体积形变量的空间分布和地震现象的初步讨论

付 征 详
（国家地震局）

地震过程是地球内部的一种相当复杂的力学、物理学和化学等方面的综合过程。就力学现象说来，可认为地球内部存在应力集中源。作为初级近似，我们以半无限均匀各向同性空间中，埋深为h的集中力作用下，应变的空间分布特征来定性讨论地震过程中的某些现象。

史奈登（I.N.SNEDDON）曾指出[1]，集中单力作用下半空间中的应力分布，也可以由无限空间中集中单力作用下的应力和半空间中仅受表面压强时的应力相叠加而获得。

我们沿用史奈登的方法，应用傅里叶变换求出任意方向的单力作用下，半空间中的体积形变量解，该解答和史奈登的解答基本一致。並用叠加的方法给出有矩力偶作用下的表达式。

本文着重分析水平有矩力偶集中力作用下的解，尝试讨论它在地震学中的意义。

一

假设在半空间内部作用的集中力$\overline{f}\{X, Y, Z\}$随时间的变化十分缓慢，近似满足$\frac{\partial \overline{f}}{\partial t}=0$。这样，在半无限弹性体内部，每一点的六个应力分量必须满足平衡方程和应力协调方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+X=0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+Y=0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=0 \\ \nabla^2\tau_{yz}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z}+\left(\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=0 \\ \nabla^2\tau_{zx}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z}+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial z}\right)=0 \end{cases} \quad (1)$$

$$
\begin{cases}
\Delta^2\tau_{xy}+\dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y}+\left(\dfrac{\partial X}{\partial y}+\dfrac{\partial Y}{\partial x}\right)=0\\
\Delta^2\sigma_x+\dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\dfrac{\nu}{1-\nu}\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}+\dfrac{\partial Z}{\partial z}\right)+2\dfrac{\partial X}{\partial x}=0\\
\Delta^2\sigma_y+\dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\dfrac{\nu}{1-\nu}\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}+\dfrac{\partial Z}{\partial z}\right)+2\dfrac{\partial Y}{\partial y}=0\\
\Delta^2\sigma_z+\dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}+\dfrac{\nu}{1-\nu}\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}+\dfrac{\partial Z}{\partial z}\right)+2\dfrac{\partial Z}{\partial z}=0
\end{cases}
$$

其中 $\Theta=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$

ν：泊松比

对于任意方向的集中力 $\overline{f}(x,y,z)$，令xoz平面与它重合，可使问题简化，而不失其一般性。即考虑集中力 $\overline{f}(0,0,h)$ 作用在xoz平面内的情形（图1）。

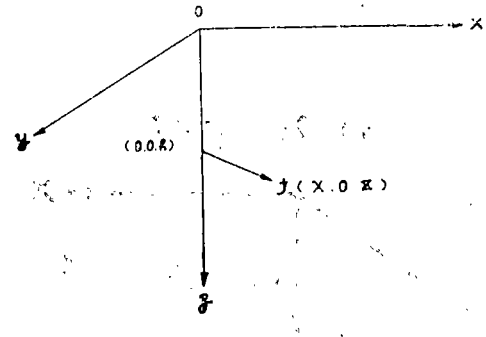

图1 半无限弹性空间（z＞0）内部的集中力

问题的边条件如下：

$$
\begin{cases}
\text{当}z=0\text{时，}\sigma_z=0\\
\qquad\qquad\tau_{xz}=0\\
\qquad\qquad\tau_{yz}=0\\
\text{当}z\to\infty\text{时，应力分量皆趋于零}
\end{cases}
\qquad (2)
$$

当弹性常数 $\lambda=\mu$，泊松比 $\nu=0.25$ 时，单力作用下半空间中的体积形变量的解答如下：

$$
\theta=\frac{-x}{4\pi\mu}\left\{e^{-z}\frac{x^2+y^2-h^2}{r_0^5}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)\right\}X
$$

$$
-\frac{1}{4\pi\mu}\left\{e^{-z}\frac{(x^2+y^2-7h^2)h}{3r_0^5}+\frac{3}{5}\left(\frac{z-h}{r^3}-\frac{z+h}{R^3}\right)\right\}Z \qquad (3)
$$

其中 $\theta=\dfrac{\Delta v}{v}=\dfrac{1}{3\lambda+2\mu}\Theta$

$r_0=\sqrt{x^2+y^2+h^2}$

$r=\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}$

$R=\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}$

μ：剪切模量

当Z＝0时，自由面（z＝0）上的解答（图2a）：

$$
\theta\Big|_{z=0}=\frac{-x}{4\pi\mu}\left[\frac{x^2+y^2-h^2}{r_0^5}\right]\cdot X \qquad (4)
$$

即在自由面上有两条θ＝0的节线（x＝0和 $x^2+y^2=h^2$），图2中的“＋”号代表体积膨胀（$\theta=\dfrac{\Delta v}{v}>0$）；“－”号代表体积压缩（$\theta=\dfrac{\Delta v}{v}<0$）。

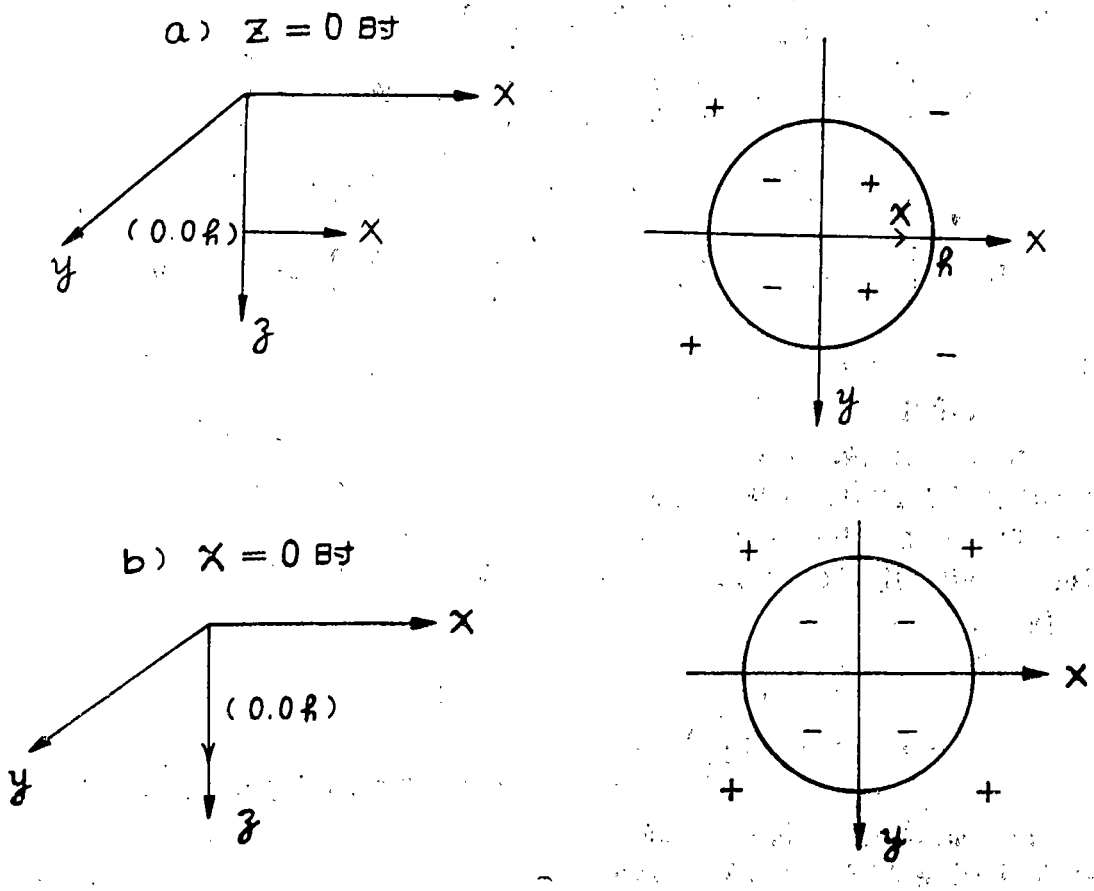

图 2

当Z = 0 时，体积形变量θ在自由面上分布示意图
"+"号表示θ>0，"−"号表示θ<0，

当X = 0，自由面（z = 0）上的解答（图 2 b）：

$$\theta\Big|_{z=0} = \frac{13h}{60\pi\mu}\left[\frac{\left(x^2+y^2-\frac{17}{13}h^2\right)}{r_0^5}\right]Z \qquad (5)$$

式（5）表明在自由面上，体积形变量的分布有一条园节线。

二

假若介质内部有一单力$\overline{f}$随时间变化相当缓慢，它产生的位移是$\overline{R}$，则与该单力组成一个有矩力偶产生的位移可表示为[2]：

$$\overline{R}_\Sigma = l\frac{\partial\overline{R}}{\partial y} \qquad (6)$$

把（10）式理解为力矩$\overline{f}\,l$产生的位移。可以导出有矩力偶产生的体积形变量θ_Σ为：

$$\theta_\Sigma = 1\frac{\partial\theta}{y\partial} \tag{7}$$

把（3）式代入（7）式中，便得到：

$$\theta_\Sigma = \frac{1y}{4\mu\pi}\left\{\left[e^{-z}\frac{3\left(x^2+y^2-\frac{7}{3}h^2\right)}{r_o^7}x-\left(\frac{x}{R^5}-\frac{x}{r^5}\right)\right]X\right.$$
$$\left.+\left[e^{-z}\frac{h\left(x^2+y^2+11h^2\right)}{r_o^7}-\frac{9}{5}\left(\frac{z+h}{R^5}-\frac{z-h}{r^5}\right)\right]Z\right\} \tag{8}$$

（8）式就是任意方向有矩力偶作用下，半空间中体积形变量的解答。下面我们仅讨论水平力偶作用（Z＝0）下的解答。

水平力偶作用下的解答如下：

$$\theta_\Sigma = \frac{1y}{4\mu\pi}\left[e^{-z}\frac{3\left(x^2+y^2-\frac{7}{3}h^2\right)}{r_o^7}x-\left(\frac{x}{R^5}-\frac{x}{r^5}\right)\right]X \tag{9}$$

引入柱坐标（$\bar{r}$、φ、z），它和直角坐标系（x、y、z）的关系是：

$$\begin{cases} x=\bar{r}\cos\varphi \\ y=\bar{r}\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$$

则在柱坐标下，（9）式改写为：

$$\pi_\Sigma = \frac{1\bar{r}^2\cos\varphi\sin\varphi}{4\mu\pi}\left\{e^{-z}\frac{3\left(\bar{r}^2-\frac{7}{3}h^2\right)}{\left(\bar{r}^2+h^2\right)^{7/2}}-\left[\frac{1}{\left[\bar{r}^2+(z+h)^2\right]^{5/2}}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{\left[\bar{r}^2+(z-h)^2\right]^{5/2}}\right]\right\}X \tag{10}$$

由（10）式可知，体积形变量θ_Σ有三个节面（图3）：

1）φ＝0°和180°时，即y＝0的平面；

2）φ＝90°和270°时，即x＝0的平面；

3）式（10）中大括号｛ ｝＝0的曲面，似“园碗”状，由于｛ ｝中的项与φ无关，所以“园碗”节面是一个旋转曲面。

这三个节面把半空间中的体积形变量的分布，划分成一种“双重”的象限分布。图中的“＋”号表示体积膨胀区，“－”号表示体积压缩区。相应地，在自由面（z＝0）上，有

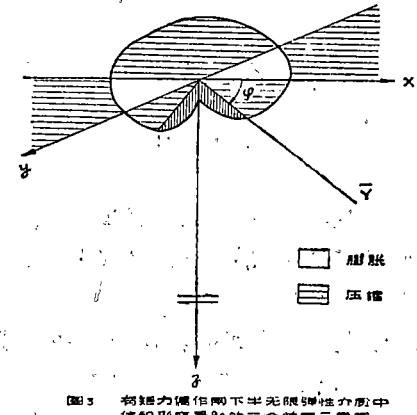

图3　矩矩力偶作用下半无限弹性介质中体积形变量θΣ的三个节面示意图

图　3

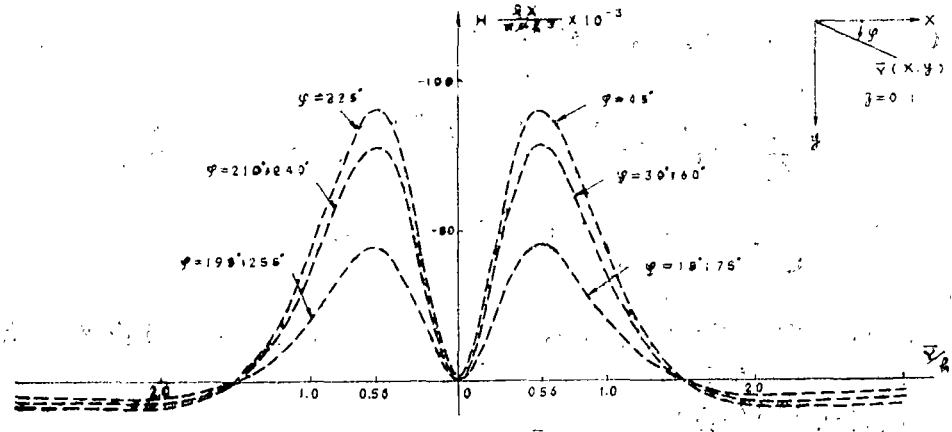

图4 (A) 体积形变量θ_Σ随$\bar{r}/h$的变化($z=0$)
(B) 体积形变量θ_Σ随φ的变化($z=0$)

图 4 A

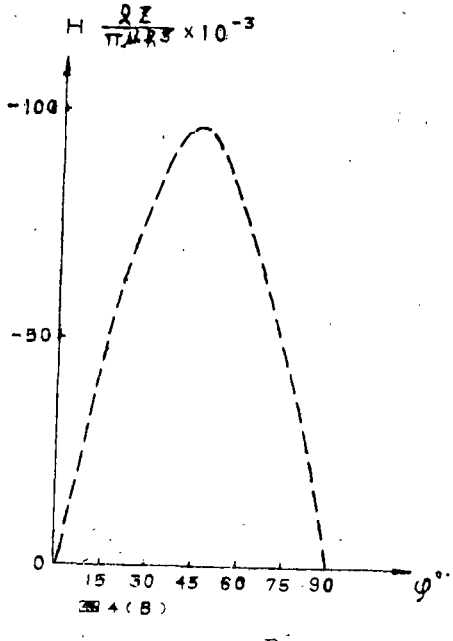

图4(B)

图 4 B

三条节线($x=0, y=0$,和$\bar{r}^2-\frac{7}{3}h^2=0$)—两条坐标轴和一个以半径为$\sqrt{\frac{7}{3}}h$的园。

图4绘出第Ⅰ和Ⅲ对角象限中，在自由面($z=0$)上体积形变量θ_Σ随$\bar{r}/h$的变化第Ⅱ Ⅳ象限的情况与图4相同只θ_Σ符号相反。在$\bar{r}/h\cong0.56$处，辐度最大。而在不同方位上，等距离$\bar{r}$的点上，以$\varphi=45°$和$225°$时的辐度最大。

图5是自由面上第Ⅰ象限中($x>0$, $y>0$)，θ_Σ的等值线图。它表明在园节线附近等值线密集，即在园节线附近体积形变量的梯度最大。园节线是θ_Σ符号改变的分界线之一。

图6绘出$\varphi=45°$时，在该垂直剖面上体积形变量θ_Σ的等值线图。z轴以及"园碗"节面与此剖面的交线是节线，在这两条节线附近的等值线亦是密集的，即是θ_Σ梯度大的地带。在(0, 0, h)的点上，体积形变量θ_Σ趋于无穷大，是奇点。

小结上述图表可知，对于水平力系而言：

a).体积形变量θ_Σ由三个节面划分为"双重"象限型的空间分布；b)节面附近，是应变强烈的地带；应变集中区的范围大约是以z轴为轴线，半径$\bar{r}\simeq1.5h$的园柱体内(图4、5、6)。

对于任意方向力系作用下，θ_Σ的空间分布，都可以由（8）式出发进行讨论。

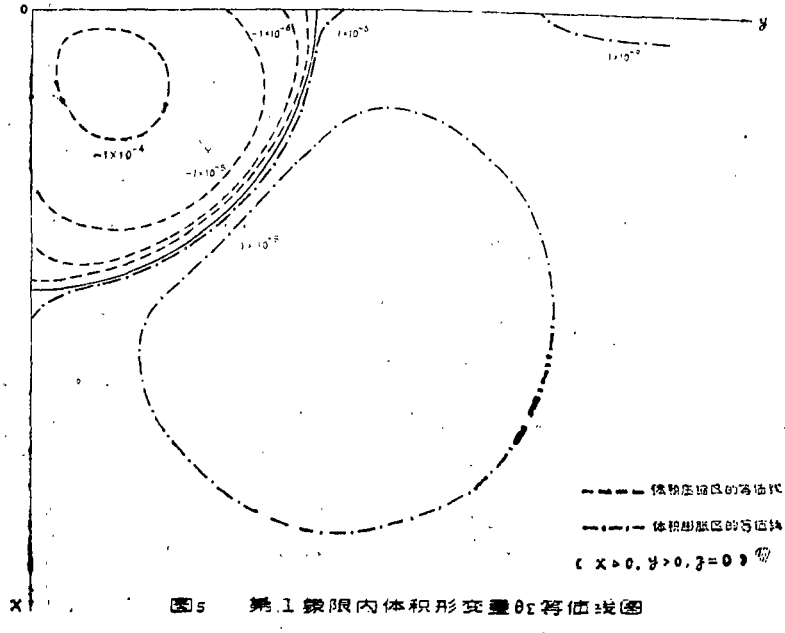

图5 第1象限内体积形变量θ_Σ等值线图

图 5

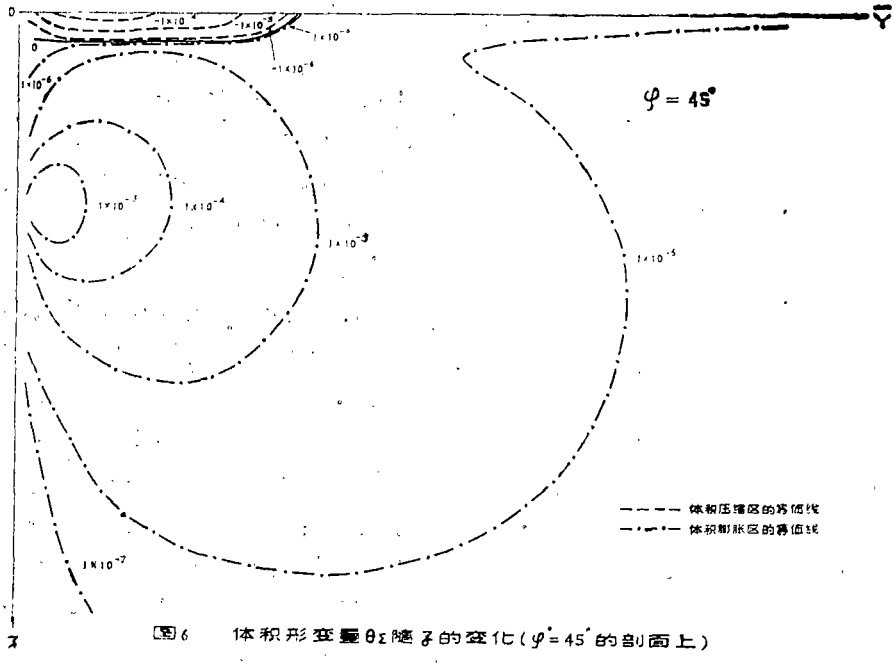

图6 体积形变量θ_Σ随z的变化（$\varphi=45°$的剖面上）

图 6

三

大地震发生之前的过程中，已经被观测到多种异，常变化如小地震的时空分布，波速，

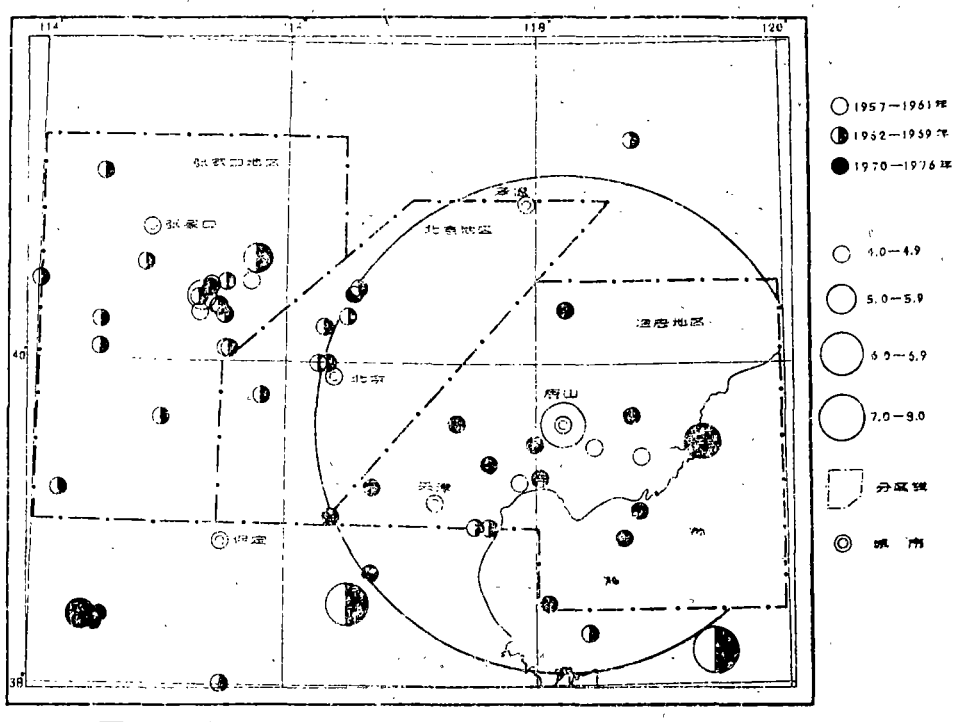

图7 唐山7.8级大地震前地震活动迁移的特征

图 7

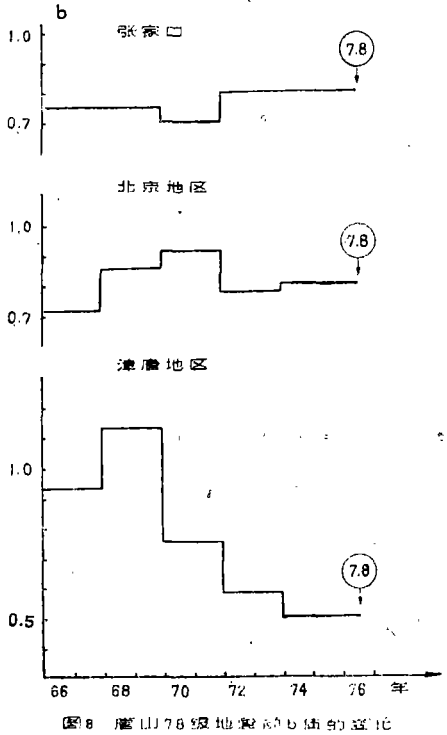

图8 唐山7.8级地震前b值的变化

图 8

电阻率等的变化可能是和介质的形变有关。鉴于目前的观测和研究水平，资料还不够丰富和完全，我们列举某些震例现象的空间分布特征，试图与上述的结果进行定性的对比和讨论。

1.唐山地震前的地震活动分布异常

1976年7月28日发生唐山大地震（$M_S=7.8$），地震之前在唐山—北京—张家口这一线的地带上，地震活动呈现向唐山地区外围迁移的现象。在该带上，我们划分出三个地段：Ⅰ段(张家口地区)、Ⅱ段(北京地区)和Ⅲ段(津唐地区)(图7)。由图7可知，自1962年至1969年间的地震活动（$M_L\geqslant4.0$）集中在Ⅰ段和Ⅱ段，尤其是集中在北京以西地区。自1970年5月25日唐山丰南地震（$M_L=5.2$）发生之后，该地带上的地震活动明显迁移到津唐地区上。与此同时，三个地段上的b值变化曲线，（图8），只有津唐地段b的值在1970年之后显著下降，说明

津唐地区在大震之前处于高应力—应变状态，其范围超过100公里。津唐地段可能相应于前述（第二节）的高应变区，可能表明自1970年以后，唐山地区下面某个深度上的一个部位，应力集中程度逐步增强。

2.唐山地震前电阻率异常

唐山大地震之前，北京以东的大范围内，电阻率有数年的趋势性的下降异常，在北京以西变化便不明显[3]。和震源机制解对比，电阻率下降区与地震波初动膨胀区相应，个别电阻率变化上升的测点位于初动压缩区，显示出不完全的象限分布迹象（图9）。文献[4]的作者认为，地电阻率大辐度下降的区域表明地震前地表附近区域上体积挤压，挤压区的边界到达以唐山为中心，半径约150公里的距离上。

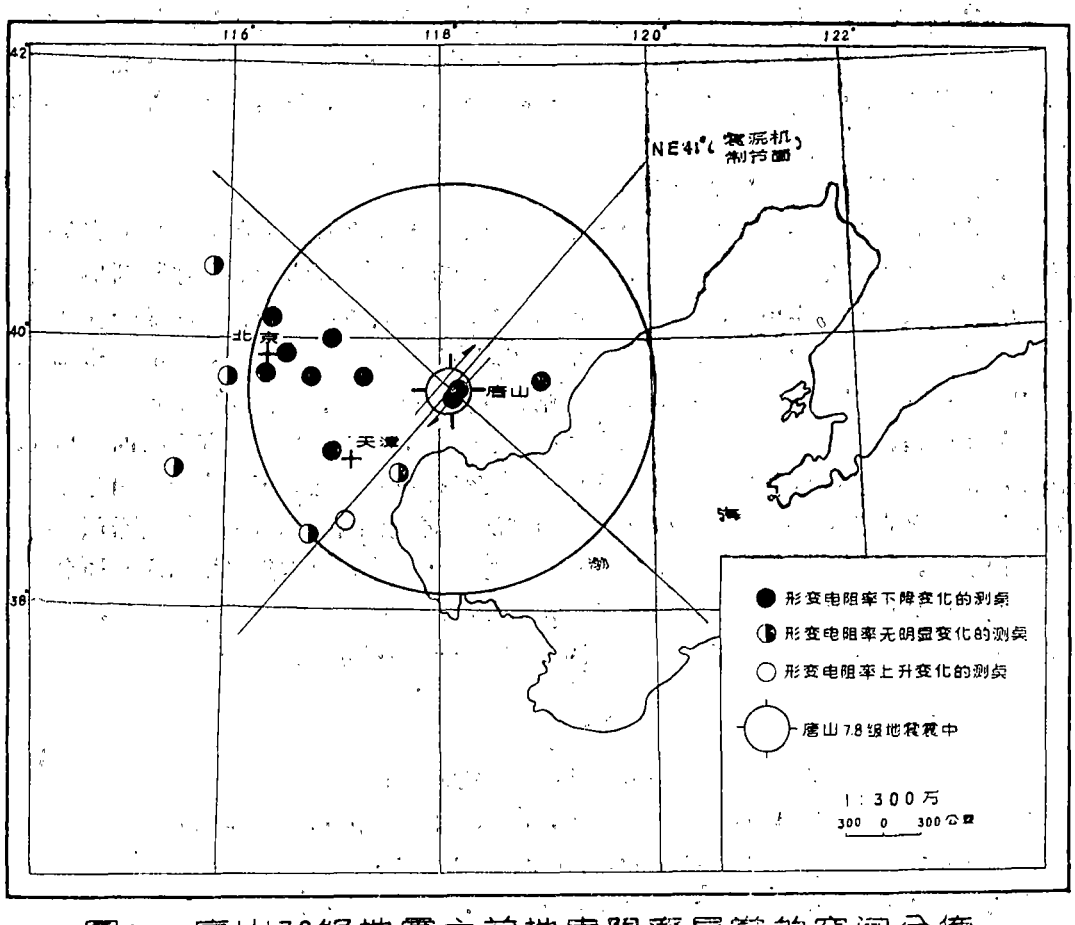

图9 唐山7.8级地震之前地电阻率异常的空间分布

文献〔4〕在讨论地电阻率大面积下降异常是一种介质压密现象时，还引证了相应地区内基线测量的资料，表明北京以东至唐山的地域内基线缩短，北京以西基线伸张。

假定唐山大地震前在震中下面某个深度上的集中剪切力源的作用方式，和唐山地震时刻震源错动方式（右旋）一致的话，那么，在地震前六年间，由于集中剪切力源作用下，在周围百余公里的范围内处于高应变的状态，在地表附近高应变是围于园形的象限分布

特征的范围内，成为地震活动性增强、b值下降、地电阻率（和基线）异常分布特征的依据。

3.波速异常的象限分布

1948年6月28日日本福井7.2级地震之前五个月内，在震中周围200公里观测到象限型的走时异常，即地震波初动压缩区观测到纵波速度减慢，而在引张区速度加快[4]。象限型的波速异常特征反映介质形变的各向异性（类似的震例在文献[5]中作了综述），这也是和集中有矩内力作用下半空间体积形变量空间象限分布的结果一致。

4.半空间浅部的“让位”

由本文第二节的讨论可知，半空间内的三个体积形变量节面附近都是形变梯度大的地方，提供了沿着这些节面三维滑错的条件。而且，在地表附近存在的“园碗”底状的节面，它可能是地壳浅部滑动的“让位”条件，即是在岩体错动向前的方向上，在滑错之前是体积膨胀区（“+”号区），天然地能够“承受”岩体错动过来的推挤，当然也就成为浅部错动能够停止的条件之一。“让位”是郭增建和秦保燕震源孕育模式的一个重要概念[6]。

5.与震源机制初动分布的比较

众所周知，直立平推断层的地震发生时，在地面上接收到P波动初符号的分布是一种象限分布，它有两个互相正交的节线。由本文第二节可知，假定震前与直立平推断层错动方式和方向相同的集中内力作用下，半空间自由面(地面)上的体积形变量的分布是一种“双重”象限分布（图3）。这两种分布比较后可知，在震中周围一定范围内，地震时初动压缩波的象限相应是震前体积膨胀区，地震时初动膨胀波的象限相应是震前体积压缩区。

最后应当指出，本文中的计算结果和某些地震现象的对比仍是定性和简略的。另外，上述例举唐山大地震前兆的某些观测结果说明，地震之前应变强烈的区域半径$\overline{r}$约是150公里左右，按照本文中的结果，应力集中源就应当埋深100公里左右，就可能是在岩石圈的底部存在剪切力源，地震时的震源位置（破裂点）可能是在该剪切力源作用下的应变场中，与震源局部范围内介质的力学、物理与化学等条件耦合，而最适宜破裂的地方。但是，计算模型的理想化仍是定量对比遇到困难的根本原因，需要进一步的研究。

参考文献

〔1〕I.N史奈登，富利叶变换，科学出版社，北京，1962.

〔2〕B.N.克依利斯博罗克等，地震机制的研究，科学出版社，北京，1961.

〔3〕赵玉林，钱复业，地球物理学报，№.3.P.1.1978.

〔4〕宫本贞夫，地震，第2辑，第9卷，第1号，P.47，1956.

〔5〕T.Terashlma, Boll.Inter.Inst.Seismo.Earthq.Engin., Vol.12,P.17—29, 1974

〔6〕郭增建 秦保燕，力学，№.1 P.68，1977.