

# 基于非线性自激振动指数自回归模型与地震活动研究

杨立明 郭大庆 石特临

(国家地震局兰州地震研究所)

**摘要** 地震活动表现出平静和活跃相互轮回的特征,发震频度和震级则表现出在活跃期维持相对较高的水平,而在平静期维持相对较低的水平。为了探索这种活动机制,本文用基于非线性自激振动的指数自回归模型来研究这些特征。结论指出,指数自回归模型较好地反映了地震活动的前述特征,同时体现了本世纪以来地震活动的衰减趋势。借助非线性振动的思想和方法揭示地震活动的动力机制是有可能的。

**关键词:** 自激振动 指数自回归模型 地震活动

## 1 引言

非线性振动是非线性科学中形成较早的分支,从非线性振动的角度研究地震活动,有利于揭示地震活动的动力机制,对地震活动的有关特征进行模拟、解释。因此本文从非线性自治系统的角度,利用指数自回归模型研究地震活动的特征。

## 2 基本原理

考虑一般的典型振动支配方程

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x})\dot{x} + f(x) = P(t) \quad (1)$$

该方程在力学、电学等学科中都有着广泛的应用,若以力学的语言来解释,则  $f(x)$  是恢复力,  $g(x, \dot{x})$  是阻尼系数,  $P(t)$  是激励力。若  $V(x)$  是系统的势能,则  $f(x) = V'(x)$ 。如果  $P(t) \equiv 0$ , 即系统没有激励力或激励力不是显式地依赖于时间,方程(1)可写成:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -f(x) - g(x-y)y \end{cases} \quad (2)$$

这是常微分二阶自治系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \end{cases}$$

的特例,因而此时的系统为自治系统。

在这样的自治系统中,没有外部的周期激励,系统内却存在着自身激发的振动,即自激振动,据 Andronov 的研究,自振的模型必须是非线性、非保守、变阻尼的。这里的变阻尼是指系统中的阻尼  $g(x, \dot{x})$  有正有负,正阻尼是耗散因素,不断消耗能量,振动不能持久,负阻尼则代表能量不断输入,振动振幅的大小亦不固定。持久的振动,必须是在一个周期的过程中,阻尼有正有负,能量有增补又有耗散,这时系统出现了自组织状态,产生了持久的、孤立的周期解。这是一个耗散的开放系统,该系统的能量在一个周期内有吸收又有耗散,系统维持有限振幅的振动。振动的振幅和频率亦存在一定的依赖关系,称之为“幅频依赖”。举例来说,若  $g(x, \dot{x}) = \varphi_1, f(x) = \varphi_2 x$  均为线性,即方程(1)是线性自治系统:

$$\ddot{x} + \varphi_1 \dot{x} + \varphi_2 x = 0 \quad (3)$$

相应的特征方程为:

$$\lambda^2 + \varphi_1 \lambda + \varphi_2 = 0$$

有两根:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\varphi_1}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\varphi_2 - \varphi_1^2}}{2}$$

当  $4\varphi_2 - \varphi_1^2 > 0$  时,将以频率:

$$\omega = \sqrt{4\varphi_2 - \varphi_1^2} / \varphi_1 \text{ 进行振动, 若 } g(x, \dot{x}) = \varphi_1, f(x) = \alpha x + \beta x^3$$

则成为:

$$\ddot{x} + \varphi_1 \dot{x} + (\alpha x + \beta x^3) = 0 \quad (4)$$

改写成:

$$\ddot{x} + \varphi_1 \dot{x} + (\alpha + \beta x^2)x = 0$$

对照上面的结果,把  $(\alpha + \beta x^2)$  放在  $\varphi_2$  的位置上来考虑,该系统的振动频率为:

$$\omega' = \sqrt{4(\alpha + \beta x^2) - \varphi_1^2} / \varphi_1 \quad (5)$$

可见该频率  $\omega'$  将随  $x$  变化,此即所谓的依赖于振幅的频率,即“幅—频依赖”。

尾崎和 Haggren 针对以上特征提出了离散参数指数自回归模型,其简化定义为:

$$x_t = \sum_{i=1}^p (\varphi_i + \pi_i e^{-\gamma x_{t-k}^2}) x_{t-i} \quad (6)$$

其中  $\varphi_i, \pi_i$  是模型的定常参数,  $\gamma$  是比例因子,  $k$  是某一延迟量,  $p$  是模型的阶。可以看出,当  $|x_{t-k}|$  增大时,模型的系数  $\rightarrow \varphi_i$ , 当  $|x_{t-k}|$  减小时,系数  $\rightarrow \varphi_i + \pi_i$ , 即模型的参数依赖于  $x_{t-k}$ , 从而如果有一双特征复根,其准周期振荡频率也将依赖于  $x_{t-k}$ 。

### 3 地震系统与非线性自治系统

考虑一个地震活动区,区内存在各种大小不同的活动断裂,若按方程(1)考虑,区内活动的动力源于外围板块的作用,这种作用在几十年或更长的时期内可以认为是恒定的,即不随时间变化,  $p(t) \equiv 0$ 。而区内能量的补充,或者说孕震势能  $v(x)$  的恢复,仍源于外围板块的作用。在活动区内,某一时段发生较小的地震的情形相当于负阻尼,相对地积累能量。而在另一

时段发生较大的地震,相当于正阻尼,相对地释放能量。

对于这样的活动区,在外围板块的作用下,区内各种大小不同的活动断裂相互影响,相互作用,整个系统表现为自组织状态,其间的地震活动有活跃期和平静期。相应的能量有积累有释放,有耗散有增补,跟自振系统的能量变化相似。同时一般来说,在活跃期,发震震级大,发震频度亦大,而在平静期,发震震级小,发震频度亦小,表现出一定的“幅—频依赖”特征。因此下面我们就利用指数自回归模型来研究地震活动的特征。

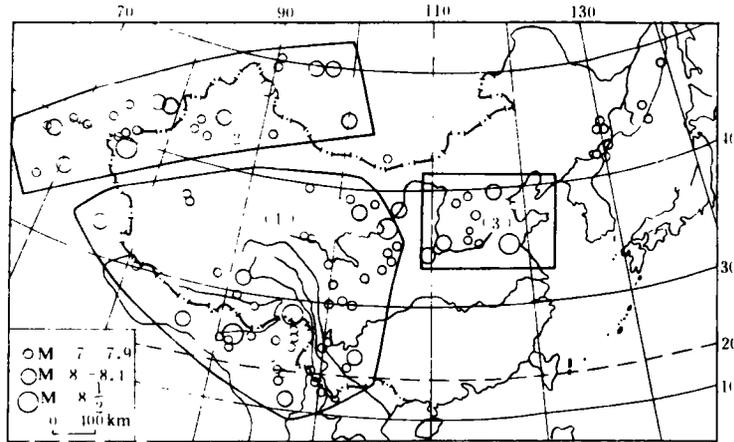


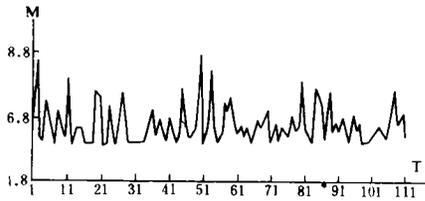
图1 中国大陆及其邻区三个主要地震活动区空间分布示意图

①青藏高原地震区 ②新疆地震区 ③华北地震区

Fig. 1 The three mainly seismically active zones in Chinese continent and its adjacent areas.

### 4 地震活动的指数自回归建模及分析

选青藏高原地震区作为研究对象,本区的空间相对位置如图1所示。本区受印度板块和欧亚板块的碰撞作用,区内各种大小不同的活动断裂相互影响,地震活动应该具有某种大范



2 青藏高原  $M_s \geq 6.0$  采样地震序列的 M—T 图

Fig. 2 The M-T curve of  $M_s \geq 6.0$  earthquake sequence in Qinghai-Xizang plateau.

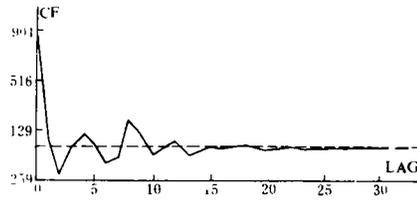


图3 青藏高原地震区震级序列的相关图

Fig. 3 The correlation diagram of magnitude series in Qinghai-Xizang plateau earthquake zone.

闹的关联性。利用本区1920.5—1990.10间  $M_s \geq 6.0$  地震的采样序列进行建模。其中平均采

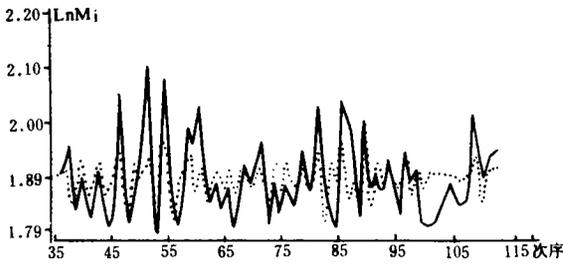


图4 震级序列部分计算值与实际值对应图  
实线为实际值；虚线为计算值

Fig. 4 The curve of partial real and calculated values of magnitude series.

$x_{n-k}$  应存在大的正相关,所以可以从自相关函数的角度选择  $x_{n-k}$  中的  $k$ ,由图3可见,震级序列存在短期相关,且延迟1,4,8等对应大的正相关,故分别取  $k=1,4,8$  进行建模。最后经优选得出本区经对数预处理震级序列指数自回归模型为:

$$X_n = f_0 + (0.315 - 0.254e^{-r_1^2 - 1})X_{n-1} + (-0.48 + 0.259e^{-r_2^2 - 1})X_{n-2} + (0.38 - 0.005e^{-r_3^2 - 1})X_{n-3} \quad (7)$$

其中  $f_0=1.877, \gamma=0.3$ , 内符标准差为0.076。部分实际值与据(7)计算值对应如图4所示: 模型(7)是含参变量的非齐次差分方程,不利于直接求解。由于  $x_n \in (1.7, 2.2)$ , 故选取  $x_{n-4} = 1.7, 1.9, 2.1$  分别进行数值求解:

当  $x_{n-4} = 1.7$  时,模型的齐次通解为:

$$x_n = 0.349^n C_1 + 0.623^n [C_2 \cos^{\omega_1 n} + C_3 \sin^{\omega_1 n}]$$

其中  $\omega_1 = 1.457$

当  $x_{n-4} = 1.9$  时,模型的齐次通解为:

$$X_n = 0.34^n D_1 + 0.631^n [D_2 \cos^{\omega_2 n} + D_3 \sin^{\omega_2 n}]$$

其中  $\omega_2 = 1.482$

当  $x_{n-4} = 2.1$  时,模型的齐次通解为:

$$X_n = 0.335^n E_1 + 0.64^n [E_2 \cos^{\omega_3 n} + E_3 \sin^{\omega_3 n}]$$

其中  $\omega_3 = 1.50$

综合上述三种形式,当  $x_{n-4}$  取任意值时通解的一般形式可写成:

$$X_n = Q^n(x_{n-4}) \cdot L + R^n X_{n-4} [M \cos^{\omega n} + N \sin^{\omega n}] \quad (8)$$

在上述诸式中,  $C_i, D_i, E_i, L, M, N$  均为任意实常数,  $Q(x_{n-4}), R(x_{n-4}), \omega$  均随  $x_{n-4}$  变化, 所以方程的非齐次通解可以写成:

$$X_n^* = Z + X_n \quad (9)$$

其中  $z$  为任一特解。

由解(8)、(9)可以看出:

(1) 由于  $Q < 1, R < 1$ , 这表明了  $x_n$  的一种衰减趋势,且由数值解可得出,震级越大,衰减越厉害,反映了本世纪以来本区地震活动的衰减趋势,尤其表现在较大震级的衰减上。

采样间隔平均  $\Delta T = 7.6$  个月。采样时在地震活动的大背景上进行自然筛选,考虑了采样定理的要求和遵循一定时段内的极值理论。采样序列的  $M-T$  图及相关图如图2图3所示:相关图中延迟4,8,对应大的正相关,表明本区地震活动存在延迟为4,即  $4 \times 7.6 = 30$  个月的准周期。

由指数自回归模型的定义(6)式可见,指数位置上的  $x_{n-k}$  的选择很重要,它应能反应出  $x_n$  的幅-频依赖关系,否则模型变成了定常参数  $AR(P)$  模型。即是说,  $x_n$  与

(2) 振荡频率随  $x_{n-1}$  变化, 比较如下:

$x_{n-1}$	1.7	1.9	2.1
$\omega_1$	1.457	1.482	1.50

可以看出, 当  $x_{n-1}$  大时, 振荡频率  $\omega_1$  大, 反之亦然, 表现出幅—频依赖特征。受这种特性的支配, 当  $x_{n-1}$  处于活跃期时,  $x_{n-1}$  大,  $x_n$  的振荡频率即发震频度大,  $x_n$  大, 处于相对耗能阶段。当  $x_{n-1}$  处于活动平静期时,  $x_{n-1}$  相对较小,  $x_n$  的发震频次小,  $x_n$  相对小, 相处于相对积能阶段。

(3) 本世纪以来该区地震活动既有衰减的趋势, 同时也有准周期的振荡特性, 表现为活跃平静交替轮回的特性。

## 5 结论

(1) 非线性自振系统的非线性、开放耗散等特性, 跟地震震源系统具有类似性, 借助于非线性振动的方法和思想揭示地震活动的动力机制是有可能的。

(2) 指数自回归模型较好地模拟了地震活动的活跃平静相间, 同时具有缓慢衰减的趋势以及震级频度在活跃期和平静期的不同变化特征。

(本文1994年1月10日收到)

### 参考文献

1. V. Haggan and T. Ozaki, Amplitude-dependent Exponential AR Model Fitting for Non-linear Radom Vibration, Time Series, 1980
2. 赵凯华、朱照宣、黄均, 《非线性物理导论》, 北京大学非线性科学中心, 1992

### THE STUDY ON EXPONENTIAL AUTOREGRESSION MODEL ORIGINATED FROM NON-LINEAR AUTO-VIBRATION AND SEISMICITY

Yang Liming, Guo Daqing and Shi Telin

(Earthquake Research Institute of Lanzhou, SSB, China)

#### Abstract

The seismicity is characterized by the higher level in active period but the lower level in quiet for magnitude and frequency, and the interlace of these two periods. To study this mechanism, we used the exponential autoregression model which is originated from non-linear auto-vibration. The results show that the exponential autoregression model better reveals the preceding characters of seismicity, meanwhile the attenuation trend in this century is obtained. It is possible to expose the dynamical mechanism of earthquake according to the method of non-linear vibration.

**Key words:** Auto-vibration, Exponential autoregression model, Seismicity