型具有一定的普适性, 如果仅考虑最近邻原则, 本文模型的 $W(j, i)$ 便为 0.25。

③ 能量传递后, 每个滑块的能量 $E(i) \{i=1, 2, \dots, N\}$ 都小于其阈值 $E_c(i)$, 系统转向①, 再次从外界获取能量。

④ 如果有某个滑块的能量 $E(i)$ 大于或等于其阈值 $E_c(i)$, 系统转向②, 重复这个过程, 不断地调整各滑块间的能量分布, 直到所有滑块的能量都小于其阈值, 系统再转向①, 从外界获取能量。

由于系统的离散化, 以及破裂(滑动)发生时能量的重新分配, 使得某元胞(滑块)存贮的能量 $E(i) > E_c(i)$, 这时我们使用一种松弛函数 Φ 来定义破裂时能量的传播过程, 因此系统演化的步骤②可表示为

$$E(i) \rightarrow E'(i) = \Phi(E(i) - E_c(i)) \quad (5)$$

$$E(j) \rightarrow E'(j) = E(j) + W(j, i) \delta(E_c(i) - E'(i)) \quad (6)$$

其中松弛函数 Φ 必须满足

$$|\Phi(x)| < E_c(i), \text{ 当 } x \geq 0 \text{ 时}$$

$$\text{且有 } \Phi(0) = E_c(i) - \Delta E \quad (7)$$

参量 ΔE 为一个元胞破裂时释放的能量, 我们假定 $\Phi(x)$ 是满足条件(7)的单调递减函数, 对于这样的系统, 一次小事件可能被放大, 引发大的事件。因而, 我们定义 $\Phi(x)$ 在 0 点的导数为 α , 即

$$\left. \frac{d}{dx} \Phi(x) \right|_{x=0} = -\alpha \quad (8)$$

在实际地震问题中, 存在两种时间尺度, 系统的能量以非常缓慢的板块驱动方式输入, 这个时间尺度为数百年, 甚至数千年数万年, 而地震发生时的破裂传播却只在秒的量级上。与此类似, 我们定义步骤①的时间量级为年, 步骤②的时间量级为秒, 相形之下, 应忽略破裂传播所需的时间。

为了测度每次破裂的规模, 我们定义物理量 Ω 和 M 来作为度量

$$\Omega \equiv \sum (E(i) - E'(i)) \quad (9)$$

$$M \propto \log \Omega \quad (10)$$

Ω 为一次事件的矩, 相当于地震发生时释放的能量, M 则相当于地震的震级。

显而易见, 我们的模型中存在 ΔE 、 α 和 δ 三个参量。 ΔE 表示一个元胞破裂释放的能量, 它与从系统外界输入的能量一起共同控制着系统事件的时间进程。 α 表示系统的放大倍数, α 大时, 系统中的小事件就容易引发大事件。 δ 表示系统的刚性, 若 δ 小, 则意味着破裂所释放的能量只有一小部分传播到其它的元胞, 导致一次事件的破裂区域局限在很小的范围内; 反之, 则由于较大的破裂的传递, 使得一次事件的破裂可能扩展到很大范围。

3 SOC 状态

根据全球地震统计的 G-R 公式中的 b 值几乎保持在某一个值(约 1.5), 许多学者认为地壳被锁定在永久的临界状态, 所以地震震源总是处在一种自组织临界状态中^[4-5]。通过双弹簧滑块模型的混沌现象的研究^[6-8], 地震系统可以从有序态转变为混沌态。本文把双弹簧

滑块系统扩展到 64×64 的弹簧滑块系统,可以看到,对于此类由大量基本元件组成的整体系统,其运动状态的混沌行为在宏观上可观察到特征参量的 SOC 现象。在我们的 CA 模型中,得到的应力积累与释放的变化明显地表征出 SOC 现象的出现(见图 2)。我们把系统从状态上分为三个阶段:前面一部分的线性积累阶段为进入 SOC 前的状态,即 I 区;后面一部分其应力值围绕某一位置上下摆动的动态稳定阶段为进入 SOC 状态,即 III 区;而介于 I、III 两区之间的不稳定区则可称为准(或亚)SOC

状态,即 II 区,此区处于进入 SOC 之前的调整阶段。这种定性上的分类,从物理意义上似乎是有道理的。在 I、II 和 III 这三个阶段,系统的“累积位移”量一直处于上升趋势。从图 3(a)中可看出,这种增加将伴随着时间进程中的事件的发生,并将会持续下去。大时间尺度上的近乎单调直线上升,其实质上却是以阶跃形式来表现的。图 3(b)是 3(a)

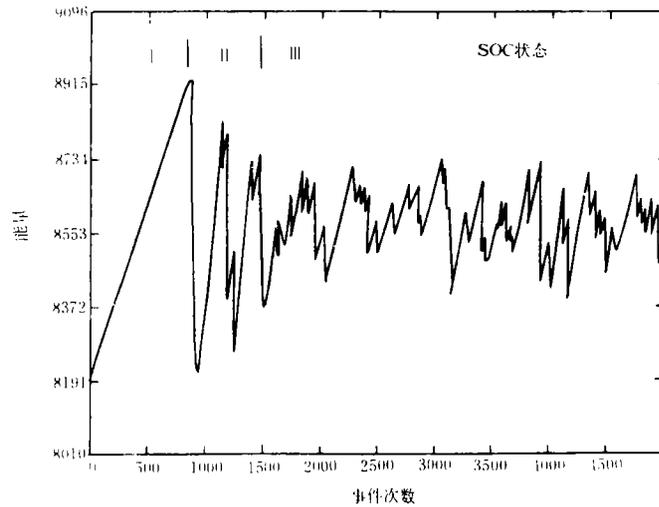


图 2 能量积累和释放曲线

Fig. 2 The gathering and release curve of energy.

的局部放大,每次阶跃对应一次事件,阶跃的幅度则反映了事件的大小。需要指出的是,这里用能量释放的简单的一次关系来作为系统的累积位移的度量,这种处理对系统的基本性质的解释不会产生原则问题。

4 统计特征

4.1 G—R 指数律关系

正如引言中所提到的,G—R 指数律是地震中的一种基本统计规律。在本文的 CA 模型里,用一次事件的实际破裂块数作为能量释放的定量表示,用符合实际地震观测的经验关系

$$\log E = C_1 M + C_2 \quad (11)$$

$$\log N = a - bM \quad (12)$$

来进行物理参量值的转换,这里的 M 即是所谓的事件“震级”的概念, E 代表能量, N 表示“震级”大于 M 的事件次数, a 、 b 、 C_1 和 C_2 为常数。图 4 是 CA 模型产生的一部分事件的时间序列,根据得到的时间序列(事件目录),我们进行了能量和事件个数的双对数投影(图 5)。由(11)式和(12)式得

$$\log E = A + B \log N \quad (13)$$

式中 A 和 B 亦为常数。从图 5 我们清楚地看到,大量事件的统计符合(13)式的规律,用直线

拟合的结果得到的 b 值约为 1.14, 从而证明了这个 CA 模型产生的事件满足 $G-R$ 关系。

4.2 时间序列的多重分形特征

CA 模型建立的人工“地震”事件目录在时间轴上是处处不连续的大量点的集合。把时间轴分成长 r 的小段, 统计出有 $M > M_0$ 地震发生的时间段总数 $N(r)$, 则时间分形的容量维或称豪斯道夫(Hausdoff)维为

$$D_0 = \frac{\log C_0(r)}{\log r} \quad (14)$$

这里的 $C_0(r) = 1/N(r)$, 通过对事件的时间序列的统计计算, 从图 6(a) 中 $\log C_0(r)$ 和 $\log r$ 之间的关系曲线, 发现曲线两端各有一个饱和线。其中在低 r 端的水平饱和和线意味着分段太窄, 超过了实际地震的最小时间间隔, 这个饱和线可以称作“事件饱和线”; 在高 r 端的斜率为 1 的饱和线的含义是分段太大, 以致于每个 r 段里都有事件发生, 这样的划分再继续下去得不到有用的信息, 这个饱和线可以称作“尺度饱和线”。据图 6(a), 只有中间存在一小段狭窄的无标度区, 进而求得 $D_0 \approx 0.35$ 。

由于地震事件的复杂性不是仅仅用 D_0 就可描述清楚的, 我们根据

$$D_q = \frac{\log C_q(r)}{\log r} = \frac{\log (\sum \{P_i(r)\}^q)^{1/q-1}}{\log r} \quad (15)$$

进行多重分形的计算, D_q 表示多重分维, 式中 $P_i(r)$ 表示时间尺度为 r 时第 i

个时间段里的事件概率。通过 D_q 谱(图 6(b)), 可以看出随着 q 值由负值增加为正值, D_q 的值逐渐减小。

4.3 空间分布的分形特征

仿照实际的地震空间分布特征, 我们把 64×64 的 CA 模型在二维平面上的事件破裂起始位置标出, 得到事件的二维空间分布(图 7(a))。出于模型的一般性考虑, 这里没有对此模型与实际的适用范围加以限定。通过把空间细分网格化, 同样可以得到“地震”事件的空间分布的空间容量维 D_0^S , 上标 S 表示空间维。图 7(b) 表明, 空间分布的多重分维也存在无标度区狭窄的现象。由于空间范围小, 这个问题更加突出。

5 讨论

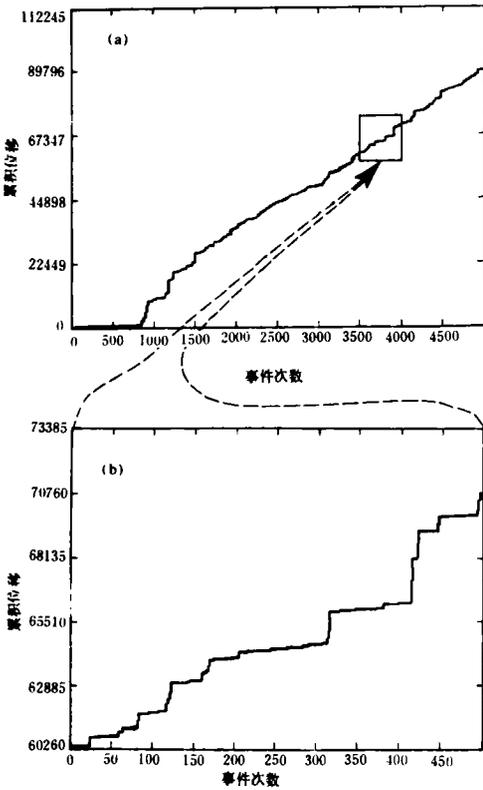


图3 累积位移曲线

(a)与图2相应,(b)为(a)中局部窗口的放大

Fig. 3 The gathering of displacement, (a) the same scale as Fig. 2 and (b) local magnifying of a window in (a).

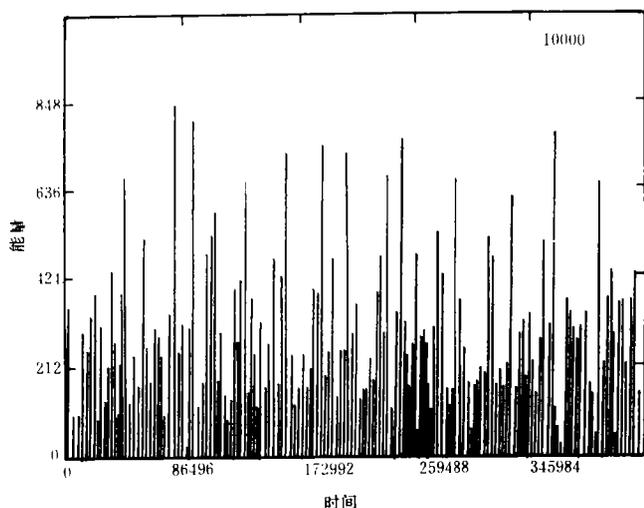


图 4 事件的时间序列

Fig. 4 The time sequence of events produced from the CA model.

事件的发生,得到的事件的时间序列和空间分布却都具有多重分形特征。这一事实表明地震事件的度量表述只能用多重分形理论。过去的工作,都把满足指数律(如 G—R 公式)作为地震现象是地壳被锁定在 SOC 中的证据,而郑捷

用 CA 模型的数值模拟得到的结论是,系统无论是在进入 SOC 前、处于 SOC 中还是退出 SOC 时,地震事件大小的统计都满足 G—R 指数律^[9],这表明 G—R 关系不能作为系统是否处于 SOC 状态的证据。此外,由于大量的实际资料的分析表明,地震现象的分形特征是变化的,因而不能用 SOC 模型或确定性模型,而应该用 SO 模型来研究^[10]。然而,关于地震事件到底是 SO 还是 SOC 现象,这里暂且不去深入

讨论,因为虽然 SO 状态可能是(也许在局部区域)研究地震现象的更准确的工具,但至少 SOC 状态下的孕震模型与一定时间尺度范围内观测到的实际资料的分析符合得很好。

“地震”事件可能还是个具有层次结构的多分维的状态集,这个现象符合自相似结构理

混沌系统的奇异吸引子具有分数维,复杂的混沌系统具有非均匀分形,可用多分维度量。从双弹簧滑块的简单模型得到混沌运动的复杂表现^[7],似乎可以自然地想到大量弹簧滑块系统的整体运动的复杂性是不可能用简单的单一容量维来描述清楚的,出于减少计算机的运算量时的考虑,我们只用了 64×64 的弹簧滑块模型来模拟人工“地震”事

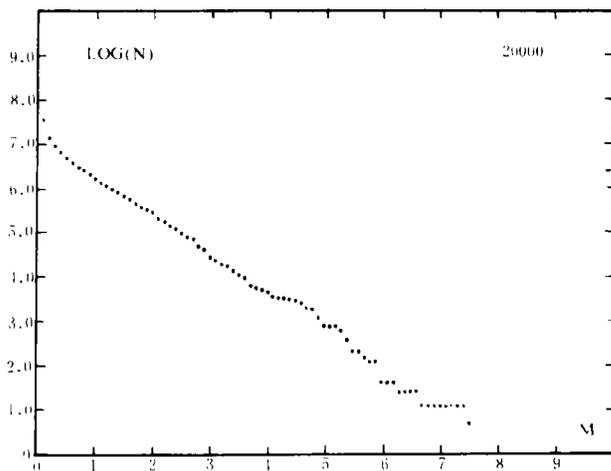


图 5 事件序列的 b 值图

Fig. 5 The b value of sequence.

论。图8为不同“震级(M)”尺度的 $\log C_0(r)$ 与 $\log r$ 的关系,明显看出无标度区随着M的减少而左移,即“尺子(r)”变短。尽管M不同,但测出的 D_0 是相同的。这就从数值模型的模拟得知,“地震”现象可能具有层次结构。需要指出的是,前面在计算多重分维时得到的无标度区较为狭窄,这与计算方法有一定关联。可见,引入更加合理的新的计算技术,将可能会使这个现象得到改善。

从事件的时间和空间的多重分维的结果来看,理论模型的输出与地壳里实际地震的发

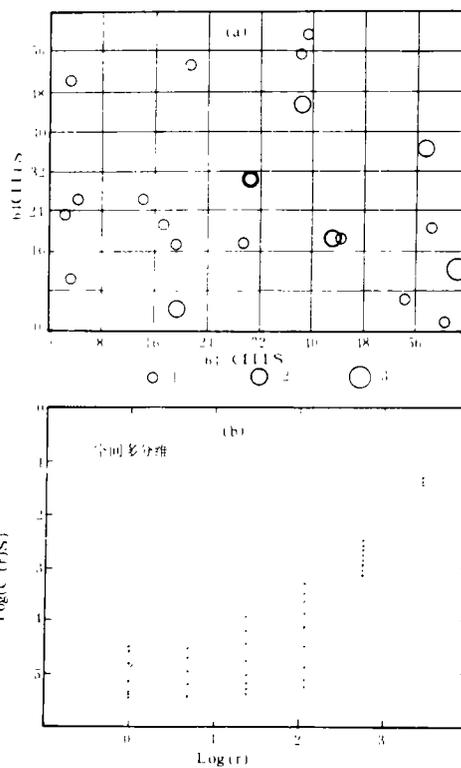
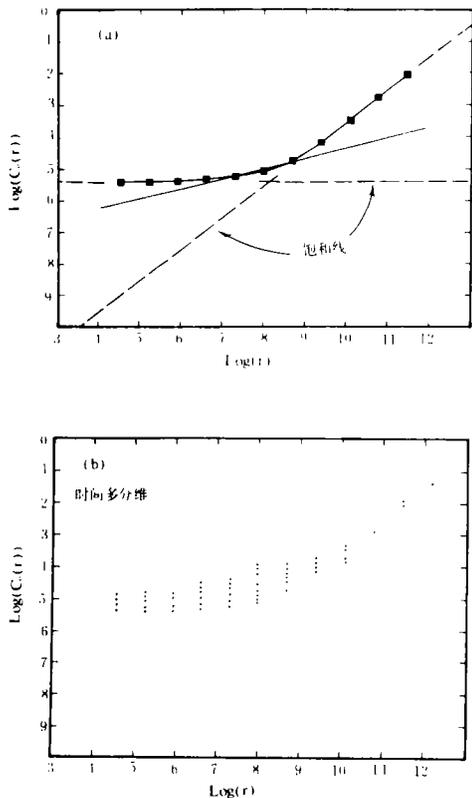


图6 (a)时间序列的容量维 D_0 分析;
(b)时间序列的多分维 D_q 分析,
其中 $-30 \leq q \leq 30$

图7 (a)事件的空间分布 ($M \geq 5.0$);
(b)事件的空间多分维 D_q^S 分析,
其中 $-30 \leq q \leq 30$

Fig. 6 The D_0 analysis (a) and D_q analysis (b)
of time sequence under the condition of
 $-30 \leq q \leq 30$.

1 $5.0 \leq M < 6.0$; 2 $6.0 \leq M < 7.0$; 3 $M \geq 7.0$
Fig. 7 The spatial distribution of $M \geq 5.0$ events (a)
and spatial multifractal D_q^S analysis of the events
under the condition of $-30 \leq q \leq 30$ (b).

生在总体特征上是一致的,汪秉宏等(1992)对中国唐山地区震中分布的多重分形的研究以及 Tadashi 等(1990)对美国、日本和希腊地震的震中分布的多分形的分析都表明,地震与许多复杂现象一样是多分形的。关于地震事件的多重分维随时间的变化,我们这里没有作讨论。事实上, D_q 与时间的关系是个非常重要的研究课题,由此可能得到对地震预报产生重要

影响的结论。

本文的模型采用的是 64×64 单元组合, 因而其局限性是显而易见的, 但从这个简单的组合里产生的复杂图象却揭示了地震的复杂性可能源于非常简单的动力学模式。利用随机性的 CA 进行的地震模型研究的初步结果表明^[11], 描述地震活动性的 b 值与模型参数的设置以及传递准则的确定密切相关。虽然影响模型的参数有多个, 但这里讨论的问题在总体图象上是具有代表性的一般特征。

关于模型参数的变化效应、破裂准则和破裂的传播方式的研究, 以及最后如何直接应用于实际地震的研究当中, 都将是需要进一步开展的工作。

(本文 1994 年 7 月 2 日收到)

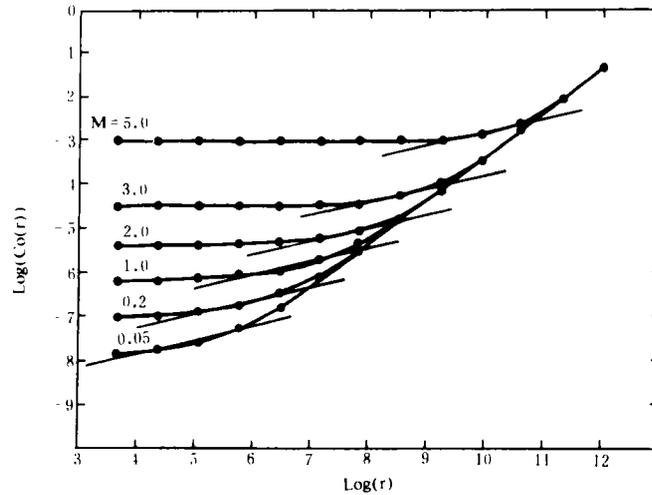


图 8 不同 M 尺度下的 $\log(C_0(r))$ 与 $\log(r)$ 的关系. 图中从上到下 6 条曲线分别对应 M 为 5.00、3.00、2.00、1.00、0.20 和 0.05 时的计算结果

Fig. 8 The relation between $\log(C_0(r))$ and $\log(r)$ in different M size. The numerals in figure mean the values of M .

参考文献

- 1 Bak, P., C. Tang and K. Wiesenfeld. Self-organized criticality: an explanation of $1/f$ noise. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, 59: 381-384.
- 2 Ito, K. and M. Matsuzaki. Earthquake as self-organized critical phenomena. *J. Geophys. Res.*, 1990, 95(B5): 6853-6860.
- 3 Nakanishi, H. Cellular-automaton model of earthquakes with deterministic dynamics. *Physical Review A*, 1990, 41 (12): 7086-7089.
- 4 Bak, P. and C. Tang. Earthquakes as a self-organized critical phenomenon. *J. G. R.*, 1989, 94(B11): 15635-15637.
- 5 Bak, P. and K. Chen. Self-organized criticality. *Scientific American*, 1991: 26-33.
- 6 Huang, J. and D. L. Turcotte. Are earthquake an example of deterministic chaos? *Geophys. Res. Lett.*, 1990, 17 (3): 223-226.
- 7 季颖, 高原, 陈顺. 模拟地震的弹簧滑块模型的混沌运动. *东北地震研究*, 1995, 11(1).
- 8 Brown, S. R., C. H. Scholz and J. B. Rundle. A simplified spring-block model of earthquakes. *Geophys. Res. Lett.*, 1991, 18(2): 215-218.
- 9 郑捷. 细胞自动机理论及其在地震孕育机理研究上的应用. 地震科学联合基金会编, 地震科学整体观研究. 地震

出版社, 1993. 133-147.

- 10 郑捷. 非线性科学方法和地震机理实验研究进展. 国有地震局地球物理研究所编: 地震科学中的非线性问题. 地震出版社, 1993. 137-169.
- 11 高原, 刘昭军. 随机性细胞自动机的地震模拟的动力学含义. 中国地震, 1995, 11(1).

MULTIFRACTAL CHARACTERISTICS AND DYNAMICAL SOURCES OF CELLULAR AUTOMATA

Gao Yuan, Ji Ying and Chen Yong*

(Center for Analysis and Prediction, SSB, Beijing 100036, China)

Abstract

Using the model made from lots of spring-blocks, we may model the complication of earthquakes. In this paper, by cellular automata (CA) as mathematical tools, with the results of seismology and rock mechanics, considering about the energy gathering and energy losses, we do digital modelling for earthquake events, then do multifractal analysis for "earthquakes" events from this model in both time and space fields, and discuss self-organized critical (SOC) state. Further, we get the conclusion in which event distribution shows hierarchy structure, at least, in time field and is coincident with self-similarity nature. This CA model is a determinacy Chaos system, its statistics for frequency and magnitude of lots of events under the state of SOC accords with Gutenberg-Richter index law well. The results show that although self-organized (SO) state might be more accurate earthquake expression, SOC still is a very good mode in earthquake studies.

Key words: Earthquake, Level structure, Numerical simulation, Chaos theory, Cellular automata, Multifractal, Self-organized critical state

* State Seismological Bureau, Beijing 100036, China