

二维层状介质点电源边界单元解

马钦忠 钱家栋

(国家地震局兰州地震研究所)

摘 要

本文用付氏变换将点源二维地电断面的三维边值问题变成二维边值问题,然后讨论了边界元法在解决层状介质中存在二维柱体时点源场视电阻率计算问题中的应用。由于选取的基本解避免了对水平层状界面的积分计算,从而大大减少了边界剖分节点数。在计算中设法略去了对边界上位场法向导数的求解,使未知量大为减少,从而便利了求解二维边值问题,并由付氏反变换求得三维空间中的位。本方法所需计算机内存少,原始数据的输入简单,且有较高的计算精度。

引 言

边界单元法^[1]是一种较新的数值计算方法。与有限元法相比,边界单元法不是在区域内剖分网格,而是只在区域的边界上剖分单元,故其解算一个问题时所需的方程个数及所需的原始数据都比有限元法要少得多。其精度一般高于有限元法,且所需计算机内存少、计算速度快。对于电法中常遇到的无限域问题来说,边界单元法是较适宜的数值方法。

自边界元法被引入到电法^[2]后就显示了巨大的作用。目前已解决了许多较复杂的问题。但对于水平层状介质中含有异常体的问题,由于遇到了界面向无穷远延伸的问题,则需将界面剖成许多节点,工作量大。对此,本文在选择了适当的基本解后就较好地解决了这个问题,加之本文在理论推导中设法消除了位场在边界上的法向导数,因而最后形成的代数方程组规模是相当地少了。这就为数值计算带来了很大的方便。本文是以两层水平层状介质中含有柱形异常体的地电模型为例进行理论分析和数值计算的。

一、边值问题

设模型如图1所示。设介质沿地质体走向是均匀的。其坐标系为x轴沿剖面方向,y轴沿地质体走向方向,z轴垂直地面向下。A点为供电点(点电流源),第一层介质厚为 H_1 ,电阻率为 ρ_1 ,其中圆柱体的电阻率为 ρ_3 ;第2层介质的电阻率为 ρ_2 。设 Γ_∞ 是以 $r_A = \infty$ 为半径的假想半无限圆柱面,则边界 Γ_s 、 Γ_1 、 Γ_1 、 Γ_∞ 将整个区域分为 Ω_1 、 Ω_2 、 Ω_3 三个区域(图1)。 u_1 、 u_2 、 u_3 分别是这三个区域中的电位,则此模型的三维边值问题为:

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla^2 u_i(x, y, z) &= -2\rho_i I \delta_3(A), \quad i=1, 2, 3; \\
 \frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} &= 0; \\
 u_1 \Big|_{\Gamma_2} &= u_2 \Big|_{\Gamma_1}; \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1}; \\
 u_1 \Big|_{\Gamma_1} &= u_3 \Big|_{\Gamma_1}; \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial u_3}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1}; \\
 u_2 \Big|_{\Gamma_\infty} &= C / \sqrt{r_A^2 + y^2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 I 是点电源的电流强度, $\delta_3(A)$ 是以 A 为中心点的三维狄拉克函数。

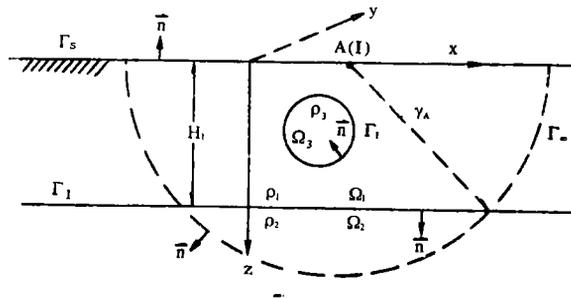


图 1

(1) 式为三维微分方程组, 现在用付氏变换将它变成二维微分方程组。为此, 对 (1) 式在 y 方向进行付氏变换。考虑到 u 是 y 的偶函数, 定义下列付氏变换:

$$U_i(x, k, z) = \int_0^{\infty} u_i(x, y, z) \cos ky dy, \quad (2)$$

记作 $U_i = F[u_i]$ 。

根据付氏变换性质, 并利用关系

$$\int_0^{\infty} \delta_3(A) \cdot \cos ky dy = \frac{\delta_2(A)}{2}$$

(其中 $\delta_2(A)$ 是以 A 为中心的二维 δ -函数), 对 (1) 式进行付氏变换, 得

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla^2 U_i - k^2 U_i &= -\rho_i \cdot I \cdot \delta_2(A), \quad i=1, 2, 3; \\
 \frac{\partial U_i}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} &= 0; \\
 U_1 \Big|_{\Gamma_1} &= U_2 \Big|_{\Gamma_1}; \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial U_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1}; \\
 U_1 \Big|_{\Gamma_1} &= U_3 \Big|_{\Gamma_1}; \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial U_3}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1}; \\
 U_2 \Big|_{\Gamma_8} &= C \cdot K_0(kr_A).
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3) 式便降为二维边值问题, $C \cdot K_0(kr_A)k$ 作为参数出现在方程中。若对足够多的 k 求解方程 (3) 中第一式, 然后进行付氏反变换

$$u_1(x, y, z) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty U_1(x, k, z) \cos ky dk, \quad (4)$$

即可求得电位函数 u_1 。

令 ϕ_1 、 ϕ_2 为基本解，则其满足的方程及表达式为：

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi_1 - k^2 \phi_1 &= -\delta_2(P), P \in \Gamma_1; \\ \nabla^2 \phi_1 - k^2 \phi_1 &= -\frac{1}{2} \delta_2(P_1), P_1 \in \Omega_1 \text{ 内部}; \\ \nabla^2 \phi_2 - k^2 \phi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{4\pi} [K_0(kR) + K_0(kR')] + \int_0^\infty B_1(\lambda) (e^{\lambda z} + e^{-\lambda z}) \\ &\quad \cdot \frac{\cos[(x-x_p)\sqrt{\lambda^2-k^2}]}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} \cdot d\lambda; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\phi_2 = \int_k^\infty A_2(\lambda) \cdot e^{-\lambda z} \cdot \frac{\cos[(x-x_p)\sqrt{\lambda^2-k^2}]}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} \cdot d\lambda.$$

其中

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(x-x_p)^2 + (z-z_p)^2}; \\ R' &= \sqrt{(x-x_p)^2 + (z+z_p)^2}; \\ R_p &= \sqrt{R^2 + y^2}; \\ R_p' &= \sqrt{R'^2 + y^2}; \\ K_{12} &= (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_2 + \rho_1); \end{aligned}$$

$$B_1(\lambda) = \frac{\rho_1 \cdot \text{ch}(\lambda z_p)}{2\pi} \cdot \frac{K_{12} \cdot e^{-\lambda H_1}}{1 - K_{12} \cdot e^{-2\lambda H_1}}$$

$$A_2(\lambda) = \frac{\rho_1 \cdot \text{ch}(\lambda z_p)}{2\pi} \cdot \frac{1 + K_{12}}{1 - K_{12} \cdot e^{-2\lambda H_1}}$$

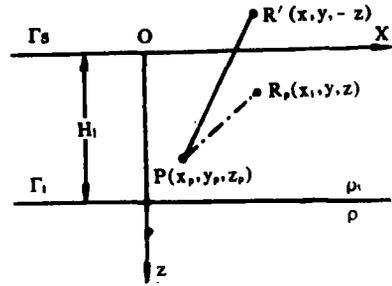


图 2

点 $P = (x_p, y_p, z_p)$ 为第一层介质中的点。点 (x, y, z) 为任意一点，如图 2 所示。 ϕ_1 、 ϕ_2 满足的边界条件为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{\Gamma_s} &= 0; \\ [\rho_1 \phi_1 = \rho_2 \phi_2] \Big|_{\Gamma_1}, \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right] \Big|_{\Gamma_1}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

二、积分方程

在场论中，二维问题的格林公式表述为

$$\int_{\Omega} (U \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 U) \cdot d\Omega = \int_{\Gamma} \left(U \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\Gamma. \quad (8)$$

其中 Ω 是 xz 平面上的二维区域； Γ 是 Ω 的边界线。对于图 1 所示的模型即两层水平层状介质中含有柱体的横向不均匀模型中，介质是分区均匀的，将区域分解为 Ω_1 、 Ω_2 、 Ω_3 三个区域，分别对这三个区域用格林公式 (8) 求解。

1) 设P是 Ω_1 中某一点, 将P点置于地表, 并令 $P = P_s \in \Gamma$,

此时分别对 Ω_1 、 Ω_2 、 Ω_3 用格林公式(8)求解, 可得

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} (U_1 \nabla^2 \phi_1 - \phi_1 \nabla^2 U_1) d\Omega + \int_{\Omega_2} (U_2 \Delta^2 \phi_2 - \phi_2 \nabla^2 U_2) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_s + \Gamma_1 + \Gamma_1} \left(U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \phi_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_\infty - \Gamma_1} \left(U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \phi_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{及} \quad \int_{\Omega_3} (U_3 \nabla^2 \phi_1 - \phi_1 \nabla^2 U_3) d\Omega = - \int_{\Gamma_1} \left(U_3 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \phi_1 \frac{\partial U_3}{\partial n} \right) d\Gamma. \quad (10)$$

然后将边值问题(3)、(5)和(7)式代入上两式并经过一定的数学推导, 就可得到一个积分方程:

$$U_{1P_s} = \rho_1 I \phi_{1AP_s} - 2 \rho_1 \int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_3} \right) U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} d\Gamma_1. \quad (11)$$

其中 $U_{1P_s} = U_1(x_{P_s}, 0, k, x_A, 0)$; $\phi_{1AP_s} = \phi_1(x_{P_s}, 0, k, x_A, 0)$ 。

在(11)式中, 当知道了边界 Γ_1 上的 U_1 值后, 便可求得地面 Γ 的 U_{1P_s} 值。

2) 假设将P点放置在边界 Γ_1 上, 并令此时的 $P = P_1 \in \Gamma_1$

对区域 Ω_1 、 Ω_2 、 Ω_3 重新分别用格林公式(8)求解, 可得与(9)、(10)式类同的方程。利用边值问题、基本解满足的方程及其边界条件(3)、(5)和(7)式中的关系, 经过一定的数学处理后可得另一个积分方程:

$$\left[\frac{1}{\rho_3} + \frac{\omega_{1P_1}}{2\pi} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_3} \right) \right] U_{1P_1} = I \cdot \phi_{1AP_1} - 2 \int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_3} \right) U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} d\Gamma. \quad (12)$$

其中 ω_{1P_1} 是 P_1 点对区域 Ω_1 所张的立体角。上式中 U_1 都是 Γ_1 上的点, 故(12)式离散化后可独立求解并解出边界 Γ_1 上分点的 U_1 值, 然后将这些值代入(11)式后就即可求得地表的 U_{1P_s} 值, 并由(4)式进行反付氏变换即可求得地表的电位。

在(11)式和(12)式中, 当令 $\rho_1 = \rho_2$, 就可得到电阻率为 ρ_1 的半无限空间中含有一圆柱体的结果。当令圆柱半径 $r = 0$ 时就可得到两层水平层状介质的解析解。可以看到, 因为横向不均匀, 故地表上电位分布对均匀水平层状介质电位的畸变完全来自于圆柱边界上的电荷分布。

三、边界单元法

对(11)式和(12)式进行数值计算时, 用NS个节点将边界 Γ 剖分成NS-1个单元, 用NI个节点圆柱边界 Γ_1 剖分成NI个单元。

如在积分方程(12)式中, 对 Γ_1 上的节点i有如下离散化的积分方程:

$$\left[\frac{1}{\rho_3} + \frac{\omega_{1i}}{2\pi} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_3} \right) \right] U_{1i} = I \cdot \phi_{1Ai} - \sum_{e=NS}^{NS+NI-1} 2 \cdot \int_{\Gamma_s} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_3} \right) U \frac{\partial \phi_1}{\partial n} d\Gamma. \quad (13)$$

单元两端节点编号为j, K, 假定U在各单元上是线性变化的, 用 U_j, U_K 表示 j, K 的 U, 则在单元上的 U 可表示为

$$U = \sum_e \xi_e U_e, \quad (e = j, K).$$

单元 Γ_e 的积分为

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} 2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_3} \right) U \frac{\partial \phi_1}{\partial n} d\Gamma &= \sum_e \left[\int_{\Gamma_e} 2 \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_3} \right) \cdot \xi_e \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial n} d\Gamma \right] \cdot U_e \\ &= \sum_e f_{1e} \cdot U_e. \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $f_{1e} = \int_{\Gamma_e} 2 \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_3} \right) \cdot \xi_e \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial n} d\Gamma, \quad (e = j, K).$

上式积分很难用解析式计算, 但可用高斯求积公式^[1]及尤拉变换法^[4]计算。

各单元的积分之和:

$$\begin{aligned} \sum_{e=NS}^{NE-1} \int_{\Gamma_e} 2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_3} \right) \cdot U \frac{\partial \phi_1}{\partial n} d\Gamma &= [F_{1NS+1} \cdots F_{1NS+j} \cdots F_{1NE}] \\ &\cdot \{ U_{NS+j} \cdots U_{NE} \}^T = F_1 \cdot U. \end{aligned}$$

其中 F_{1j} 是 j 节点两侧单元的 f_{1j} 之和, $NE = NS + NI$, $F_1 = [F_{1NS+1}; \cdots F_{1j}; \cdots F_{1NE}]$,

$$U = \{ U_{NS+j} \cdots U_j \cdots U_{NE} \}^T.$$

对节点 i, (13) 式可写成

$$\left[\frac{1}{\rho_3} + \frac{\omega_{1i}}{2\pi} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_3} \right) \right] U_{1i} = I \cdot \phi_{1\Lambda i} - F_1 \cdot U. \quad (15)$$

对每个节点都得到如上式的一个方程, 由全部节点, 得一组方程, 记作

$$(\omega + F) \cdot U = I \cdot \Phi_{\Lambda}. \quad (16)$$

其中 $\omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_3} + \frac{\omega_{1NS+1}}{2\pi} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_3} \right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \frac{1}{\rho_3} + \frac{\omega_{1NE}}{2\pi} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_3} \right) \end{pmatrix}$

$$F = [F_1, \cdots F_i \cdots F_{NI}]^T; \quad \Phi_{\Lambda} = \{ \phi_{1\Lambda NS+1} \cdots \phi_{1\Lambda i} \cdots \phi_{1\Lambda NE} \}^T.$$

方程 (16) 含有 NI 个方程和 NI 个未知数 $U_{1NS+1} \cdots U_{1NE}$ 。用高斯消去法解此线性代数方程组, 可得边界 Γ_I 上各节点的 U 值。

对积分方程 (11) 式作同样的离散处理, 则对地面 Γ_s 上的节点 P, 可得到:

$$U_{P_s} = \rho_1 \cdot I \cdot \phi_{1AP_s} - \rho_1 \cdot \sum_{j=NS+1}^{NE} F_{P_s j} \cdot U_j. \quad (17)$$

然后将边界 Γ_I 上各节点的 U 值代入上式便可求出地表 P_s 处的 U 值。对 U 值利用 (4) 式进行反付氏变换即可求得电位函数 u_1 值。

四、算 例

本文对图 1 所示的模型中的主截面（即 $y = 0$ 的截面）进行了不同装置系统下视电阻率曲线的计算。图 3、图 4 是用中间梯度法装置系统下所计算的视电阻率曲线。假设覆盖层（第一层介质）中所埋水管比较靠近地表， $H_0 = 4$ 米，半径 $R = 1$ 米，当圆柱管道是高阻体时，如 $\rho_3 = 300 \Omega \cdot m$ 时，则视电阻率曲线在管道上方时达到最大值，此时曲线相对于均匀二层水平层状介质曲线的畸变达到最大值，如图 3 所示。而当管道是低阻体时，如 $\rho_3 = 0.5 \Omega \cdot m$ 时，则当视电阻率曲线通过管道上方时达到最小值，如图 4 所示。图 5 与图 6 是管道正上方处的视电阻率测深曲线。由图 5 可以看到，当 $\rho_3 = 400 \Omega \cdot m$ 即管道是高阻体时管道上方的测深曲线要比二层水平层状介质测深曲线高，即此时视电阻率值较之于无管道时的值为大，视电阻率异常呈正异常。而当 $\rho_3 = 0.5 \Omega \cdot m$ 时，即管道是低阻体时，管道正上方的测深曲线较之二层水平层状介质测深曲线要略低即视电阻率较小，视电阻率异常呈负异常，见图 6。计算结果表明，无论介质表面用何种装置系统，用本文方法均可求得一条偏离二层水平介质视电阻曲线的畸变曲线，即反映出了覆盖层中横向不均匀性所产生的影响。计算结果还表明， H_0 值越大，即管道埋得越深，则曲线畸变越小；管道半径 R 越大，则曲线畸变也越大；管道半径 R 越小，则曲线畸变也越小。这些计算结果文中没有给出。与一般模型实验结果相比，本文计算结果是合理的。

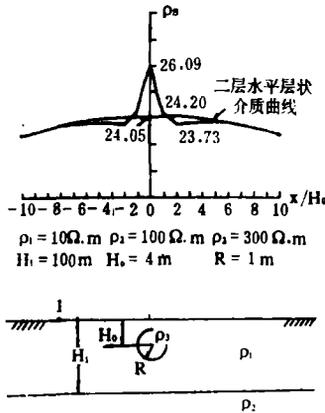


图 3

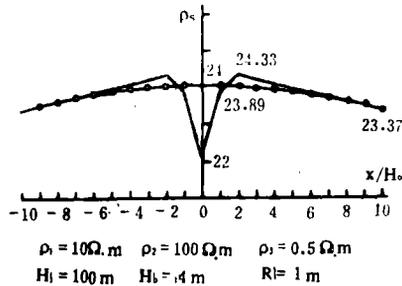


图 4

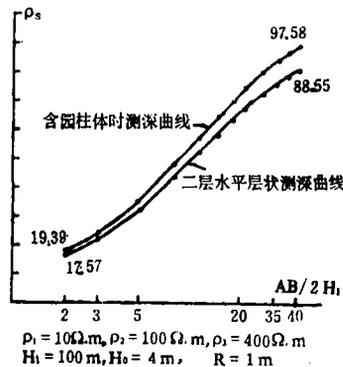


图 5

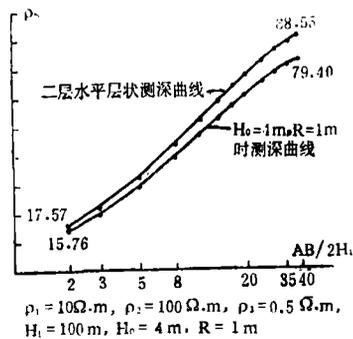


图 6

五、结 论

通过理论推导和实际计算，可得如下结论：

(1) 在本文理论推导中对层状介质中水平边界积分的删除是成功的，从而大为减化了边界积分公式，并且在推导公式中设法消去了求解边界上电位谱的法向导数，这样就使得未知量的个数大为减少，大大节省了计算机内存，从而为数值计算带来了极大的方便。

(2) 由理论分析可知，覆盖层中的圆柱形管道实际上可以是任意形状截面的柱体。并且当柱体存在于第二层介质中时本文方法也同样适用。

(3) 本文方法不仅对复杂地质条件下视电阻率资料解释有理论和实际意义，而且在地震预报中地电阻率法的台址条件、台站环境干扰影响以及地电阻率随时间变化的理论研究和实际工作中有广泛的应用前景。

(本文1990年10月14日收到)

参 考 文 献

- [1] Brebbia, C.A., The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, 1977.
- [2] M.Okabe, Boundary Element Method for the Arbitrary Inhomogeneties Problem in Electrical Prospecting, 1984.
- [3] 徐世浙, 点源二维地电剖面的边界元解法, 桂林冶金地院学报, Vol. 4, No. 4, 1984.
- [4] 钱家栋等, 水平层状介质视电阻率高精度计算公式及其误差分析, 西北地震学报, Vol. 8, No. 2, 1986.

THE BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR SOLVING ELECTRIC FIELD OF POINT SOURCE ON TWO-DIMENSIONAL LAYERED MEDIUM GEOELECTRICAL SECTION

Ma Qinzhong, Qian Jiadong

(Earthquake Research Institute of Lanzhou, SSB, Gansu, China)

Abstract

Using Fourier transformation, the 3-D boundary value problem of electric field of point source on 2-D geoelectric section is converted into 2-D boundary value problem. Then we discussed the application of boundary element method for calculating apparent resistivity on layered medium which contains 2-D column body. The integral calculation of horizontal boundary is avoided because of the selection of basic solution. So, the number of all needed boundary cut joints are much less. Particularly, it need not calculate the partial derivative any more, unknown quantities are decreased very much, so that it calculates 2-D boundary value problem conveniently. And using Fourier inverse transformation, we can obtain electric potential in 3-D space. The method proposed in this paper requires less memory, less original data needed for computer input, and has higher calculating accuracy.