

粘弹性介质中地震体波 Q值的测定方法*

杜志俊

(国家地震局兰州地震研究所)

摘 要

本文以常用的几种粘弹性体模拟地球介质的粘弹性,建立了该种介质中的波动方程组;在运用合理的近似处理方法基础上,得到了基本解;提出了校正其它衰减因素的功率谱切比雪夫拟合方法,由此给出了粘性Q值的概念和算法,最后讨论了该方法的可行性。

一、引 言

利用地震体波测定小区域的Q值,对研究区域介质结构、震源机制以及地震预报具有一定的实际意义。目前测定地震体波Q值的常用方法有三种[1-3]。但这些方法均未突出考虑粘弹性介质的特殊特性,本文则主要研究了波在这种介质中的传播特性。

二、基本理论和方法

1. 应力、应变的基本关系

对于层状半空间地壳模型,考虑介质为均匀、非弹性、各向同性的固体,质点运动方程满足:

$$\rho \frac{\partial^2 y^i}{\partial t^2} = \frac{\partial p_i}{\partial y_i} \quad (1)$$

其中 P_i 是应力张量分量, ρ 是密度, y_i 是位置矢量的笛卡尔坐标分量, 它可写为:

$$y^i(t) = y_0^i + U_{p,i}^i(t) + U^i(t) \quad (2)$$

其中 y_0^i 是某初始 t_0 的位置矢量, $U_{p,i}^i$ 是不可恢复位移矢量, U_i 是弹性位移矢量。

对麦克斯韦体有:

$$\mu \epsilon = P \quad (3)$$

$$\eta \frac{d\epsilon_i}{dt} = P \quad (4)$$

* 本文是作者1987年硕士学位论文缩写稿。

其中 μ 是弹性常数, ϵ 、 ϵ_p 分别表示弹性变形与粘滞变形, P 是应力。

$$\begin{aligned} \text{则: } \frac{d\epsilon_i}{dt} &= \frac{d\epsilon}{dt} + \frac{d\epsilon_p}{dt} \\ &= \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dt} + \frac{1}{\eta} P \end{aligned} \quad (5)$$

对开尔芬—伏依特体有:

$$P = \mu\epsilon + \eta \frac{d\epsilon}{dt} \quad (6)$$

由此可见, 麦克斯韦体中能量损失来自于永久变形; 开尔芬—伏依特体的能量损失是由于增加了一项与变形速率成正比的应力。

为以下讨论的方便, 我们定义固体中的总变形速率张量 d_i^j , 则有:

$$d_i^j = c_i^j + \frac{d\epsilon_i^j}{dt} \quad (7)$$

其中 $C_i^j = \frac{d\epsilon_i^j(\infty)}{dt}$ 是永久变形速率。

考虑热应力后的弹性应力张量可写为:

$$\tau_i^j = \lambda_E \epsilon_m^m \delta_i^j + 2\mu_E \epsilon_i^j - \alpha K \Delta T \delta_i^j \quad (8)$$

其中 λ_E 、 μ_E 是弹性常数, α 是线膨胀系数, K 是绝热膨胀模量, ΔT 是温度变化。

物体内的总应力应是弹性应力和粘滞阻力之和。由经典液体粘滞情况^[6], 可得如下公式:

$$P_i^j = \tau_i^j + \lambda_v d_m^m \delta_i^j + 2\mu_v d_i^j \quad (9)$$

式中 λ_v 、 μ_v 是粘滞系数。

如果将(8)式代入(9)式得:

$$P_i^j = \{ \lambda_E \epsilon_m^m + \lambda_v d_m^m - \alpha K \Delta T \} \delta_i^j + 2\mu_E \epsilon_i^j + 2\mu_v d_i^j \quad (10)$$

若把(10)式中 ϵ 看为总应变, 则上式描述了开尔芬—伏依特体。

对于麦克斯韦体, 因永久变形速率被假设与弹性应力成线性比例, 则在更一般情形下可推得:

$$C_i^j = g(I_1, I_2, I_3; I_1', I_2', I_3') \tau_i^j \quad (10)$$

其中: $I_1 = \tau_i^i$, $I_2 = \frac{1}{2!} \delta_{mn}^ij \tau_i^m \tau_j^n$

$$I_3 = \frac{1}{3!} \delta_{lmn}^ijk \tau_i^l \tau_j^m \tau_k^n$$

$$I_1' = \frac{d\tau_i^i}{dt}, \quad I_2' = \frac{1}{2!} \delta_{mn}^ij \frac{d\tau_i^m}{dt} \frac{d\tau_j^n}{dt}$$

$$I_3' = \frac{1}{3!} \delta_{lmn}^ijk \frac{d\tau_i^l}{dt} \frac{d\tau_j^m}{dt} \frac{d\tau_k^n}{dt}$$

在小振幅情形下, 波在粘弹体中的能量损失与振幅关系不大^[1], 所以 $g(I_1, I_2, I_3)$ 是关于应力的零次函数。因而可取 C_i^j 为如下形式:

$$C_j^i = \left[\lambda_c + \chi_c \frac{I_1'}{I_1} + \xi_c \left(\frac{I_2'}{I_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \tau_m^m \delta_j^i + 2 \left[\mu_c + \psi_c \frac{I_1'}{I_1} + \eta_c \left(\frac{I_2'}{I_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \tau_j^i \quad (11)$$

若在 χ_c 、 ψ_c 、 ξ_c 、 η_c 均为零的特殊情况下,则(11)式描述的是麦克斯韦体。

2. 基本方程的建立

Bridgman的连续熵方程为〔7〕

$$\rho \frac{ds}{dt} = - \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{q_j}{T} \right) + \frac{dS_{irr}}{dt} \quad (12)$$

式中 S 是单位质量熵, dS_{irr}/dt 是单位时间、单位体积产生的不可逆熵(根据热力学第二定律其值大于零), q_i 是热通量矢量。

算符 $\frac{d}{dt}$ 表示的微分对运动的固体有:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (13)$$

设热扩散仅有传导方式,则热通量可表示为:

$$q_i = -K \frac{\partial T}{\partial y_i} \quad (14)$$

其中 K 为导热系数,对各向同性材料是一常数。

而固体中熵随时间的变化遵从:

$$T \rho \frac{dS}{dt} = \rho C_\epsilon \frac{dT}{dt} + K \alpha T \frac{d\epsilon_m^m}{dt} \quad (15)$$

其中 C_ϵ 是无形变下的热容。

由(12)一(15)式,连续熵方程可写成:

$$\begin{aligned} \rho C_\epsilon \frac{dT}{dt} + K \alpha T \frac{\partial \epsilon_m^m}{\partial t} &= \frac{q}{T} \frac{\partial T}{\partial y_i} + K \frac{\partial^2 T}{\partial y_i \partial y_i} + T \frac{dS_{irr}}{dt} \\ \text{或 } \rho C_\epsilon \frac{dT}{dt} + K \alpha T \frac{\partial \epsilon_m^m}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 T}{\partial y_i \partial y_i} - \frac{K}{T} \frac{\partial T}{\partial y_i} \frac{\partial T}{\partial y_i} + T \frac{dS_{irr}}{dt} \end{aligned} \quad (16)$$

由此可见,热传导产生的不可逆熵是: $\frac{K}{T^2} \frac{\partial T}{\partial y_i} \frac{\partial T}{\partial y_i}$, 而机械过程损失的功应是所

做的总功减去可恢复功(弹性力所做的功)。

已知单位体积内产生弹性功的速率是: $\tau_j^i \frac{d\epsilon_j^i}{dt}$, 也可写成: $\tau_j^i (d\epsilon_j^i - C_j^i)$ 。

所以损失的机械能是:

$$T \frac{dS_{irr}}{dt} \Big|_{\text{机械}} = P_j^i d\epsilon_j^i - \tau_j^i (d\epsilon_j^i - C_j^i) \quad (17)$$

热力学过程和机械过程产生的总的不可逆熵是:

$$T \frac{dS_{irr}}{dt} = \frac{K}{T} \frac{\partial T}{\partial y_i} \frac{\partial T}{\partial y_i} + P_j^i d\epsilon_j^i - \tau_j^i (d\epsilon_j^i - C_j^i)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K}{T} \frac{\partial T}{\partial y_i} \frac{\partial T}{\partial y_i} + (\tau_i + \lambda \frac{d\epsilon_i}{dt} + 2\mu \frac{d\epsilon_i}{dt}) d_i \\
&\quad - \tau_i [d_i] - g(I_{(r)}, I'_{(r)}) \tau_i] \\
\text{或 } T \frac{dS_{i(r)}}{dt} &= \frac{K}{T} \frac{\partial T}{\partial y_i} \frac{\partial T}{\partial y_i} + (\lambda \frac{d\epsilon_i}{dt} + 2\mu \frac{d\epsilon_i}{dt}) d_i \\
&\quad + g(I_{(r)}, I'_{(r)}) \tau_i \tau_i
\end{aligned}$$

由上式可得，使不可逆熵大于等于零的条件为： $K \geq 0$ ， $3\lambda + 2\mu_v \geq 0$ ， $\mu_v \geq 0$ ， $g(I_{(r)}, I'_{(r)}) \geq 0$ 。

而由 $g(I_{(r)}, I'_{(r)}) \geq 0$ 可得到标量函数 g 的以下性质，比较(10)式与(11)式，可知有：

$$\begin{aligned}
3\lambda_c + 2\mu_c &\geq 0, & 3\chi_c + 2\psi_c &\geq 0, & 3\xi_c + 2\eta_c &\geq 0, \\
\mu_c &\geq 0, & \psi_c &\geq 0, & \eta_c &\geq 0
\end{aligned}$$

成立，且对开方式开方后应取正号。

在均匀压缩情况下，根据Bridgman实验结论^[9]不会导致永久变形。由这一实验结论得：

$$\begin{aligned}
C_m^m &= 3 \left\{ \lambda_c + \chi_c \left| \frac{I'_1}{I_1} \right| + \xi_c \left(\frac{I'_2}{I_2} \right)^{1/2} \right\} \tau_m^m + 2 \left\{ \mu_c + \psi_c \left| \frac{I'_1}{I_1} \right| + \eta_c \left(\frac{I'_2}{I_2} \right)^{1/2} \right\} \\
&\quad \cdot \tau_m^m = 0
\end{aligned} \quad (19)$$

即： $3\lambda_c = -2\mu_c$ ， $3\chi_c = -2\psi_c$ ， $3\xi_c = -2\eta_c$ 。

据此(11)式可写为：

$$C_i = \left[\mu_c + \chi_c \left| \frac{I'_1}{I_1} \right| + \eta_c \left(\frac{I'_2}{I_2} \right)^{1/2} \right] \left(2\tau_i - \frac{2}{3}\tau_m^m \delta_i \right) \quad (20)$$

综合以上结果，由(1)、(2)、(10)式得到：

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial t^2} &= \lambda_v \frac{\partial \epsilon_m^m}{\partial y_i} \delta_i + 2\mu_v \frac{\partial \epsilon_i}{\partial y_i} + \lambda_v \frac{\partial d_m^m}{\partial y_i} \delta_i + 2\mu_v \frac{\partial d_i}{\partial y_i} \\
&= \frac{\partial}{\partial y_i} \alpha K \Delta T
\end{aligned} \quad (21)$$

其中 $\bar{u}_i$ 表示总位移。方程(21)包含了三个运动方程，七个量。显见这七个量是三个总位移，三个弹性位移，一个温度。

总位移矢量与弹性位移矢量之间的关联方程是：

$$d_i = C_i + \frac{d\epsilon_i}{dt} \quad (22)$$

$$C_i = g(I_{(r)}, I'_{(r)}) \tau_i \quad (23)$$

温度则遵循连续熵方程(16)式。

将 $\rho C \frac{dT}{dt} = \rho C \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) T$ 代入整理上式可得：

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial y_i \partial y_i} + [\lambda_v \frac{d\epsilon_m^m}{dt} + 2\mu_v \frac{d\epsilon_i}{dt}] d_i + C_i \tau_i$$

$$-K\alpha T \frac{\partial \varepsilon_m^s}{\partial t} - \rho C_s \frac{\partial T}{\partial y^i} v^i \quad (24)$$

3. 平面纵波情况下的解

设一平面波沿 y^3 方向传播, 所以位移矢量 $u^1 = u^2 = 0$, $u^3 = u$, 且令 $y^3 = y$.

由 (8) 式

$$\begin{aligned} \tau_3^3 &= \lambda_E \varepsilon_3^3 + 2\mu_E \varepsilon_3^3 - \alpha K \Delta T \\ &= (\lambda_E + 2\mu_E) \varepsilon_3^3 - \alpha K \Delta T \end{aligned}$$

$$\varepsilon_3^3 = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\text{所以 } \tau_3^3 = (\lambda_E + 2\mu_E) \frac{\partial u}{\partial y^3} - \alpha K \Delta T$$

$$d_3^3 = \frac{\partial V^3}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}$$

由 (21) 式得:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda_E + 2\mu_E) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda_v + 2\mu_v) \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t} - \alpha K \frac{\partial T}{\partial y} \quad (25)$$

(25) 式即运动方程, 可用 $\bar{u}$ 、 u 、 $u_{(v)}$ 任意一种位移来表示, 但考虑到地球介质的实际情况, 永久变形位移远远小于弹性变形位移, 所以以下将用弹性位移写出运动方程。另外, 考虑到热力学效应远远小于力学效应从而忽略这一项得到:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda_E + 2\mu_E) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda_v + 2\mu_v) \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t} \quad (26)$$

由 (11) 式可写出:

$$C_3^3 = \left\{ (\lambda_c + 2\mu_c) + (\chi_c + 2\psi_c) \left| \frac{I'_1}{I_1} \right| \right\} (\lambda_E + 2\mu_E) \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\text{将 } I_1 = \tau_3^3 = (\lambda_E + 2\mu_E) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad I'_1 = (\lambda_E + 2\mu_E) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}$$

代入, 则:

$$C_3^3 = \left\{ (\lambda_c + 2\mu_c) \frac{\partial u}{\partial y} + (\chi_c + 2\psi_c) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right| \operatorname{sgn} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \cdot (\lambda_E + 2\mu_E) \quad (27)$$

改写整理 (26) 式得:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[(\lambda_E + 2\mu_E) \frac{\partial u}{\partial y} + (\lambda_v + 2\mu_v) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{或: } \rho \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 u_{(v)}}{\partial y \partial t} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[(\lambda_E + 2\mu_E) \frac{\partial u}{\partial y} + (\lambda_v + 2\mu_v) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right. \\ &\quad \left. + (\lambda_v + 2\mu_v) \frac{\partial^2 u_{(v)}}{\partial y \partial t} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

将 (27) 式代入 (28) 式并根据 $C_3^3 = \frac{\partial u_{(v)}}{\partial t}$, 得到:

$$\begin{aligned}
 & \rho \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + (\lambda_c + 2\mu_c) (\lambda_E + 2\mu_E) \frac{\partial u}{\partial y} + (\chi_c + 2\psi_c) (\lambda_E + 2\mu_E) \right. \\
 & \cdot \left. \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right| \cdot \operatorname{sgn} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right] = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ (\lambda_E + 2\mu_E) \frac{\partial u}{\partial y} + (\lambda_v + 2\mu_v) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right. \\
 & + (\lambda_v + 2\mu_v) \left[(\lambda_c + 2\mu_c) (\lambda_E + 2\mu_E) \frac{\partial u}{\partial y} + (\chi_c + 2\psi_c) (\lambda_E + 2\mu_E) \right. \\
 & \cdot \left. \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right| \cdot \operatorname{sgn} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right] \left. \right\} \quad (29)
 \end{aligned}$$

其中sgn为符号函数。

整理(29)式可得:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\lambda_v + 2\mu_v}{\lambda_E + 2\mu_E} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2 \partial t} - \rho (\lambda_c + 2\mu_c) \frac{\partial u}{\partial t} \right. \\
 & \left. + (\lambda_v + 2\mu_v) (\lambda_c + 2\mu_c) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\
 & = \rho (\chi_c + 2\psi_c) \frac{\partial}{\partial t} \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right| \cdot \operatorname{sgn} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right] - (\lambda_v + 2\mu_v) (\chi_c + 2\psi_c) \\
 & \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right| \cdot \operatorname{sgn} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right] \quad (30)
 \end{aligned}$$

式中 $V_p^2 = (\lambda_E + 2\mu_E) / \rho$, 而带有因子 $(\lambda_v + 2\mu_v) \cdot (\lambda_c + 2\mu_c)$ 和 $(\lambda_v + 2\mu_v) \cdot (\chi_c + 2\psi_c)$ 的项给出了粘弹机制间的相互耦合作用, 若这种耦合是一种弱耦合, 从而可简化方程(30), 得到:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\lambda_v + 2\mu_v}{\lambda_E + 2\mu_E} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2 \partial t} - \rho (\lambda_c + 2\mu_c) \frac{\partial u}{\partial t} \right] \\
 & = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right| \operatorname{sgn} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right] \quad (31)
 \end{aligned}$$

方程(31)可采用 Kryloff 和 Bogoliuboff 方法^[9]求解。设解的形式为:

$$u = a(t) \sin(ky - \omega t + \phi(t)) \quad (32)$$

$$\text{令 } \theta = ky - \omega t + \phi(t)$$

对于 $u = \sin \theta$ 的形式, 可得到振幅 a 和相位 ϕ 的两个方程。

在一级近似情况下 a 和 ϕ 分别满足以下两个方程:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{a} \frac{da}{dt} &= \frac{\lambda_v + 2\mu_v}{\lambda_E + 2\mu_E} \omega^2 \cos^2 \theta + \rho (\lambda_c + 2\mu_c) V_p^2 \cos^2 \theta \\
 &+ \omega \rho V_p^2 \cdot (\chi_c + 2\psi_c) \cos^2 \theta \cdot |\operatorname{tg} \theta| \quad (33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\lambda_v + 2\mu_v}{\lambda_E + 2\mu_E} \omega^2 \sin^2 \theta \cos \theta + \rho (\lambda_c + 2\mu_c) V_p^2 \sin \theta \cos \theta \\
 &+ \omega \rho V_p^2 \cdot (\chi_c + 2\psi_c) \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot |\operatorname{tg} \theta| \quad (34)
 \end{aligned}$$

可以看出, 振幅方程和相位方程的左边仅是时间 t 的函数, 而右边是 y 和 t 的函数, 产生不相容性。分析这种不相容性, 可发现其来自于设定的定解条件, 因而需从解的适应条

件, 也就是 $\frac{1}{a} \frac{da}{dt}$, $\frac{d\phi}{dt}$ 随时间变化情况来考虑。因设 a 、 ϕ 是时间的缓变函数, 可近似认为它们随时间的变化率是常数, 即:

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = K_0, \quad \frac{d\phi}{dt} = P_0 \quad (35)$$

其解为: $a = Ae^{K_0 t}$, $\phi = P_0 t$ (36)

而(35)式的物理意义也就是对方程(33)、(34)在一个振动波长内取平均。而相位方程(34)左边是奇函数, 取平均结果为零, 即: $P_0 = 0$ 。

由此可得出在一级近似情况下, 相位角为常数, 振幅随时间而减小的结论。

比较(33)式与(35)式可知:

$$-K_0 = \frac{\lambda_v + 2\mu_v}{\lambda_E + 2\mu_E} \frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{2} \rho (\lambda_c + 2\mu_c) V_p^2 + \frac{1}{\pi} (\chi_c + 2\psi_c) \cdot V_p^2 \omega \rho \quad (37)$$

则P波波动方程解为

$$U = A \left\{ \exp - \left[\frac{\lambda_v + 2\mu_v}{\lambda_E + 2\mu_E} \frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{2} \rho (\lambda_c + 2\mu_c) V_p^2 + (\chi_c + 2\psi_c) \frac{\omega}{\pi} \rho V_p^2 \right] t \right\} \sin(ky - \omega t + \phi) \quad (38)$$

$$\text{或: } U = A \left\{ \exp - \left[\frac{\lambda_v + 2\mu_v}{\lambda_E + 2\mu_E} \frac{\omega^2}{2V_p} + \frac{1}{2} (\lambda_c + 2\mu_c) \rho V_p + (\chi_c + 2\psi_c) \frac{\omega}{\pi} \rho V_p \right] y \right\} \sin(ky - \omega t + \phi) \quad (39)$$

从(38)式或(39)式可清楚看到, 衰减因子中含有频率的零次项、一次项和二次项。根据分析可知, 零次项和二次项起因于波动方程中的线性耗散项, 它们分别对应的能量衰减情况与麦克斯韦体和开尔芬—伏依特体相符。频率的线性项起因于波动方程中的非线性项, 是由于应力和应变的变化率依赖于永久变形的变化率所致。

若考虑了震源的情况, 可写为如下形式:

$$u = A_0 \frac{1}{X^n} \exp \left(-\alpha_K \omega^K \frac{X}{2} \right) F(A_z) G(t) \quad (40)$$

式中: A_0 是震源处的初始振幅, $\frac{1}{X^n}$ 是几何衰减因子,

$\exp(-\alpha_K \omega^K \frac{X}{2})$ 是衰减因子, 其中 $K = 0, 1, 2$,

$F(A_z)$ 是方向性函数, A_z 是方位角,

$G(t)$ 是振幅的时间变化函数。

4. Q 值的计算

从不同的角度出发定义的 Q 值, 其物理意义不同。对于我们所考虑的粘弹性地球模型, 本文采用1978年O'Connell给出的定义式^[10]:

$$Q = M_1/M_2 \quad (41)$$

$$\text{或: } Q = J_1/J_2 \quad (42)$$

其中: $M(\omega) = M_1 + iM_2$, $J(\omega) = J_1 - iJ_2$

M称为复模量, J称为复柔度。

$$\text{且: } J(\omega) = i\omega \int_0^{\infty} J(t) e^{-i\omega t} dt, \quad M(\omega) = i\omega \int_0^{\infty} M(t) e^{-i\omega t} dt$$

其物理意义为, 当对固体施加一现实应力,

$$\sigma(t) = \text{Re}(\sigma_0 e^{i\omega t})$$

相应的应变

$$\varepsilon(t) = \text{Re}(\varepsilon_0 e^{i\omega t})$$

式中 σ_0 和 ε_0 是复数幅度, 可用下式表示,

$$\varepsilon_0 = J(\omega) \sigma_0, \quad \sigma_0 = M(\omega) \varepsilon_0$$

对地震行波, 严格地按(41)或(42)式定义的Q值计算公式可推得,

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\alpha c} - \frac{\alpha c}{\omega} \right) \quad (43)$$

在衰减的平面波的实数表示式中:

$$u = e^{-\alpha x} e^{i\omega(t-x/c)} \quad (44)$$

α 即是以距离度量的衰减常数, C是真实波速。

比较(40)与(44)式得到:

$$\alpha = \frac{\alpha_K \omega^K}{2} \quad K = 0, 1, 2 \quad (45)$$

将(45)代入(43)式得:

$$Q_K = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\alpha_K \omega^{K-1} c} - \frac{\alpha_K \omega^{K-1} c}{2} \right) \quad (46)$$

对波速C, 在衰减介质中, 因果律要求满足K-K关系^[1]:

$$\frac{\omega}{c(\omega)} = \frac{\omega}{C_\infty} + \mu[\alpha(\omega)] \quad (47)$$

C_∞ 是频率很大时的波速, μ 表示希尔伯特变换。

(47)即要考虑体波频散, 等效关系是对数频散关系:

$$\frac{C(\omega_1)}{C(\omega_2)} = 1 + \frac{1}{\pi Q} \ln \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \quad (48)$$

5. 用功率谱的切比雪夫多项式拟合近似法求衰减系数 α_K

P波函数的功率谱可用下式表示:

$$S(f, x) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t, x) e^{-i2\pi f t} dt \quad (49)$$

式中 $E(t, x)$ 是自相关函数。

$$E(t, x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(x, t), u(x, t+\tau) d\tau \quad (50)$$

其中 $u(x, t)$ 是位移。

由(40)、(49)、(50)式可得:

$$S(f, x) = P(f) \exp[-\alpha_K (2\pi f)^K x] \quad (51)$$

式中 $P(f)$ 是频率的函数。

$S(f, x)$ 是一个二元函数,且可考虑为一连续函数,当 x 增加时,由于空间指数性衰减特性,最大能量向低频移动。

设 $S_1(f, x_1)$ 是在传播距离为 x_1 处的功率谱密度函数, $S_2(f, x_2)$ 是在 x_2 处的功率谱密度函数,由(51)式可得如下关系式:

$$S_2(f, x_2) = S_1(f, x_1) \exp[-\alpha_K (2\pi f)^K \Delta x] \quad (52)$$

其中 $\Delta x = x_2 - x_1$

对(52)式求第一阶偏导可得:

$$\frac{dS_2(f, x_2)}{df} = \left[\frac{dS_1(f, x_1)}{df} - S_1(f, x_1) \alpha_K (2\pi)^K K f^{K-1} \Delta x \right] \cdot \exp[-\alpha_K (2\pi f)^K \Delta x] \quad (53)$$

若设 f_2 是使得 $S_2(f, x_2)$ 取最大值的频率,则有:

$$\left. \frac{dS_2(f, x_2)}{df} \right|_{f=f_2} = 0$$

于是由(53)式可方便地得到:

$$\alpha_K = \frac{\frac{dS_1(f, x_1)/df}{S_1(f, x_1)}}{K(2\pi)^K f^{K-1} \Delta x} \Big|_{f=f_2} \quad K=1, 2 \quad (54a)$$

对于 $K=0$

$$\alpha_0 = \frac{\ln S_1(f, x_1) - \ln S_2(f, x_2)}{\Delta x} \quad (54b)$$

若知道了 S_1 , dS_1/df , f_2 , 即可求得 α_K , 从而经过对 α 的离散希尔伯特变换, 然后可求得 Q 值。

实际的地球介质是非均匀、非弹性、各向异性的。因此要研究地震波能量的衰减需同时考虑这三方面的因素。

Aki、Sato等人根据实际观测和理论计算,认为介质的非均匀性是造成地震波散射的主要因素,指出了在地震图上继直达P波和S波之后出现的波列是散射波列,称之为P、S尾波,如图1所示。S尾波中占主导地位的是S到S散射^[12], P尾波构成较为复杂。

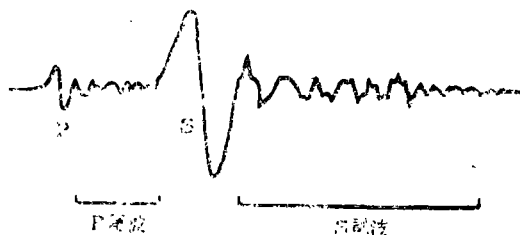


图 1

地球介质粘弹性是造成地震波能量随传播距离衰减和随时间衰减的主要因素。

由于地球介质是各向异性的,使得地震波在传播道径上,甚至在自由面上均出现干涉、反射等情况。

由于以上三方面的因素, 反映在真实的地震记录图上, 就出现了复杂的、难以辨认的地震波波形图。相反, 若地球介质是均匀的、完全弹性的、各向同性的, 则对于短周期地震仪器记录的近震、地方震, 应该仅有直达P波、S波震相。

本文所讨论的地球模型的介质是均匀、非弹性、各向同性的, 由以上分析可知, 唯一的造成地震波能量损失的因素就是粘弹性吸收问题。地震波的最大能量峰值随传播距离而减小, 主频率随传播距离而改变是其主要特征。如何从实际地震记录图中分离各种耗能因素是问题的关键。我们用一光滑的功率谱曲线去逼近由原始地震图直达波计算的复杂功率谱曲线, 逼近方法采用切比雪夫多项式拟合处理法。采用功率谱的切比雪夫曲线拟合方法后, 即提取了谱中所需的有用信息, 又分离了其它因素的影响。

用数学公式描述, 即:

$$\ln S(f, x) = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + a_3 f^3 + \dots \quad (55)$$

(55)式是对 $S(f, x)$ 取对数后再拟合的, 这主要是为计算 $\frac{1}{S} \frac{dS}{df}$ 的方便。

从而得到依赖于频率的Q值计算公式:

$$Q_K^* = Q_K(f_2, f) \quad K = 0, 1, 2$$

需说明的是, 实际上 $K=1$ 时, Q_K^* 与频率无关。

三、结 语

直接从粘弹理论出发, 建立方程组, 设法校正其它震波衰减因素, 来计算Q值的方法是一种新的尝试。与尾波方法相比, 它既可使用于S波, 又可使用于P波(本文只讨论了P波情况)。

Aki、高龙生^[13]等指出, 目前Q值研究所面临的重大困难之一是如何能够正确区分散射的Q与吸收的Q。本文正是基于这一点, 作了一些研究和探讨。

本文的研究是初步的, 所讨论的是半空间问题, 没有考虑求解特定层状介质及更复杂的粘弹体的震波传播衰减问题。也没有考虑粘弹体之间的复杂耦合效应, 这些都有待于进一步的研究。

本文是在张诚、王周元老师的指导下完成的, 郑斯华老师提过指导性的建议, 高龙生老师给予作者许多鼓励和指导, 并审阅了全稿。在此作者一并表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] 陈运泰等, 巧家、石棉的小震震源参数的测定及地震危险性的估计, 地球物理学报, Vol.19, No.8, 1976.
- [2] 朱传镇等, 海城地震前后微震震源参数与介质的品质因子, 地球物理学报, Vol.20, No.8, 1977.
- [3] Aki, K., Analysis of the seismic coda of local earthquakes as scattered waves, J.G.R., Vol. 74, 615—631, 1969.
- [4] 徐果明, 地震学原理, 科学出版社, 1982.
- [5] 徐芝纶, 弹性力学, 人民教育出版社, 1982.
- [6] White, F. M., 粘性流体动力学, 魏中磊、甄恩慈译, 机械工业出版社, 1982.
- [7] Bridgman, P. W., The Nature of Thermodynamics, 1941.
- [8] Bridgman, P. W., The Physics of High Pressure, 1949.
- [9] Minorsky, N., Introduction to Non-Linear Mechanics, 1947.
- [10] O'Connell, R. J., Measures of dissipation in viscoelastic media, Geophys. Res. Let., Vol. 5, No. 1, 1978.

- [12] Sato, H., Attenuation and envelope formation of three-component seismograms of small local earthquakes in randomly inhomogeneous lithosphere, J.G.R., Vol.89, No.B2, 1221-1241, 1984.
- [11] Aki, K., 定量地震学(上), 李钦祖、邹其嘉等译, 地震出版社, 1986.
- [13] 高龙生, Q值研究当前所面临的问题, 国际地震动态, No.10, 1985.

THE MEASURED METHOD OF SEISMIC BODY Q VALUE IN THE VISCOELASTIC MEDIUM

Du Zhijun

(The Earthquake Research Institute of Lanzhou, SSB)

Abstract

The equations of which the seismic waves are propagated in the viscoelastic medium have been built by imitating the viscosity properties of the earth with several ordinary viscoelastic bodies in this paper. The solutions of the problem have been obtained based on the proper approximate methods. It is given that the concept and the method which is used to estimate the viscosity Q value according to correct other factors causing the seismic waves energy decrease with Chebyshev polynomial approximate to power spectrum. At the end of this paper, the feasibility of the method has been is discussed.