

层状半无限空间中波动问题的数值模拟*

周民都

(国家地震局兰州地震研究所)

冯锐

(国家地震局地球物理研究所)

摘 要

本文对波动方程首先进行富里叶—贝赛尔积分变换,在波数 k 域内构成 (z, t) 的有限差分网格格式进行迭代,由此计算出纵向非均匀的层状模型的合成地震图。对含有低速层和高速薄层的几种模型做了对比计算,通过时间场与空间场的波动分析,揭示了几种主要震相的传播与形成过程。计算结果表明,无论高速层的厚薄如何,反射波始终很强烈,但初至首波在薄层构造中不清晰,一种属转换型的续至薄层首波震相值得注意;低速层的顶界面难以形成能量较强的上行波,因此在推断低速层埋深上存在不确定性。

一、引言

在利用地震波探索地球内部构造时,由射线理论与波动理论出发形成了两种基本的研究途径。地震射线方法的优点在于可从运动学上明确而直观地揭示深部构造,在动力学上也可采用高斯束法构制二维合成地震图。射线方法虽然在地震测深中有广泛的应用,但在揭示介质物性上(例如非弹性、吸收、频率影响等等)和研究某些特殊构造上(例如薄层、空腔等),存在理论上的限制,而波动方法恰在后者上显示了它的优点。目前地震波理论的研究正从射线方法向波动方法,从一维向三维,从介质的完全弹性体向粘弹性体方向发展。

在研究地震波速的纵向分布方面,低速层和薄层构造是人们十分关注的问题。目前的问题在于,低速层存在的地震波证据是什么?除走时曲线的中断与逆进外,在波动过程中还有哪些特点有待认识。此外,随着国际上超深钻研究的开展,薄层(或高低速夹层)在构造上的地位也日益被人们重视,地壳内物质的水平运动包括大规模的滑脱构造可能均与它有关,地震测深中的若干震相可望由此得到解释^[1,2]。当然,要可靠地确定薄层构造也很困难,

因为在分析隧道波和薄层首波震相时往往存在争议。本文根据Aleksseev^[3,4]的研究垂向不均匀介质波动场的有限差分方法,对数值计算采取了一定的稳定和加速措施,通过不同算法对含有低速层和高速薄层的几种模型作了对比计算,从时间剖面与空间剖面上分析了波动过程的特点,并揭示了一些低速层与高速薄层的波动效应。

二、计算方法

本节讨论一个集中力作用在垂向不均匀弹性介质内部所形成的位移场的问题。由于这个问题在几何上具有轴对称的性质,故采用柱坐标 (r, z) 较为方便。对于弹性不均匀介质,运动方程为

$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \vec{u} + \nabla \cdot \vec{u} \nabla \lambda + 2 \nabla \mu \cdot \vec{E} = \rho \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 \quad (1)$$

设边界条件和初始条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r|_{z=0} &= -f(t) \delta(r)/r, \\ \tau_{rz}|_{z=0} &= 0, \\ \vec{u}|_{t=0} &= \partial \vec{u} / \partial t|_{t=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 $\vec{u} = (u_r, u_z)^T$ 是位移矢量; $\rho(z)$ 是介质的密度; $\mu(z)$ 、 $\lambda(z)$ 是拉梅常数; σ_r 、 τ_{rz} 是法向和切向应力; $f(t)$ 是震源的时间函数; E 是形变张量。

对于分层均匀介质,则 ρ 、 μ 、 λ 在每一确定的层中是常数。(1)式可以写成

$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \vec{u} = \rho \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 \quad (3)$$

对 u_r 、 u_z 进行富里叶—贝赛尔积分变换:

$$u_r = \int_0^\infty S(z, k, t) J_1(kr) dk \quad (2)$$

$$u_z = \int_0^\infty R(z, k, t) J_0(kr) dk \quad (4)$$

代入(3)式并令

$$G = \begin{bmatrix} S(z, k, t) \\ R(z, k, t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{得} \quad -\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + A(z, k) \frac{\partial G}{\partial z} + B(z, k) G = C(z) \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \quad (6)$$

对边界条件和初始条件进行同样的处理,有

$$\left[-\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + D(z, k) G \right]_{z=0} = \varepsilon \quad (7)$$

$$G|_{t=0} = \frac{\partial G}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (8)$$

其中 A 、 B 、 C 、 D 均为二阶系数矩阵, (7)式中

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k}{\lambda + 2\mu} f(t) \end{pmatrix}$$

为解题的需要,引入一个右端边界附加条件:

$$G|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad (9)$$

对(6)-(9)式进行离散化处理,选择一个稳定性较好的隐格式。设 z 方向的空间步长 $\Delta z = h$, t 方向的时间步长 $\Delta t = \tau$, 对 $\partial^2 G / \partial z^2$ 、 $\partial^2 G / \partial t^2$ 分别用对 z 和 t 的二阶中心差商逼近, $\partial G / \partial z$ 用对 z 的一阶中心差商逼近, 隐格式的逼近误差为 $O(\tau^2 + h^2)$ 。令 $G_m^j = G(z_m, t_j) = G(mh, j\tau)$, 则(6)式的差分格式为

$$\xi_m G_{m+1}^{j+1} - \xi_m G_m^{j+1} + \eta_m G_{m-1}^{j+1} + F_m^{j+1} = 0 \quad (10)$$

式中 ξ_m 、 η_m 为二阶方阵, F_m^{j+1} 为二阶列阵。对(7)式离散, 得

$$\frac{1}{2h} (G_1^j - G_{-1}^j) + D_0 G_0^j = \varepsilon \quad (11)$$

把(9)式离散化, 得

$$G_N^{j+1} = 0 \quad (12)$$

同理, (8)式的离散格式为

$$\left. \begin{array}{l} G_m^0 = 0 \\ G_m^1 = 0 \end{array} \right\} (m = 0, 1, \dots, N-1) \quad (13)$$

N 为空间步长 m 的上限。

到此为止, 可按(10)-(13)的格式, 用对角矩阵块的追赶法算出每一个 $(j\tau)$ 时间段上的 G_m^j ($m = 0, 1, \dots, N-1$)值。下面我们推导追赶法的计算公式。记

$$G_0^{j+1} = X_0 G_1^{j+1} + Y_0^{j+1} \quad (14)$$

$$G_m^{j+1} = X_m G_{m+1}^{j+1} + Y_m^{j+1} \quad (15)$$

$$\text{或} \quad G_{m+1}^{j+1} = X_{m+1} G_m^{j+1} + Y_{m+1}^{j+1} \quad (16)$$

把(16)式代入(10)式后与(15)式比较, 得

$$\left. \begin{array}{l} X_m = -(\xi_m + \eta_m X_{m-1})^{-1} \xi_m \\ Y_m^{j+1} = -(\xi_m + \eta_m X_{m-1})^{-1} (\eta_m Y_{m-1}^{j+1} + F_m^{j+1}) \end{array} \right\} \quad (m = 1, 2, \dots, N-1) \quad (17)$$

对于不同的 k 值, 按(11)、(14)式可算出 X_0 、 Y_0^{j+1} , 然后, 用(17)式依次算出 X_1 、 Y_1^{j+1} 、 $\dots$ 、 X_{N-1} 、 Y_{N-1}^{j+1} , 再用(13)、(16)式逐次算出 G_{N-1}^{j+1} 、 G_{N-2}^{j+1} 、 $\dots$ 、 G_0^{j+1} 。当第 $(j+1)$ 、 $(j+2)$ 时间段的 G 值算出后, 用同样的追赶法即可得到 $(j+3)$ 时间段上的 G 值。待把整个 G 值都算出后, 代入(4)式, 用数值积分即可得到位移场分量 u_r 、 u_z 。

应当指出, 右端边界条件(9)式是可变的, 它依赖于波前的位置, 引入的目的在于避免虚假反射的干扰。

三、数值模拟

图1给出了层状模型的一个典型例子。模型厚3.5km, 将其均匀地划分成70层, 其弹性参数 $\lambda = \mu$ 。在模型中1km厚的高速层下部设计了一低速层, 以便能反映出中地壳地震波传播中的某些特点。集中力的时间函数为

$$f(t) = \begin{cases} C[\sin(2\pi t/T) - 0.5\sin(4\pi t/T)] & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (t < 0) \quad (t > T) \end{cases} \quad (18)$$

取 $T = 0.2s$, 时间步长 $\tau = 0.02s$, 迭代总次数 $J = 300$, 地震记录时间 $t = J\tau = 6s$, 地震波

在三层中的波长分别为0.2km、0.4km和0.3km,模型纵向的离散步长 $h=0.05\text{km}$,为波长的 $1/4-1/8$ 。模型的表面为自由边界,底部为固定边界。试算表明,上述参数的选取可以保证迭代过程的稳定。在计算中,振荡型函数的数值积分(4)式是保证速度与精度的重要环节,我们采用了Pearson^[5]和钱家栋^[6]等推荐的Gauss积分和Euler变换法,得到了较满意的结果。

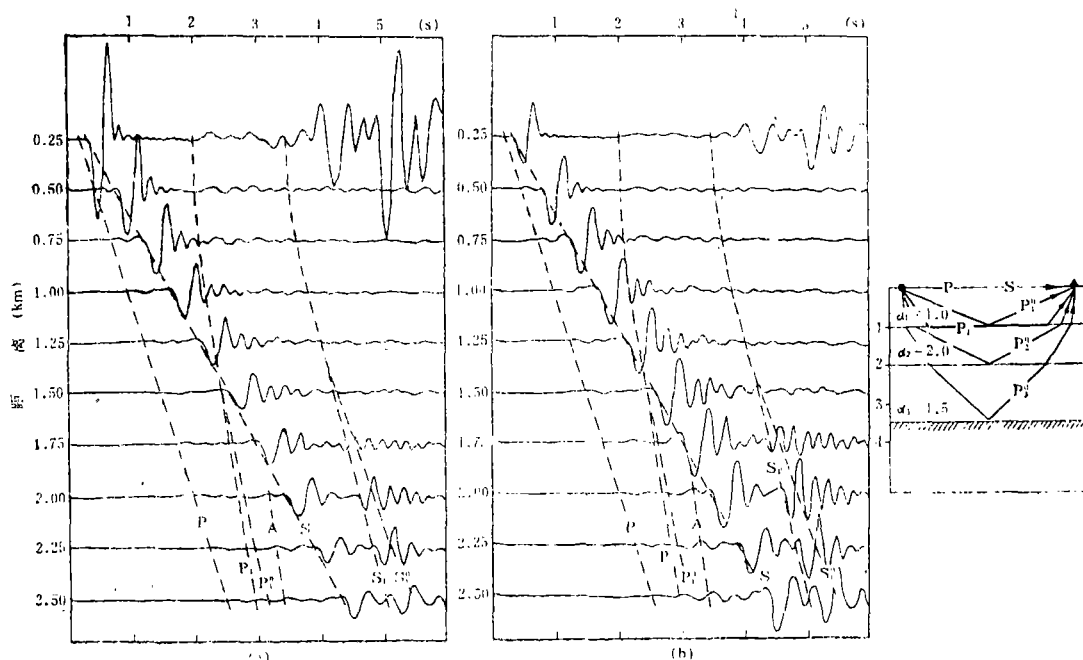


图1 垂直向合成地震图

Fig. 1 Synthetic seismogram in vertical component according to the model

从图1所给出的垂直向合成地震图中可以看到,除第一道($r=0.25\text{km}$)在4s之后出现因模型底边界反射波引起的自激振荡外,几个主要震相的走时同射线理论预期的结果均有很好的吻合。图1(a)、(b)分别给出了依整体最大振幅和各道最大振幅进行的规范记录。该时间剖面的突出优点是信息量极其丰富,除因模型离散化造成了部分高频成分的损失外,它无遗漏地包含了波动场的全过程。可以看到,记录图中的最强震相是直达剪切波S,视周期0.5s,随着距离的增大其周期变化不大而振幅衰减显著(图1a)。S波的传播对较高频率的反射纵波存在干扰,例如首波 P_1 的临界距离 $\Delta=1.15\text{km}$,这时正值直达P波、反射波 P_1' 同S波相遇,结果纵波成分完全被周期与振幅均很大的S波压制。记录图中另一个引人注目之处是随着距离的增大,震相愈加丰富,波形愈加复杂,这在 $\Delta \geq 2.00\text{km}$ 的最后几道上十分清晰,此时波动过程的干涉迭加和多次反射均混在一起,例如在 P_1' 波和S波之间的续至波中存在一明显的新震相A,视周期0.3s,视速度与 P_1 相同,看来其具有首波的性质。转换波也存在,但必需对比垂直水平分量的合成图才能确定。

作为一个对比,图2给出了按同样模型但分别用Fuchs反射率法和Cerveny高斯射线束法计算出的地震图。同图1相比,在相应震相的波动特征上彼此吻合。但亦应指出,受到理论上的限制,这两种方法虽能较好地反映出反射波的动力学特征,特别是在临界距离附近振幅的强烈变化,但都不能给出整个波动过程的信息,例如纵横直达波和首波本是能量很强

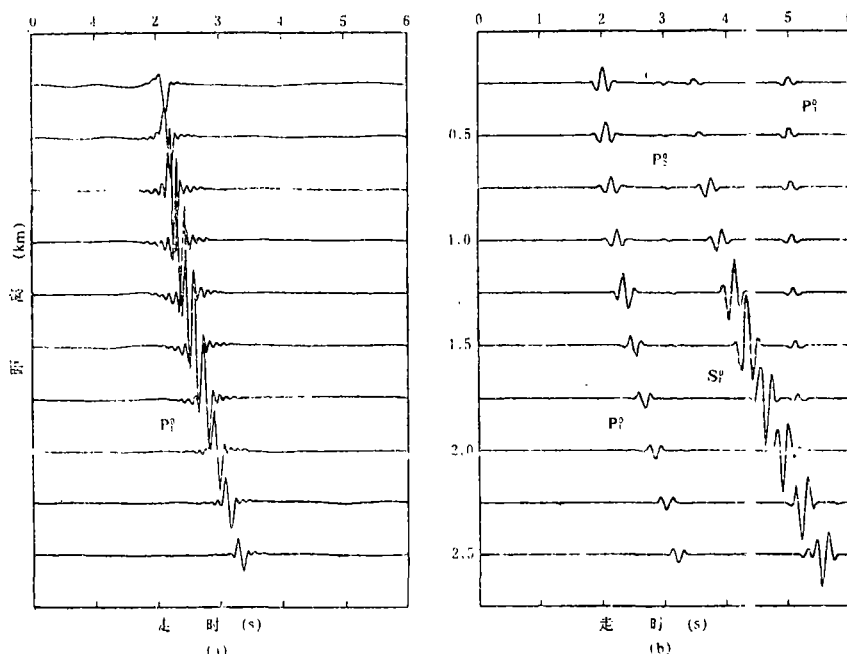


图2 对图1模型用反射率法和高斯射线束法求得的合成地震图

Fig. 2 Synthetic seismograms calculated by Reflectivity and Gaussian Beam Methods for the model in fig. 1

的震相,但在这两种合成图中都没有或仅有微弱的显示。从这个意义上看,在处理地震勘探与人工地震测深资料时,适当辅以有限差分或有限元的数值模拟是有必要的。

图3从空间域揭示了该模型中波的传播过程,图中的数字为相应的时刻。可以看到,直达波S的产生,同震源与接收点均布设在地表有关,垂直向的脉冲力在地表造成了最大的纵向位移。从直达、反射与首波的波前位置还可以看出,高速层的上界面在纵向上强烈地反射了下行波,在横向上又激发了侧面波(首波)。与此相反,从下界面(亦即下部低速层的顶界面)处返回的上行波,强度明显变弱,波长由于层速度的偏高已经变大,这对于准确判断有关低速层震相的走时是不利的。至于前述时间剖面中的A震相(图1),从波动空间传播上看(图3),是一种转换性的首波,即直达S波传到高速层上界面之后,在临界距离大约1km以后转换成纵波性的侧面波,其视速度与 P_1 相同,但到时比 P_1 波晚约0.5s。运动学的走时计算排除了干涉性首波的可能。

四、低速层与薄层的波动效应

随着地震测深工作的开展,低速层与薄层的波动效应已引起人们的重视。无论是在垂直反射波观测还是在宽角反射或折射剖面观测中都已经发现,深层的反射或首波震相在记录中出现得相当多,如果都是由速度的一级间断面所引起的话,那么速度分布的累积递增将导致Moho面处的过高速(图4a),这显然是不合理的。一种可能的推断是认为地壳中存在有若干个低速层或高速薄层(图4b),它们构成了为数相同的正速度间断面,于是在下地壳累积的速度值便不会过高。但是,这种高低速相间分布的速度模型是否会造成过多的首波

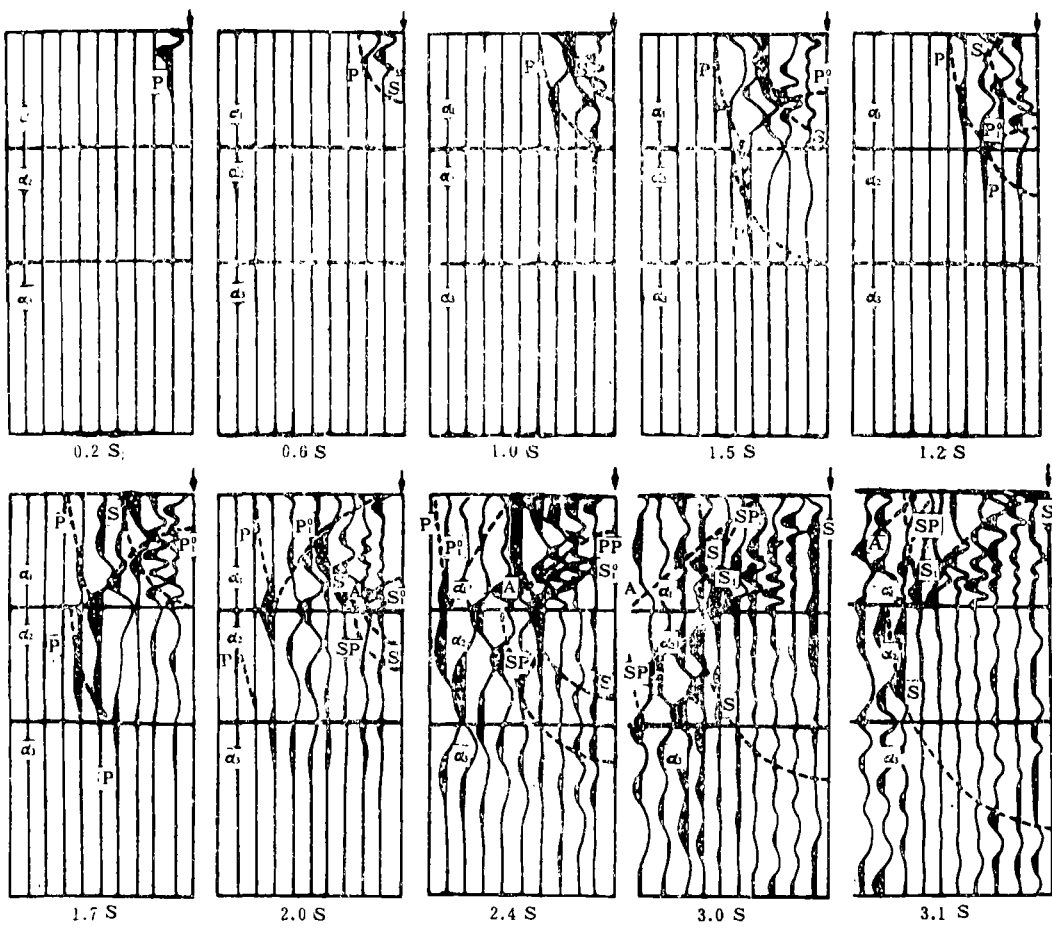


图3 波动的传播过程
Fig. 8 Wave propagation in the model

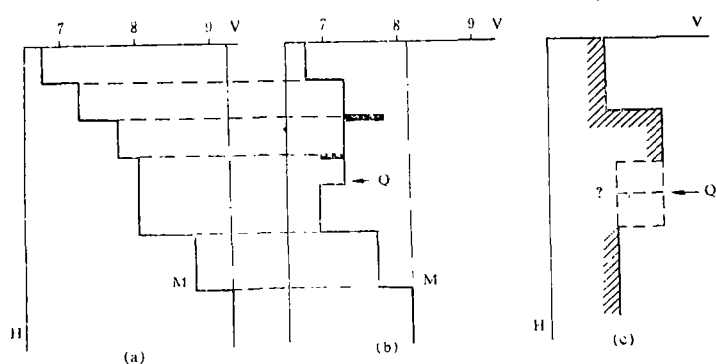


图4 几种可能的地壳速度模型
Fig. 4 Several possible velocity models in the crust

和低速层顶面（图4b的Q点处）的反射波震相，是需要进行研究的。
从理论上讲，在负的速度间断面处反射系数R相当小。因为当P波由界面上方入射时，其位移的反射系数可按式严格计算出来〔7〕：

$$R = -1 + 2P_1 D^{-1} (\alpha_2 \beta_2 P_2 X^2 + \beta_1 \alpha_2 \rho_1 \rho_2 P_4 + q^2 \theta^2 P_2 P_3 P_4). \quad (19)$$

其中 α_1 、 β_1 、 ρ_1 、 α_2 、 β_2 、 ρ_2 分别为界面上方和下方的P波、S波速度及密度, θ 为射线参数, 并有

$$\begin{aligned} V_1 &= \alpha_1, \quad V_2 = \beta_1, \quad V_3 = \alpha_2, \quad V_4 = \beta_2; \\ P_i &= (1 - V_i^2 \theta^2)^{1/2}, \quad (i = 1, 2, 3, 4); \\ q &= 2(\rho_2 \beta_1^2 - \rho_1 \beta_2^2); \\ D &= \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \theta^2 Z^2 + \alpha_2 \beta_2 P_1 P_2 X^2 + \alpha_1 \beta_1 P_3 P_4 Y^2 + \\ &\quad + \rho_1 \rho_2 (\beta_1 \alpha_2 P_1 P_4 + \alpha_1 \beta_2 P_2 P_3) + q^2 \theta^2 P_1 P_2 P_3 P_4; \\ X &= \rho_2 - q \theta^2; \\ Y &= \rho_1 + q \theta^2; \\ Z &= \rho_2 - \rho_1 - q \theta^2. \end{aligned}$$

只要下层的速度偏低, 地震波的主要能量便随透射波向下传播而不是返回上行, 例如在图 4c 的模型中, Q 界面的反射系数仅约 0.05-0.3 左右。这一点在数值模型的计算结果上也表现得很清楚。至于图 1、2 中 P_1^* 、 S_1^* 虽为低速层顶界面的反射波, 但它们的振幅已经小到难以辨认的程度。尽管由射线理论可以预估出这一震相的走时, 但实际的数值模拟结果表明, 用反射波震相确定低速层顶面位置或反演低速层埋深带有很大的不确定性 (图 4c)。

同样的现象在含有高速薄层的模型中也可以看到。在图 5 的模型中, 高速层的厚度为 0.2 km, 为波长的 1/2。图 5 的模型与图 1 模型的差异只是在高速层的厚度上。可以看到, 两张图很相似, P_1^* 依然明显, 这同实际观测与地震模型试验的结果是一致的^[8], 说明图 4 所推测的高低速相间分布的地壳结构是可能存在的。当薄层的厚度可以和波长相比时, 波的传播过

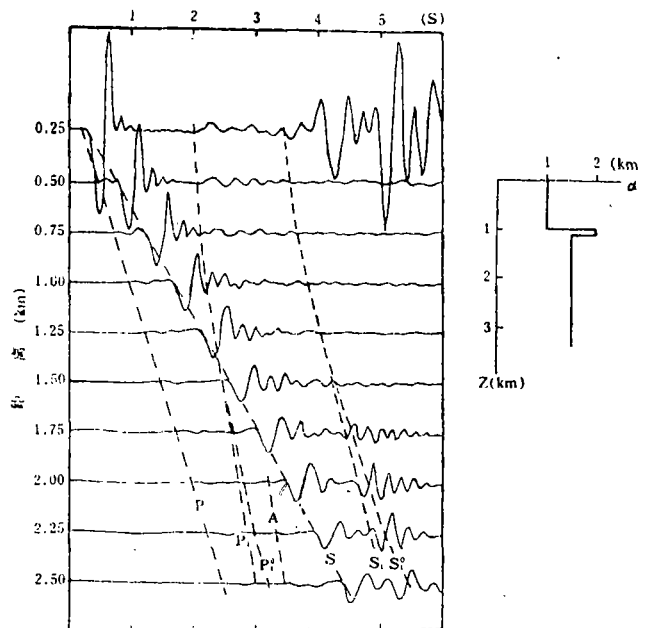


图 5 薄层模型的时间剖面

Fig. 5 Time section for a thin layer model

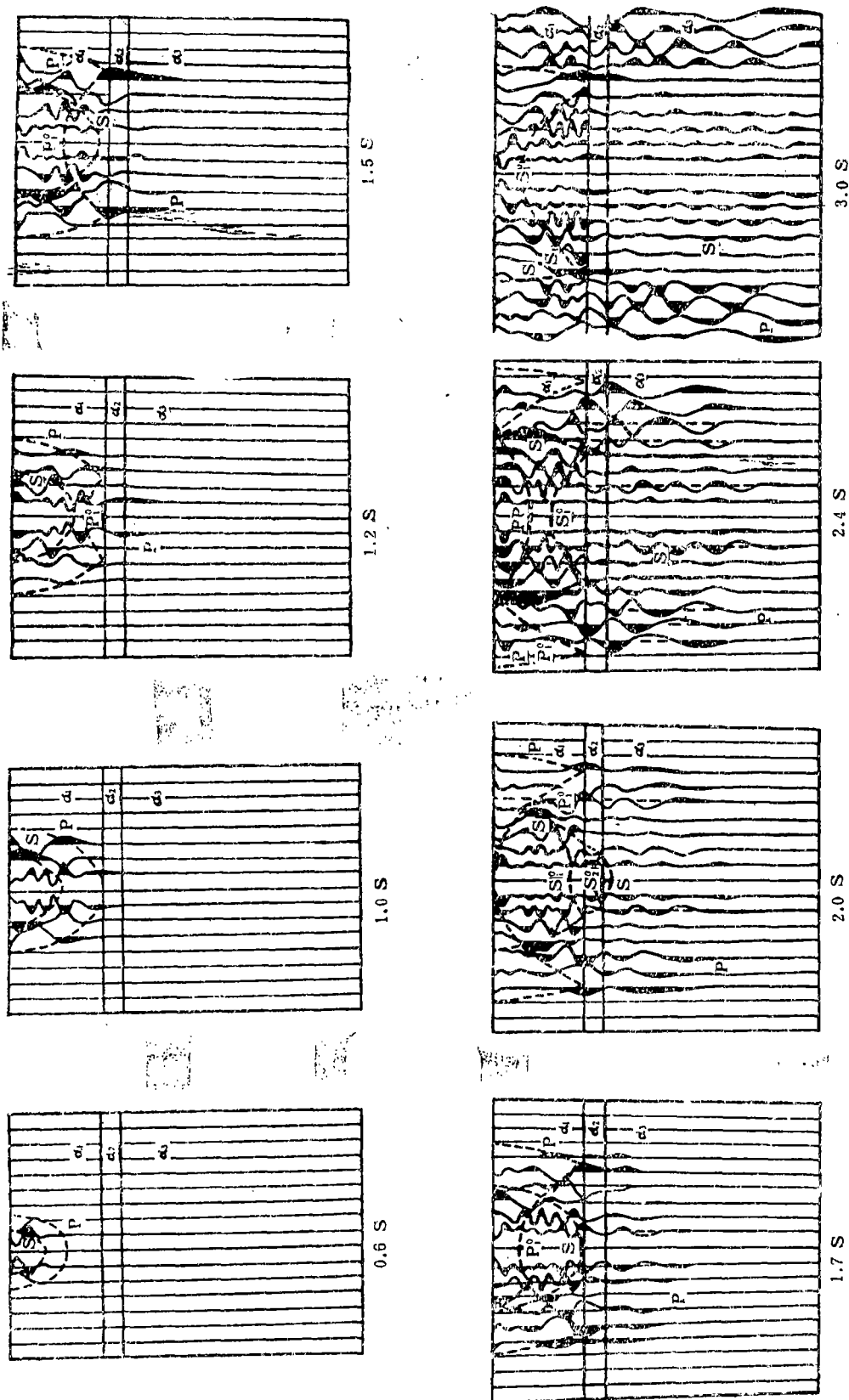


图6 薄层模型的空间剖面

Fig. 6 Space section for a thin layer model

程会出现一些特殊现象:从波的下行传播看,存在非射线效应的隧道波^[2、8],高速层对下覆构造的屏蔽作用已经大大减弱,底层的反射波、回折波与首波仍会有清晰的显示,但周期已变大。从波的上行传播看,薄层首波值得重视。在模型试验中发现^[9],薄层首波不仅沿高速层的表面传播,而且可以深入到二分之一波长的深处,首波的能量与下界面的波阻抗也有关。在野外观测中发现,在P波之后存在视速度与 P_1 相似而振幅较大的续至波震相,推断为薄层首波^[1]。但从我们计算的结果看,薄层首波 P_1 的振幅比厚层的明显减小,实际观测中未必能够辨认出来。此外,在它之后出现的续至震相A,虽振幅和周期均较大且走时属首波性质,表面上也与前述的实测结果相近,但经仔细分析后认为它属于转换性的薄层首波,它是由同一层中的横波转换为纵波时所激发的,不可能为更深层的首波。看来,影响薄层首波的因素较多,有关它的形成机制与震相特征都还值得进一步研究。

五、结 论

本文所采用的有限差分计算方法,对揭示层状半无限空间中的波动过程是有实用价值的,它有助于分析与揭示波动过程的细节并能提供出更为丰富的信息。当然,在做动力学数值模拟计算时运算量一般都很大。数值模拟结果表明,高速层的上界面是反射波与首波的重要形成界面,对下部的构造具有一定的屏蔽作用。低速层的上界面反射能量弱,难以用来可靠地确定低速层的上界面深度。薄层构造的反射波清晰,但首波微弱,而且存在一种属转换性的续至首波震相。

作者在工作中曾得到杨真荣的指导,武利均和谢剑波帮助做了模型对比计算,在程序设计上钱家栋提供了对贝赛尔振荡型函数积分的Euler变换的子程序,在此致以诚挚的谢意。

(本文1989年1月10日收到)

参 考 文 献

- [1]曾融生、胡鸿翔、高世玉,岩石圈下部的速度结构,地球物理学报, Vol.27, No.1, 31—41, 1984.
- [2]朱良保、宋仲和,江西永平爆破北西测线资料再解释,地球物理学报, Vol.30, No.2, 169—177, 1987.
- [3]周民都、冯德益,地震波在垂向不均匀介质中传播问题的某些探讨,西北地震学报, Vol.8, No.1, 53—64, 1986.
- [4]Alekseev, A.S., Mrkhailenko, B.G., The solution of dynamic problem of elastic wave propagation in inhomogeneous media by a combination of partial separation of variables and finite-difference methods, J.Geophys., Vol.48, 161—172, 1980.
- [5]Pearson, C.E., Handbook of Applied Mathematics, Van Nostrand Reinhold Company, N.Y., 1974.
- [6]钱家栋、赵和云、张文孝,水平层状介质视电阻率的高精度计算公式及其误差分析,西北地震学报, Vol.8, No.2, 10—19, 1986.
- [7]Cervený, V., Revindra, R., Theory of Seismic Head Waves, University of Toronto Press, 1971.
- [8]张智、郭铁栓、赵鸿儒、刘宝诚,厚度不同的高速夹层地震模型的研究,石油物探, No.4, 74—84, 1982.
- [9]Fuchs, K. and Schulz, K., Tunneling of low-frequency waves through the subcrustal lithosphere, J.Geophys., Vol.42, 175—190, 1976.

NUMERICAL MODELING FOR WAVE PROPAGATION IN A LAYERED HALF SPACE

Zhou Mindu

(*Earthquake Research Institute of Lanzhou, SSB, Lanzhou, China*)

Feng Rui

(*Institute of Geophysics, SSB, Beijing, China*)

Abstract

For a vertically inhomogeneous layered model, Fourier-Bessel integration transform is applied to the equation of wave propagation, after that a synthetic seismogram can be obtained by a finite-difference iteration in the wave number domain. Due to the separation between space and time variables after the transform, such algorithm is of stable and wide feasible. In the present paper some models involving a lower velocity layer (LVL) and a higher velocity thin-layer are studied for comparison. Through an analysis for wave propagation in space and time domain, the processes of propagation and generation of several prominent phases are revealed. Computational results indicate that no matter how much the thickness of higher velocity layer is the reflection wave is still strong, while the initial head wave from the thin-layer is not obvious. It is worthwhile to point out that there exists one kind of converted head wave in the thin-layer. It is found that the upward propagation wave with strong energy is hard to be formed at the top of LVL, which means that there is rather serious uncertainty at inferring the depth of LVL.