

地形对大地电磁勘探的影响

徐世浙 赵生凯

(山东海洋学院) (中国科技大学)

摘 要

本文讨论了地形对大地电磁场的影响。用有限元方法计算了几种地形的大地电磁影响曲线。

计算表明,地形对 E_x 型波视电阻率的影响,主要出现在地形起伏幅度与电磁波在地下介质中的波长可以比较时。 H_x 型波的地形影响比 E_x 波严重,随着周期的增长, H_x 型波的地形影响变得稳定。地形凸起处的影响比下凹处严重。

众所周知,地形对电阻率法勘探有显著影响。大地电磁勘探是一种以天然电磁场为场源、了解地下电阻率分布的勘探方法,因而自然就产生这样一个问题,即地形对大地电磁勘探的影响程度如何?目前大地电磁正演问题是在地面为水平面的条件下推导的,但在某些测点周围有起伏的高山,例如,我国西藏羊八井地热区的测深点的地形条件就是这样。国外已将大地电磁勘探法用于金属矿〔1、2〕,在金属矿区经常遇到起伏的地形,所以有必要研究地形对大地电磁勘探的影响。用解析法研究任意地形对大地电磁场的影响是困难的,本文用有限元法研究这一问题。

一、二维大地电磁场的边值问题和相应的变分问题

大地电磁场中的视电阻率是根据测点处的电场与磁场的比值计算出来的,因此,首先应给出大地电磁场的边值问题。

角频率为 ω 的定态电磁场的方程是

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = (\sigma - i\omega\epsilon)\vec{E} \quad (2)$$

其中 μ 是介质的导磁率, σ 是介质的电导率, ϵ 是介质的介电常数。

假定地形是二维的,取走向为 x 轴, y 轴与 x 轴垂直,保持水平, z 轴垂直向下(图1)。

再假定入射波是平面波,将(1)、(2)式按分量展开,并考虑到 $\frac{\partial}{\partial x} = 0$,得两个独立的方程组,并以 x 分量为准,分别命名为 E_x 型和 H_x 型波。

E_x 型:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= (\sigma - i\omega\varepsilon) E_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= i\omega\mu H_y \\ -\frac{\partial E_x}{\partial y} &= i\omega\mu H_z \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

H_x 型:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= i\omega\mu H_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} &= (\sigma - i\omega\varepsilon) E_y \\ -\frac{\partial H_x}{\partial y} &= (\sigma - i\omega\varepsilon) E_z \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

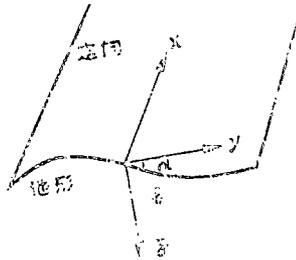


图1 地形和坐标系

Fig. 1 Topography and coordinate system.

从(3)、(4)式中的第二、三式,解出 H_y 、 H_z 和 E_y 、 E_z ,并分别代入第一式,得 E_x 和 H_x 应满足的偏微分方程:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + (\sigma - i\omega\varepsilon) E_x = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon} \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + i\omega\mu H_x = 0 \quad (6)$$

(5)、(6)式可统一表示成:

$$\nabla \cdot (\tau \nabla u) + \lambda u = 0 \quad (7)$$

其中 ∇ 是二维哈密顿算符: $\nabla = \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$ 。对于 E_x 型: $u = E_x$, $\tau = \frac{1}{i\omega\mu}$, $\lambda = \sigma -$

$i\omega\varepsilon$; 对于 H_x 型: $u = H_x$, $\tau = \frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon}$, $\lambda = i\omega\mu$ 。

为了求解方程(7),还必须给定边界条件。将区域 Ω 取得足够大,区域的线度约为起伏地形线度的若干倍,使地形对电磁场的影响在边界 P 上近似为零。这时,边界上的电磁场按天然电磁场在均匀半空间中的分布规律确定。

对于垂直入射的平面电磁波，取上边界AB(图2)处的 $u = 1$ 。假定地形对左右边界是对称的，取左右边界BC、DA处的法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ 。在下边界CD处，电磁波在无限均匀介质中传播，其方程为 $u = u_0 e^{ikz}$ ，其中 k 为复波数， $k = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$ ， σ 为CD以下的介质的电导率。对 u 求偏导： $\frac{\partial u}{\partial z} = ik u$ 。因为在CD处有 $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial n}$ ，所以CD处的边界条件为 $\frac{\partial u}{\partial n} - ik u = 0$ 。可见在本问题中包括了三类边界条件。为方便电算程序的编制，将这三类边界条件写成统一的形式。边值问题可简写成：

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (\tau \nabla u) + \lambda u &= 0 && \text{在区域 } \Omega \text{ 中} \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u &= \beta && \text{在边界 } P \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

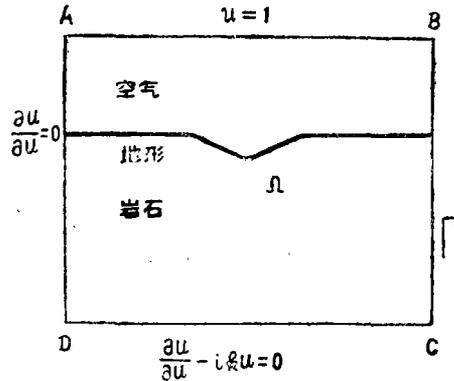


图 2 区域与边界

Fig. 2 Domain and boundary.

在AB上令 α 为足够大的数，例如 $\alpha = 10^{20}$ ，再令 $\beta = \alpha$ ，这时 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 可忽略，于是得 $u = 1$ 。

在BC、DA上，令 $\alpha = 0$ ， $\beta = 0$ ，得 $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ 。在CD上，令 $\alpha = -ik$ ， $\beta = 0$ ，得 $\frac{\partial u}{\partial n} - ik u = 0$ 。

根据变分理论可知，与边值问题(8)相应的变分问题是：求 u ，使泛函

$$F(u) = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 - \frac{1}{2} \lambda u^2 \right] ds + \oint_P \tau \left(\frac{\alpha}{2} u^2 - \beta u \right) dl \quad (9)$$

的变分 $\delta F(u) = 0$ 。下面用有限元法求解变分问题(9)。

二、有限元法

本文将区域 Ω 剖分成许多小三角元，在单元 e 内进行二次函数插值。为此，在单元 e 上取6个点：三个角点和三边中点，如图3所示。三角点按顺时针编号为 i 、 j 、 m ，三中点编号

为p、q、r。角点坐标为 $(y_1, z_1), (y_j, z_j), (y_m, z_m)$ 。六个点的待 定u值记为 $u_1, u_j, u_m, u_p, u_q, u_r$ 。

首先按 (9) 式计算单元e的 $F^{(e)}(u)$ ，然后将各单元的 $F^{(e)}(u)$ 相加组成总体的 $F(u)$ ，它是各节点u值的函数。令 $F(u)$ 的变分为零，可求得各节点的u。

经适当计算，对于单元e，(9)式右侧第一项面积分为

$$\iint \frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 ds = \frac{1}{2} \{u\}_e^T [K1]_e \{u\}_e \tag{10}$$

其中 $\{u\}_e = \{u_1, u_j, u_m, u_p, u_q, u_r\}^T$ 是单元的u值列向量，

$[K1]_e =$

$$\frac{\tau}{12\Delta} \begin{pmatrix} 3C_1^T C_1 & & & & & \\ -C_1^T C_2 & 3C_2^T C_2 & & & & \\ -C_1^T C_3 & -C_2^T C_3 & 3C_3^T C_3 & & & \\ 0 & 4C_2^T C_3 & 4C_1^T C_3 & -8(C_1^T C_2 + C_2^T C_3 + C_3^T C_1) & & \\ 4C_1^T C_3 & 0 & 4C_1^T C_3 & 8C_1^T C_2 & -8(C_1^T C_2 + C_2^T C_3 + C_3^T C_1) & \\ 4C_1^T C_2 & 4C_1^T C_2 & 0 & 8C_1^T C_3 & 8C_2^T C_3 & -8(C_1^T C_2 + C_2^T C_3 + C_3^T C_1) \end{pmatrix}$$

对 称

其中 C_1, C_2, C_3 是列向量，

$$C_1 = (a_1, b_1)^T, C_2 = (a_2, b_2)^T, C_3 = (a_3, b_3)^T,$$

$$a_1 = z_j - z_m, a_2 = z_m - z_1, a_3 = z_1 - z_j,$$

$$b_1 = y_m - y_j, b_2 = y_1 - y_m, b_3 = y_j - y_1,$$

$\Delta = \frac{1}{2} (a_1 b_2 - a_2 b_1)$ 是三角元面积。

(9)式右侧第二项面积分为：

$$\iint \frac{1}{2} \lambda u^2 ds = \frac{1}{2} \{u\}_e^T [K2]_e \{u\}_e \tag{11}$$

其中 $[K2]_e =$

$$\frac{\lambda \Delta}{180} \begin{pmatrix} 6 & & & & & \\ -1 & 6 & & & & \\ -1 & -1 & 6 & & & \\ -4 & 0 & 0 & 32 & & \\ 0 & -4 & 0 & 16 & 32 & \\ 0 & 0 & -4 & 16 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

对 称

(9)式右侧的线积分只对边界单元进行。设线段jm落在边界上，用 l_j 代表jm的长度，

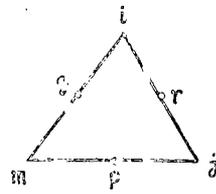


图3 二次三角单元

Fig. 3 Quadratic triangular element.

其中 α 是地形与 y 轴的夹角。

由(16)、(17)式可知,计算 E_x 型的视电阻率 ρ_x 时,除 E_x 外,还需知道 H_y ;计算 H_x 型的视电阻率 ρ_{yx} 时,除 H_x 外,还需知道 E_y 、 E_z 。根据(3)、(4)式,有:

$$H_y = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad E_y = \frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon} \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = \frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon} \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (18)$$

所以还需计算 E_x 、 H_x 的偏导数。经适当计算,在一个单元内,各节点的偏导数为:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_m \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_q \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_r \end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} 3a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 4a_3 & 4a_2 \\ -a_1 & 3a_2 & -a_3 & 4a_3 & 0 & 4a_1 \\ -a_1 & -a_2 & 3a_3 & 4a_2 & 4a_1 & 0 \\ -a_1 & a_2 & a_3 & -2a_1 & 2a_1 & 2a_1 \\ a_1 & -a_2 & a_3 & 2a_2 & -2a_2 & 2a_2 \\ a_1 & a_2 & -a_3 & 2a_3 & 2a_3 & -2a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \\ u_p \\ u_q \\ u_r \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_i \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_j \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_m \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_p \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_q \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_r \end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} 3b_1 & -b_2 & -b_3 & 0 & 4b_3 & 4b_2 \\ -b_1 & 3b_2 & -b_3 & 4b_3 & 0 & 4b_1 \\ -b_1 & -b_2 & 3b_3 & 4b_2 & 4b_1 & 0 \\ -b_1 & b_2 & b_3 & -2b_1 & 2b_1 & 2b_1 \\ b_1 & -b_2 & b_3 & 2b_2 & -2b_2 & 2b_2 \\ b_1 & b_2 & -b_3 & 2b_3 & 2b_3 & -2b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \\ u_p \\ u_q \\ u_r \end{pmatrix}$$

对于相邻单元的公共节点,用各单元求得的导数的平均值,作为该点的导数值。

按上法求得 $\frac{\partial E_x}{\partial z}$ 、 $\frac{\partial H_x}{\partial z}$ 、 $\frac{\partial H_x}{\partial y}$ 后,代入(18)式,再代入(16)、(17)式,即

可计算视电阻率。

改变电磁波的角频率 ω ,即可得各测点的视电阻率与频率的关系曲线,即所谓的大地电磁测深曲线。

四、算例和讨论

本文讨论的是垂直入射的平面电磁波。为了减少单元数目，所用的单元在水平方向是狭长的。先用 $\rho = 1$ 的均匀半空间试算。所得 E_x 型波的视电阻率如图 4 所示。对 $T = 0.1$ 秒的波，计算误差可达 11%，其原因简单说明如下：

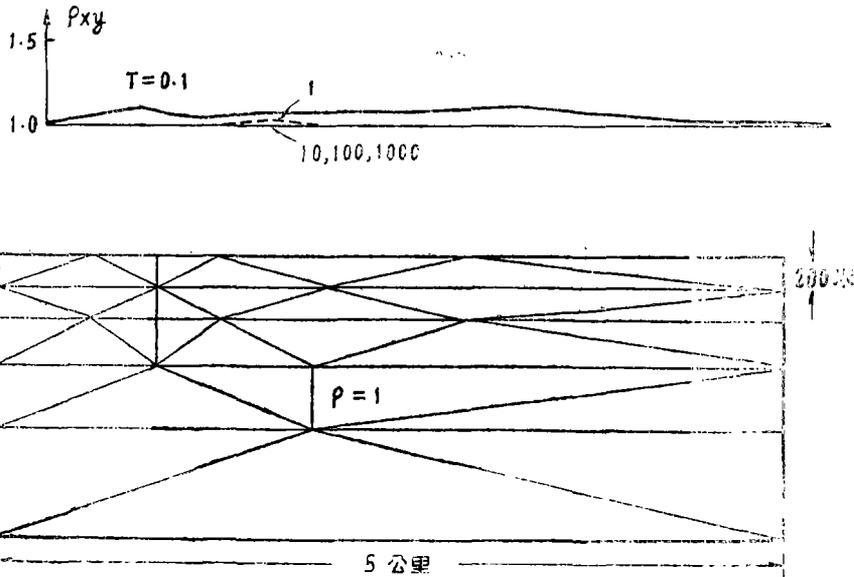


图 4 均匀半空间的有限元法网格剖分及计算视电阻率的误差 (E_x 型)
 Fig. 4 Element division in homogeneous half-space and error in calculating apparent resistivity (E_x polarization).

在均匀导电介质中，电磁波的波长 λ 与周期 T 、电阻率 ρ 的关系为 $\lambda = 3.16\sqrt{T\rho}$ (公里)
 当 $T = 0.1$ 秒时， $\lambda = 1$ 公里。岩石中最上部三角元的高度 $\Delta z = 200$ 米，与波长之比 $\frac{\Delta z}{\lambda} = 0.2$ 。
 在某一时刻 (如 $t = 0$)，电磁波的相对场强与深度的关系为

$$E/E_0 = e^{-\frac{2\pi}{\lambda}z} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right).$$

按上式作出的 E/E_0 与 z/λ 的关系如图 5 所示。可以看出，在 $\frac{\Delta z}{\lambda} = 0.2$ 的范围内，场强有急剧变化，二次插值函数不能很好地符合场强变化规律，因而出现较大的计算误差。对于 $T = 1$ 秒的波，其波长为 3.16 公里，最上部三角元高度与波长之比 $\frac{\Delta z}{\lambda} = 0.063$ ，在此范围内，二次插值函数与场强的变化规律符合较好，因而视电阻率的计算误差降至 3% 以下。当 $T \geq 10$ 秒时，波长 $\lambda \geq 10$ 公里，这时 $\frac{\Delta z}{\lambda} \leq 0.02$ ，视电阻率的计算误差 $< 0.1\%$ 。总之，对于本文所

选用的狭长三角单元，当周期 $T \geq 1$ 时，计算结果是比较可靠的。

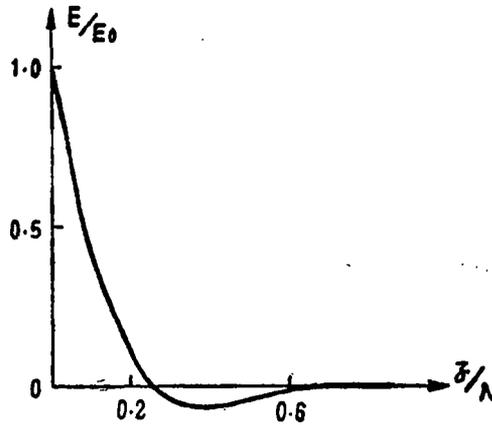


图5 均匀导电介质中电磁波相对强度 E/E_0 与相对深度 z/λ 的关系

Fig. 5 Curve of relative strength E/E_0 of electromagnetic wave propagated in homogeneous conductive medium against relative depth z/λ .

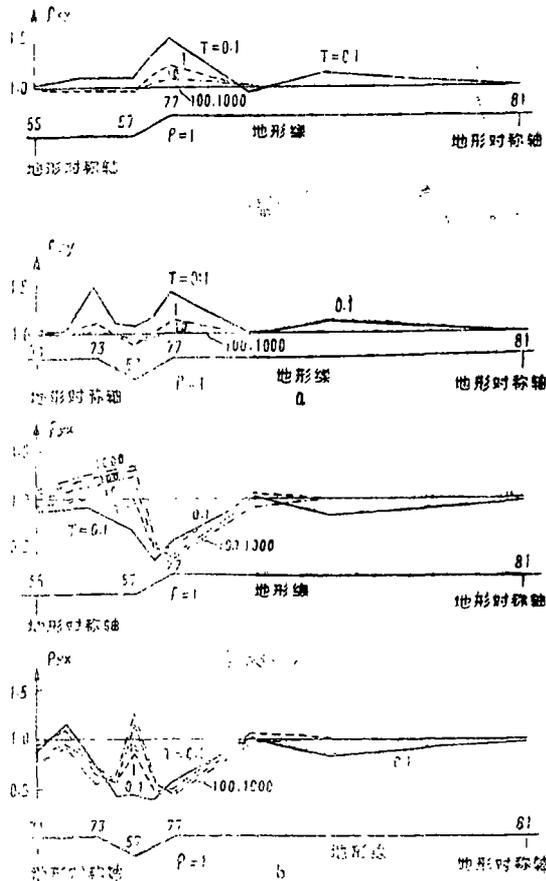


图 6

a. 地形对 E_x 型视电阻率的影响 (图中地形线上的数字为节点号)
 b. 地形对 H_x 型视电阻率的影响

图 6 a 是斜坡和山谷地形上的 E_x 型波的视电阻率曲线。从图可以看出：1) 地形对 E_x 型视电阻率存在着畸变, $T = 0.1$ 秒时, 畸变为 50%, $T = 1$ 秒时, 畸变为 20% 左右, 在局部凸起处, 畸变较大; 2) 随着周期加长 ($T > 10$ 秒), 畸变渐趋消失。这可简单解释如下: 图 6 a 上地形起伏的幅度 h 约为 200 米, 而 $T \geq 10$ 秒的波的波长 $\lambda \geq 10$ 公里, 当波长远大于起伏幅度时 ($\frac{\lambda}{h} > 50$), 地形对 E_x 型波视电阻率的畸变消失。由此可知, 地形对 E_x 型波视电阻率的畸变, 主要出现在地形起伏幅度与电磁波的波长可比较时。

图 6 b 是斜坡和山谷地形上的 H_x 型波的视电阻率曲线。从图看出: 1) 地形对 H_x 型波视电阻率的畸变较 E_x 型严重; 2) 随着周期加长, 畸变没有消失, 而是趋向稳定值; 3) 地形对长周期的 H_x 型波的视电阻率的畸变与地形对直流电场视电阻率的畸变十分类似: 在地形下凹处, 视电阻率增大, 上凸处, 视电阻率减少。其原因简单解释如下: H_x 型波视电阻率的计算公式是 (17) 式, 在地表处, 磁场成分 H_z 接近常数, 所以视电阻率与 E_1 成正比。与 H_x 相应的电场 E_1 分布在剖面内, 当周期增大时, 垂直入射的电磁波的电场成分逐渐趋近于起源于无限远处的稳定电场, 所以地形对长周期 H_x 型波视电阻率的畸变与地形对直流电场视电阻率的畸变十分类似。

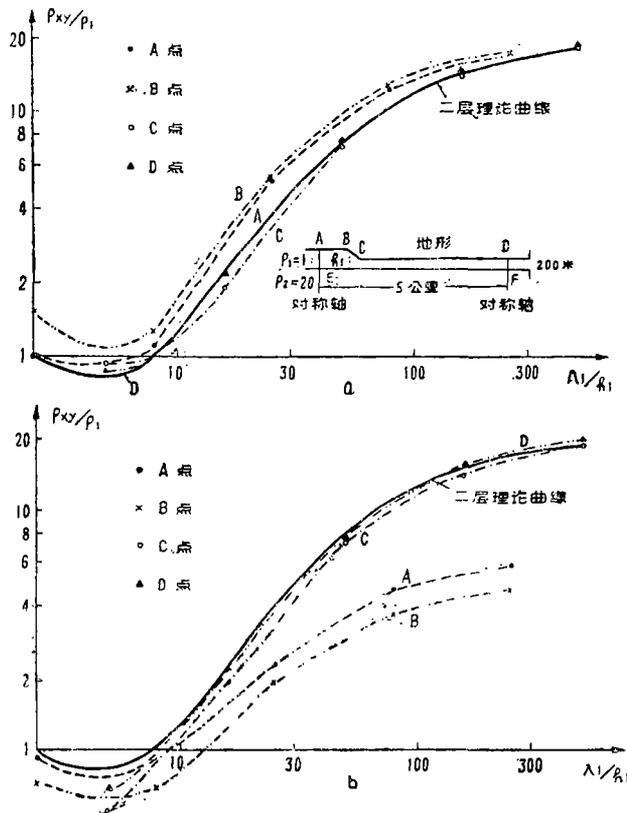


图 7

- a. 地形对 E_x 型大地电磁测深曲线的影响
- b. 地形对 H_x 型大地电磁测深曲线的影响

图 7 是 $\rho_2/\rho_1 = 20$ 的 E_x 和 H_x 型二层大地电磁测深曲线。其中实线是用解析法算出的二

层理论曲线。用有限元法算出的A、B、C、D点的测深曲线也绘在图上。由图可见：1)在局部凸起处(A、B点)， E_x 和 H_x 型测深曲线均有畸变，而且 H_x 型的畸变十分严重；2)在C、D处，地形对测深曲线的畸变较小。

根据本文讨论可知，起伏的地形使大地电磁探测结果存在着畸变，尤其对于 H_x 型的视电阻率，畸变十分严重，因而在地形起伏地区解释大地电磁勘探资料时，应当考虑地形的影响。

参 考 文 献

- [1] P. Silvester, C. R. S. Haslam, Magnetotelluric modelling by the finite element method, *Geophysical Prospecting*, Vol. 20, P. 872—891, 1972.
 [2] Charles T. Young, Magnetotelluric measurements of conductivity anomalies in Northern Wisconsin, *Wisconsin Report*, №77—3, 1977.

THE TOPOGRAPHIC EFFECTS ON MAGNETOTELLURIC RESPONSE

Xu Shi—zhe Zhao Sheng—kai

(*Shandong College of Oceanology*)

(*China University of Science and Technology*)

Abstract

This paper discusses the topographic effects on magnetotelluric response. The authors here calculated several magnetotelluric response curves on different topography with finite element method, using quadratic triangular element. In the case of E_x —polarization, the effects occur only on the frequency band in which the length of wave propagated under ground is comparable with the amplitude of undulation of topography. In the case of H_x —polarization, the topographic effects are severer than that in E_x —polarization, and it becomes stable as the period increases. The effects are severer on convex place than on concave place.